ECT
1re année

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHÉMATIQUES INFORMATIQUE

2e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés
- Éléments d'informatique et d'algorithmique avec Python

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques Informatique ECT - 1re année

2e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Gianfranco NIFFOI

Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Nicolas PIERSON

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL

Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Ce livre est dédié à la mémoire de Claude Huet.

ISBN 9782340-048645
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir surveillé, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire toutes les notions à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir surveillé ou le passage d'une colle relative au thème traité. Les résultats sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthode » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme, vous révéler les mauvais réflexes à corriger. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi cet ouvrage vous accompagnera tout au long de l'année et vous guidera dans votre cheminement **vers le passage en deuxième année et la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier semestre

1. Raisonnements mathématiques 1
2. Ensembles – Applications 17
3. Calculs numériques – Calculs littéraux 35
4. Équations – Inéquations (1^{er} et 2^{nd} degré) 61
5. Fonctions polynomiales– Fonctions rationnelles 87
6. Racine carrée 111
7. Valeur absolue 129
8. Suites usuelles – Premières sommes 145
9. Généralités sur les fonctions 165
10. Limites – Continuité – Branches infinies 185
11. Dérivabilité – Variations – Convexité 205
12. Espaces probabilisés finis 225
13. Conditionnement – Indépendance 249
14. Variables aléatoires finies 273

Deuxième semestre

15. Systèmes linéaires 301
16. Calcul matriciel 321
17. Logarithme – Exponentielle 339
18. Suites : compléments 361
19. Limites des fonctions : compléments 385

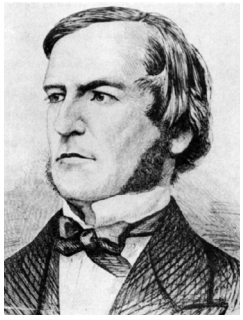
20. Continuité sur un intervalle 403
21. Intégration sur un segment 421
22. Coefficients binomiaux 441
23. Lois discrètes finies usuelles 457
24. Initiation à Python 475
25. Les librairies de Python 501
26. Bases de données 541

Index 569

Chapitre 1

Raisonnements mathématiques

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement. Au milieu du XIX^{e}, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur. Au tournant du XX^{e} siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- ▷ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ▷ Savoir mettre en place un contre-exemple.

et plus si affinités

- ▷ Savoir mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.
- ▷ Savoir manipuler les connecteurs logiques et les quantificateurs.

■■ Résumé de cours

■ Les éléments du raisonnement

❑ Proposition

Définition 1.1. — On appelle proposition toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. Lorsque l'énoncé d'une proposition porte sur une variable x, nous pourrons la noter $\mathcal{P}(x)$.

Remarque 1.1. — On écrira indifféremment " $\mathcal{P}$ " ou " $\mathcal{P}$ est vraie ".

Exemple 1.1. — Pour tout réel x strictement positif, "$x-1>0$" est une proposition dépendante de la variable x. Elle est vraie si $x>1$, et fausse sinon.
Exemple 1.2. — Pour un dé lancé, "*le numéro sorti est pair*" est une proposition.
Exemple 1.3. — Pour tout réel x, "$(2x+1)^2$" n'est pas une proposition.

❑ Quantificateurs

Notation 1.1. — Le signe " $\forall$ " placé devant une variable x signifie "*quel que soit x...*".
Le signe " $\exists$ " placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x...*".
Le signe " $\exists!$ " placé devant une variable x signifie "*il existe un unique x...*".
"$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1>0$" se lit : "quel que soit le réel x, x^2+1 est strictement positif" ou "pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif".
"$\exists x\in]0,+\infty[,\ x^2-9=0$" se lit : "il existe au moins un réel x strictement positif tel que x^2-9 est égal à 0" (il y en a d'ailleurs un unique : il s'agit de $x=3$).
"$\exists! n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2}=3$" se lit : "il existe un unique entier naturel n non nul tel que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est égal à 3" (il s'agit du nombre 2).

Remarque 1.2. — Notons que, dans un énoncé, l'expression "*il existe un x*" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. Si unicité il y a, elle sera explicitement mentionnée.

Propriété 1.1. — En général, la proposition $\big(\forall x,\exists y,\mathcal{P}(x,y)\big)$ est différente de $\big(\exists y,\forall x,\mathcal{P}(x,y)\big)$.

Exemple 1.4. — La proposition "$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{Z},\ n\leq x<n+1$" énonce que, quel que soit le réel x, il existe un entier n, tel que x soit compris entre n et $n+1$, cette dernière valeur étant exclue. C'est une proposition vraie (qui définit d'ailleurs ce que l'on appelle la partie entière de x). Elle est différente de la suivante : "$\exists n\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R},n\leq x<n+1$" qui affirme, quant à elle, que tous les réels sont compris entre deux entiers fixés. Elle est évidemment fausse.

Remarque 1.3. — Dans l'expression "$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R},\ ...$", il faut noter que x dépend de y, on devrait en toute rigueur le noter x_y ou $x(y)$, ce que l'on ne fait presque jamais.

❑ Connecteurs logiques

Définition 1.2. — La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non $\mathcal{P}$ et appelée *négation* de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Propriété 1.2. — La négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \text{non}\,\mathcal{P}(x))$.

Exemples 1.5. — Pour un dé lancé trois fois, le contraire de "*les trois numéros obtenus sont pairs*" est "*au moins un des numéros obtenus est impair*".
La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n+1$" est : "$\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x < n$ ou $x \geq n+1$".
La première proposition est vraie puisqu'elle définit l'entier n qui est la partie entière de x (voir **exemple 1.4**) et la deuxième est fausse car il n'existe pas de réel x tel qu'aucun entier ne soit dans l'intervalle $]x-1, x]$.

Définition 1.3. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *disjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le "ou" étant entendu ici inclusivement (soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux).
Exemple 1.6. — Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "*le numéro sorti est pair*", et $\mathcal{Q}$: "*le numéro sorti est supérieur ou égal à* 3". Alors, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est 2, 3, 4, 5 ou 6*".

Définition 1.4. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On appelle *conjonction* de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (les deux simultanément).
Exemple 1.7. — En reprenant l'**exemple 1.7**, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "*le numéro sorti est* 4 *ou* 6".

Définition 1.5. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *implique* $\mathcal{Q}$, et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie (l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$).
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par implication ?**

Exemple 1.8. — Pour tout réel x, on a : $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$ (l'implication réciproque est fausse).

Définition 1.6. — Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ *équivaut* à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
Vocabulaire — Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$.

Exemple 1.9. — $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall b \in \mathbb{R}_+$, $\left(\sqrt{a} < \sqrt{b}\right) \Leftrightarrow (a < b)$.

Exemple 1.10. — Pour tout entier n, n est multiple de 6 si, et seulement si, n est multiple à la fois de 2 et de 3.

■ Différents types de raisonnements

❑ Démonstration par contre-exemple

Théorème 1.1. — Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, on trouve un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple pour lequel la propriété est fausse.

⇨ **Méthode 1.2. Comment utiliser un contre-exemple ?**

❑ Démonstration par l'absurde

Théorème 1.2. — Quelles que soient les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, pour montrer que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse. Ensuite on tente d'en déduire une contradiction.

⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par l'absurde ?**

❑ Démonstration par récurrence

Théorème 1.3. — Soit un entier naturel n_0.
Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n.
Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, en supposant la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence ?**

Attention ! Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !). On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Vocabulaire. — La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'*initialisation* de la récurrence. La vérité de l'implication $\big(\mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big) \Rightarrow \big(\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}\big)$ s'appelle l'*hérédité* de la proposition.

Remarque 1.4. — La plupart du temps, on a $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

■■ Méthodes

■ Différents types de raisonnement

❑ Méthode 1.1. Comment montrer une proposition par implication ?

La plupart du temps, pour prouver une proposition, on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole $\Rightarrow$) en construisant un raisonnement "direct".

⇨ Exercice 1.3

Exemple. Montrer que, si $x < 1$, alors $(x-4)^2 > 9$.

Si $x < 1$, alors on a : $x - 4 < -3$.

Par décroissance de la fonction "carré" sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que : $(x-4)^2 > 9$.

Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $x < 1 \Rightarrow (x-4)^2 > 9$.

❑ Méthode 1.2. Comment utiliser un contre-exemple ?

Pour montrer qu'une implication est fausse, il suffit de trouver un exemple qui montre que c'est le cas.

⇨ Exercices 1.1, 1.2

Exemple. Montrer que si l'on a $x^2 = y^2$, alors on ne peut pas en déduire que $x = y$.

En effet, avec $x = 2$ et $y = -2$, on a bien $x^2 = y^2$ et pourtant, on a : $x \neq y$.

❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire une contradiction.

⇨ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -3, on a : $\dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

Par l'absurde, si l'on avait $\dfrac{x+1}{x+3} = 1$, alors on en déduirait $x + 1 = x + 3$, ce qui équivaut à $1 = 3$.

Ceci étant manifestement faux, on en déduit que : $\forall x \neq -3,\ \dfrac{x+1}{x+3} \neq 1$.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par récurrence ?

n_0 est ici un entier naturel fixé.

On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.

- Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : on considère un entier n fixé supérieur ou égal à n_0 tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6, 1.8**

Exemple. On pose $u_0 = 1$ et on suppose que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n^2$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

On commence par noter, pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 1$".

• Initialisation : on a bien $u_0 = 1$.

• Hérédité : on suppose que $u_n = 1$ pour un entier naturel n fixé dans $\mathbb{N}$.

On a alors : $u_{n+1} = 1^2 = 1$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$$

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in [x, +\infty[,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leq n \leq y$.	☐	☐
2.	$\exists! y \in \mathbb{R},\ \exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$.	☐	☐
3.	La fonction f n'est pas la fonction nulle signifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.	☐	☐
4.	Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x)$.	☐	☐
5.	Il existe au moins une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)$	☐	☐
6.	On désigne par a et b deux réels, alors : $(ab \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0$ ou $b \neq 0)$.	☐	☐
7.	L'équation $x^2 = -x$ n'a pas de solution.	☐	☐
8.	Pour tout réel x positif, on a : $x^2 \geq x$.	☐	☐
9.	Pour tout réel x strictement négatif, on a : $x^2 \geq x$.	☐	☐
10.	Si $\mathcal{P}(n)$ est "$u_{2n+1} \leq 2^n$", alors $\mathcal{P}(n+1)$ est "$u_{2n+2} \leq 2^{n+1}$".	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — On considère le polynôme P défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{12}x + 1.$$

Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$. Peut-on en déduire quelque chose pour $P(5)$?

❑ **Exercice 1.2.** — Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

1. Montrer par un contre-exemple que l'on n'a pas, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

2. Montrer par un contre-exemple que l'on n'a pas, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

❑ **Exercice 1.3.** — Montrer que si $x \in [0, 1]$, alors $1 - x \in [0, 1]$.

❑ **Exercice 1.4.**** — Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (où l'on désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions d'entiers).

Supposons pour cela qu'il existe deux entiers n et p (avec $p \geq 1$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{n}{p}$. On les suppose de plus choisis de telle sorte que la fraction soit irréductible (non simplifiable).

1. Justifier que n^2 est pair puis montrer que n est pair.

2. En écrivant n sous la forme $2n'$, avec n' élément de $\mathbb{N}$, montrer que p lui-même est pair.

3. Conclure.

❑ **Exercice 1.5.** — Soit un réel a positif. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$.

❑ **Exercice 1.6.** — Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2\right)$ est fausse.

Prouver en revanche que : $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$.

❑ **Exercice 1.7.**** — Le but de cet exercice est de déterminer, si elles existent, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, et vérifiant la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

1. Considérons f une telle fonction.

a) En donnant à x et y des valeurs particulières, donner les seules valeurs possibles de $f(0)$.

b) En donnant à x et y d'autres valeurs particulières, justifier que $f(0)$ vaut nécessairement 1.

c) En donnant à y seulement une certaine valeur, donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

2. Conclure quant au but de l'exercice.

❑ **Exercice 1.8.*** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \frac{1}{2} \text{ et } u_{2n+1} = -1$$

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1. Après calcul de $P(5)$, on constate que ce n'est pas ce que l'on aurait cru pouvoir attendre.

Exercice 1.3. Traduire $x \in [0, 1]$ par $0 \leq x \leq 1$.

Exercice 1.4. Pour la question **1**, ayant obtenu que n^2 est pair, pour montrer que n est pair, supposer que n est impair et montrer qu'alors n^2 serait impair.

Exercices 1.5. et **1.6.** Faire une récurrence.

Exercice 1.7. Pour la question **1.a)**, faire $x = y = 0$.

Pour la question **1.b)**, faire $x = 0$ et $y = ...$

La deuxième question n'est pas stupide ! Il se pourrait que la fonction trouvée à la première question ne vérifie pas la condition imposée, ce qui signifierait que le problème posé n'aurait pas de solution.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
F	V	F	F	V	F	F	F	V	F

1. Il suffit de choisir $x = 1{,}5$ et $y = 1{,}6$.

2. Posons $P(y)$: "$\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$". Cette proposition n'est vraie que pour $y = 0$.
En effet, l'équation $x^2 = y$ possède deux solutions réelles si $y > 0$ et aucune solution réelle si $y < 0$. Ainsi on a bien : "$\exists! y \in \mathbb{R}, P(y)$", et ce "$y$" est 0.

3. Dire que la fonction f est la fonction nulle signifie : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
f n'est pas la fonction nulle signifie donc : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
Par exemple, la fonction qui vaut 0 sur]–∞, 0[∪]0, +∞[et telle que $f(0) = 3$ n'est pas la fonction nulle.

4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ vérifie : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

5. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ vérifie : $f(-x) = -x$.
On a donc : $-f(-x) = x = f(x)$

6. Les deux facteurs du produit doivent être différents de 0 si l'on veut que le produit soit différent de 0 (sinon, dès qu'un facteur est nul, on sait que le produit est nul).

7. L'équation $x^2 = -x$ a deux solutions : $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$ (s'en convaincre en remplaçant x par 0, puis x par –1).

8. Si l'on prend $x = \frac{1}{2}$, on a $x^2 = \frac{1}{4}$, ce qui fait que : $x^2 < x$.

9. En effet, comme x^2 est positif ou nul, il est supérieur à tout réel strictement négatif, donc supérieur à x.

10. $\mathcal{P}(n)$ est la proposition "$u_{2n+1} \leq 2^n$", alors $\mathcal{P}(n+1)$ est la proposition "$u_{2(n+1)+1} \leq 2^{n+1}$", c'est-à-dire : "$u_{2n+3} \leq 2^{n+1}$".

Corrigé

❑ Les erreurs classiques

• Il faut bien penser que la négation de "pour tout x de A, x vérifie P" est "il existe x dans A ne vérifiant pas P" et non pas "pour tout x de A, x ne vérifie pas P".
C'est en fait la technique du contre exemple qui est ainsi mise en valeur.
• Faire attention aux "faux amis" : il ne faut pas se fier aux apparences pour analyser si une égalité ou une inégalité est correcte.
• Il ne faut pas croire qu'il suffise d'ajouter 1 au hasard pour passer de la propriété $\mathcal{P}(n)$ à la propriété $\mathcal{P}(n+1)$, il faut remplacer n par $n+1$.

■■ Corrigé des exercices

Exercice 1.1

- $P(0)=1$, $P(1)=2$, $P(2)=4$, $P(3)=8$ et $P(4)=16$.
- On remarque que pour tout entier k de $[\![0,4]\!]$, on a : $P(k)=2^k$. On pourrait alors être tenté d'en déduire que $P(5)=2^5=32$. Mais en calculant, on trouve $P(5)=31$ (!).

On en conclut qu'il faut absolument prouver par récurrence toutes les conjectures faites, même si celles-ci sont vérifiées par les 5 premiers entiers.

⇨ *Méthode 1.2*

Exercice 1.2

1. On a : $f(-1)=\dfrac{1-1}{1+(-1)^2}=\dfrac{0}{2}=0$ et $f(1)=\dfrac{1+1}{1+1^2}=\dfrac{2}{2}=1$.

On a $f(-1)\neq f(1)$, ce qui prouve (contre-exemple) que la proposition "pour tout réel x, on a $f(-x)=f(x)$" est fausse.

2. On a aussi $f(-1)\neq -f(1)$, ce qui prouve (toujours par contre-exemple) que la proposition "pour tout réel x, on a $f(-x)=-f(x)$" est fausse.

⇨ *Méthode 1.2*

Exercice 1.3

Si $x\in[0,1]$, alors, par définition d'un intervalle, on a : $0\leq x\leq 1$. En multipliant par -1, on obtient : $-1\leq -x\leq 0$.

En ajoutant 1 à chaque membre, on a bien $0\leq 1-x\leq 1$, ce qui signifie que :

$$1-x\in[0,1]$$

⇨ *Méthode 1.1*

Exercice 1.4

Posons $\sqrt{2}=\dfrac{n}{p}$, avec n et p entiers naturels tels que p est non nul et $\dfrac{n}{p}$ non simplifiable.

1. On a alors $n=p\sqrt{2}$ et donc $n^2=2p^2$ ce qui signifie que n^2 est pair.

Pour montrer que n est pair, on suppose que n est impair. Dès lors, il existe un entier naturel k tel que $n=2k+1$. On a alors : $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$.

En posant $p=2k^2+2k$, p est bien un entier naturel et on a $n^2=2p+1$ donc n^2 est impair.

En conclusion, on a montré que si n était impair, alors n^2 serait impair.

Conclusion : n est pair.

2. n est pair signifie qu'il existe n' élément de $\mathbb{N}$, tel que $n = 2n'$. En réécrivant l'égalité $n^2 = 2p^2$ avec n', on obtient $4(n')^2 = 2p^2$, soit $p^2 = 2(n')^2$, ce qui prouve que p^2 est pair.
En raisonnant encore une fois comme ci-dessus, on obtient que p est pair.

3. Finalement p et n sont tous les deux des entiers pairs, ils sont donc tous les deux divisibles par 2 ce qui contredit le fait que $\frac{n}{p}$ est non simplifiable.

$\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers donc : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

⇨ *Méthode 1.3*

Exercice 1.5

Procédons par récurrence en posant, pour tout entier naturel n, $R(n) : "(1+a)^n \geq 1+na"$.

• $R(0)$ est vraie car $(1+a)^0 = 1 = 1 + 0 \times a$, donc $(1+a)^0 \geq 1 + 0a$.

• Supposons $R(n)$ vraie pour un certain entier naturel n.

On a $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a)$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité $(1+a)^n \geq 1+na$, écrite dans l'hypothèse de récurrence, par $(1+a) > 0$, on obtient :

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

Or $(1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$, puisque $na^2 \geq 0$, ce qui montre que $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$ et ainsi : $R(n+1)$ est vraie.

On a bien montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$$

⇨ *Méthode 1.4*

Exercice 1.6

• La proposition $(\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n^2)$ est fausse puisque $2^3 = 8$ alors que $3^2 = 9$.

• Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, posons $P(n) : "2^n \geq n^2"$.

→ $P(4)$ est vraie. En effet, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$.

→ Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à 4.

On a alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$ par hypothèse de récurrence.
On doit donc maintenant montrer que : $2n^2 \geq (n+1)^2$.
En faisant la différence, on a :

$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - (n^2 + 2n + 1) = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$$

Comme $n - 1 \geq 3$, il est certain que $(n-1)^2 - 2$ est supérieur ou égal à 7, donc positif.

On a donc bien : $2n^2 \geq (n+1)^2$, ce qui prouve que $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.
Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
On a bien montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$$

⇨ *Méthode 1.4*

Exercice 1.7

1. Soit f une fonction vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ (relation R).

a) Avec $x = 0$ et $y = 0$, on déduit : $(f(0))^2 - f(0) = 0$, ce qui donne $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ (ce sont les deux solutions de l'équation $(f(0))^2 - f(0) = 0$ d'inconnue $f(0)$.

b) Avec $x = 0$ et $y = 1$. On a $f(0)f(1) - f(0) = 1$. Si on avait $f(0) = 0$, on obtiendrait $0 = 1$ dans la relation précédente, ce qui est absurde donc $f(0) = 1$.

c) On pose $y = 0$ et on obtient pour tout réel x : $f(x) = x + 1$.

2. La fonction f trouvée ci-dessus est bien définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = (1+x)(1+y) - (1+xy) = 1 + x + y + xy - 1 - xy = x + y$.
Par conséquent, f vérifie la relation (R). Finalement, il existe une seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant (R), c'est la fonction f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$$

Exercice 1.8

Procédons par récurrence en posant pour tout entier naturel n : $R(n)$: "$u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$".

• $R(0)$ est vraie car $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$.

• Supposons $R(n)$ vraie pour un certain entier naturel n.

On a d'une part, $u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1} - 1}$ et, comme $u_{2n+1} = -1$ (par hypothèse de récurrence), on trouve :

$$u_{2n+2} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

D'autre part, $u_{2n+3}=\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+2}-1}$ et comme $u_{2n+2}=\dfrac{1}{2}$, on a $u_{2n+3}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}-1}$, ce qui donne après simplifications : $u_{2n+3}=-1$. Ainsi, $R(n+1)$ est vraie.

Finalement, par récurrence, on a, pour tout entier naturel n :

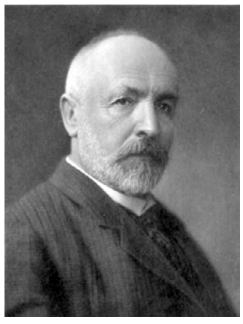
$$u_{2n}=\frac{1}{2} \quad \text{et } u_{2n+1}=-1$$

⇨ *Méthode 1.4*

Chapitre 2

Ensembles Applications

UN MATHÉMATICIEN



« *L'essence même des mathématiques, c'est leur liberté* » disait **Georg Cantor**, mathématicien allemand né à Saint Pétersbourg, connu pour avoir été le père de la théorie des ensembles. C'est dans les années 1870 qu'il fonde cette théorie en lien avec son compatriote Richard Dedekind et qu'il définit la notion de cardinal pour les ensembles infinis. Ses théories révolutionnaires furent mal accueillies par certains mais sont désormais acceptées par tous.

Un peu d'histoire

La théorie des ensembles est un cadre dans lequel s'inscrivent toutes les branches des mathématiques. Au tout début des années 1870, Georg Cantor s'intéresse aux points où certaines fonctions ont des comportements atypiques. Cela l'amène à étendre la notion de cardinal (nombre d'éléments) à des ensembles infinis. Il montre que des ensembles infinis peuvent avoir le même cardinal, comme une droite et un plan, mais qu'aussi, il existe différents cardinaux infinis.

Le mathématicien Giuseppe Peano rédige en 1895 un formulaire mathématique qui popularise cette théorie dans lequel il introduit plusieurs symboles que nous utilisons encore.

Le logicien anglais Bertrand Russell énonce un paradoxe qui montre que l'on ne peut nommer ensemble n'importe quoi. Pour pallier ce problème, Ernst Zermelo définit des axiomes sur lesquels doit s'appuyer la théorie des ensembles.

Objectifs

les incontournables

- Savoir démontrer qu'un ensemble est inclus dans un autre.
- Savoir démontrer que deux ensembles sont égaux.
- Savoir utiliser les lois de Morgan.

et plus si affinités

- Savoir manipuler les opérations sur les ensembles.

■■ Résumé de cours

■ Ensembles et éléments

❑ Définitions, exemples et notations

Définition 2.1. — On définit un ensemble si l'on est capable d'affirmer sans ambiguïté qu'un objet appartient ou non à cet ensemble : on dit alors que cet objet est un *élément* de l'ensemble. En principe, on regroupe dans un ensemble des objets ayant une propriété en commun.

Remarque 2.1. — On peut décrire un ensemble en extension, en donnant entre accolades la liste de ses éléments, comme $E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, ou en compréhension, c'est-à-dire, entre accolades toujours, en nommant les éléments, puis après une virgule, en les décrivant, ce qui, avec l'exemple précédent donne $E = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair}\}$.

Exemple 2.1. — Pour tout entier naturel n non nul, l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, est noté $[\![1, n]\!]$, et est défini en compréhension par : $[\![1, n]\!] = \{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$.

Notations 2.1. — On désigne les ensembles par des majuscules et les éléments par des minuscules.
On écrit "$x \in E$" pour traduire que "x appartient à E" ou encore que "x est élément de E".
On écrit "$x \notin E$" pour traduire que l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E.

❑ Produit cartésien de deux ensembles

Définition 2.2. — Le produit cartésien des ensembles A et B est l'ensemble noté $A \times B$, on lit A *croix* B, constitué de tous les *couples* dont la première composante appartient à A et la deuxième à B. On a donc :

$$A \times B = \{ (x, y), x \in A \text{ et } y \in B \}.$$

Remarque 2.2. — $A \times A$ est noté A^2.

Définition 2.3. — De la même façon, on définit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'ensemble $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ des *n-uplets* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avec $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$.
On a donc :

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i \}.$$

Remarque 2.3. — $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois la lettre } A}$ est noté A^n.

Exemple 2.2. — L'ensemble noté $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de nombres réels et $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de nombres réels.

■ Comparaison des ensembles

❑ Inclusion

Définition 2.4. — On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B.

⇨ **Méthode 2.1. Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre grâce à la définition ?**

Remarque 2.4. — Par convention, l'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble.

❑ Égalité

Définition 2.5. — On dit que deux ensembles A et B sont égaux, on note $A = B$, lorsque l'on a :

$$A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

⇨ **Méthode 2.4. Comment montrer que deux ensembles sont égaux grâce à la définition ?**

❑ Ensemble des parties d'un ensemble

Définitions 2.6. — On dit que l'ensemble A est une partie de l'ensemble E (ou encore un sous-ensemble de E) lorsque A est inclus dans E.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque 2.5. — Les phrases "$A \subset E$" et "$A \in \mathcal{P}(E)$" ont la même signification.

■ Opérations sur les ensembles

Dans ce paragraphe, on considère des ensembles qui sont tous des parties d'un ensemble de référence, noté Ω (cette lettre est la lettre grecque omega majuscule).

❑ Intersection

Définition 2.7. — L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, (on lit "A inter B") constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On a donc :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Propriété 2.1. — L'intersection est commutative : $A \cap B = B \cap A$.

Propriété 2.2. — L'intersection est associative : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
On note $A \cap B \cap C$ cette intersection.

Propriété 2.3. — $A \cap A = A$.

Propriété 2.4. — $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Propriété 2.5. — Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$.

Définition 2.8. — Deux ensembles sont dits *disjoints* si leur intersection est vide, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément commun.

❑ Réunion

Définition 2.9. — La réunion des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, (on lit "A union B") constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B. On a donc :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Remarque 2.6. — Le "ou" utilisé ci-dessus est dit inclusif : on peut avoir $x \in A \cap B$.

Propriété 2.6. — La réunion est commutative : $A \cup B = B \cup A$.

Propriété 2.7. — La réunion est associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
On note $A \cup B \cup C$ cette réunion.

Propriété 2.8. — $A \cup A = A$.

Propriété 2.9. — $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Propriété 2.10. — $\varnothing$ est élément neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = A$.

Propriété 2.11. — L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Propriété 2.12. — Un ordre à connaître : $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$.

⇨ **Méthode 2.2. Comment montrer que E est inclus dans F en écrivant $E = F \cap G$?**
⇨ **Méthode 2.3. Comment montrer que E est inclus dans F en écrivant $F = E \cup G$?**

❑ Complémentaire

Définition 2.10. — Le complémentaire de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$ (on lit "A barre"), contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On a donc : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

Propriété 2.13. — Quelques évidences : $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$.

Propriété 2.14. — $\overline{A}$ est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Propriété 2.15. — Lois de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Propriété 2.16. — $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

⇨ **Méthode 2.5. Comment montrer que deux ensembles sont égaux en utilisant les propriétés des opérations ?**

■ Ensembles finis

❑ Cardinal

Définitions 2.11. — Un ensemble E est dit fini, s'il possède un nombre fini n d'éléments. Le nombre n est appelé *cardinal* de E et est noté $\text{card}(E)$. On a $\text{card}(\varnothing) = 0$.

Définitions 2.12. — On appelle *singleton* tout ensemble possédant un seul élément. On appelle *paire* tout ensemble possédant deux éléments.

❑ Formule du crible (ou de Poincaré)

Propriété 2.17. — Si A et B sont deux ensembles finis, alors on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Propriété 2.18. — Si A et B sont deux ensembles finis et *disjoints*, alors on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

❑ Cardinal d'un produit cartésien

Propriété 2.19. — Si A et B sont deux ensembles finis, alors on a :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Remarque 2.7. — La notion de cardinal est introduite pour permettre le calcul de certaines probabilités dans le cadre de l'équiprobabilité.

■ Applications

Définition 2.13. — Une *application* f d'un ensemble E dans un ensemble F est un procédé qui permet d'associer les éléments de E avec des éléments de F appelés leurs *images*, de telle façon que chaque élément x de E possède exactement une image y dans F. On dit alors que x est un *antécédent* de y par l'application f.

Définition 2.14. — Soit E un ensemble. On appelle *identité* de E (ou *application identité* de E), l'application de E dans E, notée Id_E et définie par :

$$\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$$

Définition 2.15. — Composition des applications.
Soit E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On note $g \circ f$ (et on lit "g rond f") l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

⇨ **Méthode 2.6. Comment composer deux applications ?**

Remarque 2.8. — Faire attention que, en général, on a $g \circ f \neq f \circ g$ (voir la **méthode 2.6**).

Propriété 2.20. — La composition des applications est associative. Lorsque les composées écrites ci-après existent, on a : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$.

Propriété 2.21. — Si f est une application de E dans F, on a :

$$f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$$

❑ Bijection

Définition 2.16. — Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une application bijective (on dit aussi une bijection) si chaque élément de F possède un seul antécédent par f. Ceci s'écrit :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$$

Remarque 2.9. — En d'autres termes, f est bijective si l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x, possède une unique solution.

Exemple 2.3. — $x \mapsto x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

Théorème 2.1. — Soit f une bijection de E vers F.
Il existe une unique fonction g de F dans E telle que, pour tout x de E et tout y de F, on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

Définition 2.17. — La fonction g définie au **théorème 2.1** est appelée bijection réciproque de f et est notée f^{-1} (rien à voir avec $\frac{1}{f}$, ce n'est qu'une notation). On a alors l'équivalence :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

⇨ **Méthode 2.7. Comment déterminer l'application réciproque d'une bijection ?**

■■ Méthodes

■ Inclusion

❑ Méthode 2.1. Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre grâce à la définition ?

Pour montrer que A est inclus dans B, on prend un élément x quelconque de A et on prouve que x appartient à B.

⇨ Exercice 2.1

Exemple. Soit A l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et B l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que $A \subset B$.
Soit n un élément de A, alors il existe un entier naturel p tel que $n = 6p = 2\times 3p$, ce qui prouve que n est multiple de 2 et appartient donc à B. Ainsi, on a bien : $A \subset B$.

❑ Méthode 2.2. Comment montrer que E est inclus dans F en écrivant $E = F \cap G$?

Pour montrer que E est inclus dans F, on peut écrire E comme l'intersection de F et d'un autre ensemble G et utiliser le fait que $F \cap G \subset F$, c'est-à-dire : $E \subset F$.

⇨ Exercice 2.2

Exemple. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}\,,\, -1 \leq x \leq 5\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}\,,\, x \leq 5\}$. Montrer que $E \subset F$.
On a $E = \{x \in \mathbb{R}\,,\, -1 \leq x$ **et** $x \leq 5\} = F \cap G$, avec $G = \{x \in \mathbb{R}\,,\, -1 \leq x\}$.
On a donc bien $E \subset F$.

❑ Méthode 2.3. Comment montrer que E est inclus dans F en écrivant $F = E \cup G$?

Pour montrer que E est inclus dans F, on peut écrire F comme la réunion de E et d'un autre ensemble G et utiliser le fait que $E \subset E \cup G$, c'est-à-dire : $E \subset F$.

⇨ Exercice 2.2

Exemple. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}\,,\, x < 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}\,,\, x > 5$ ou $x < 1\}$. Montrer que $E \subset F$.
$F = \{x \in \mathbb{R}\,,\, x > 5$ **ou** $x < 1\}$.
On a donc bien : $F = E \cup G$, avec $G = \{x \in \mathbb{R}\,,\, x > 5\}$. Par conséquent : $E \subset F$.

■ Égalité d'ensembles

❑ Méthode 2.4. Comment montrer que deux ensembles sont égaux grâce à la définition ?

Pour montrer que $A = B$, on peut procéder par double inclusion.

⇨ Exercice 2.4

Exemple. Montrer que, si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.
Montrons dans un premier temps, que $A \subset B$.
Soit x un élément de A, alors, comme $A \subset A \cup B$, on a : $x \in A \cup B$. Mais $A \cup B = A \cap B$, on en déduit donc que $x \in A \cap B$, ce qui montre que, en particulier, $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
De la même façon, on montre que $B \subset A$ et on conclut par double inclusion que $A = B$.

❑ Méthode 2.5. Comment montrer que deux ensembles sont égaux en utilisant les propriétés des opérations ?

Pour montrer que $A = B$, on peut procéder par égalités successives en transformant A jusqu'à obtenir B.

⇨ Exercice 2.3

Exemple. On considère 2 parties, E et F, de Ω. On pose $A = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F}) \cup (\overline{E} \cap F)$.
Montrer que $A = E \cup F$.
Par associativité de la réunion, on a : $A = [(E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})] \cup (\overline{E} \cap F)$.
Par distributivité de l'intersection sur la réunion : $A = [E \cap (F \cup \overline{F})] \cup (\overline{E} \cap F)$.
$A = [E \cap \Omega] \cup (\overline{E} \cap F) = E \cup (\overline{E} \cap F)$, car $E \subset \Omega$, ce qui implique $E \cap \Omega = E$.
Par distributivité de la réunion sur l'intersection, on obtient : $A = (E \cup \overline{E}) \cap (E \cup F)$.
$A = \Omega \cap (E \cup F)$, et pour finir : $A = E \cup F$, car $E \cup F \subset \Omega$.

■ Applications

❑ Méthode 2.6. Comment composer deux applications ?

Pour déterminer $g \circ f$:
• Justifier en tout premier que l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g.
• Calculer, pour tout x de l'ensemble de départ de f, la quantité $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

⇨ Exercice 2.6

Exemple. Soit f et g les applications définies, pour tout réel x, par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Pour tout réel x, on a : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Remarque. On constate que $g \circ f \neq f \circ g$.

❑ Méthode 2.7. Comment déterminer l'application réciproque d'une bijection ?

- Pour montrer qu'une application f de E dans F est bijective, on peut montrer que l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x élément de E) possède une unique solution.
- Pour déterminer f^{-1}, on résout l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x élément de E, avec y fixé dans F) dont l'unique solution est $x = f^{-1}(y)$.

⇨ **Exercices 2.7, 2.8**

Exemple. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a : $f(x) = 2x + 1$.

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

• Soit y un réel tel que $y = f(x)$. On a alors $y = 2x + 1$, d'où $x = \dfrac{y-1}{2}$. L'équation $y = f(x)$ a une seule solution donc f est bijective.

• L'équation $y = 2x + 1$ a pour seule solution $x = \dfrac{y-1}{2}$, ce qui prouve que f^{-1} est définie par :

$\forall y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$.

■■ Vrai/Faux

Les assertions suivantes sont-elles vérifiées par toutes parties A, B et C d'un ensemble Ω.

		Vrai	Faux
1.	$A \cap B \subset B$.	☐	☐
2.	$A \cup B \subset B$.	☐	☐
3.	$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$.	☐	☐
4.	$(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = \Omega$.	☐	☐
5.	$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$.	☐	☐
6.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	☐	☐
7.	$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.	☐	☐
8.	$A \cap \overline{B} \subset A \cup B$.	☐	☐
9.	$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.	☐	☐
10.	$(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 2.1.*** — Autour de l'inclusion.

1. Soit les ensembles $A=\{0\,;5\,;7\}$, $B=\{4\,;5\,;6\,;7\}$ et $C=\{0\,;2\,;3\,;5\,;6\,;7\}$.

Compléter les propositions suivantes avec $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$A \ldots C$ $\quad 5 \ldots A$ $\quad 6 \ldots B$ $\quad \{2\,;5\} \ldots C$

$\varnothing \ldots C$ $\quad 3 \ldots B$ $\quad \{6\} \ldots B$ $\quad \{9\} \ldots C$

2. Trouver tous les ensembles X tels que $\{1\,;2\} \subset X \subset \{1\,;2\,;3\,;4\}$.

❑ **Exercice 2.2.*** — On considère une suite d'ensembles $\left(A_j\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \text{ et } U_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n .$$

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} \subset I_n$ et $U_n \subset U_{n+1}$.

❑ **Exercice 2.3.**** — Formules de Morgan généralisées.

On considère une suite d'ensembles $\left(A_j\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer par récurrence la première formule de Morgan généralisée :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k} .$$

2. En déduire, sans récurrence, la deuxième formule de Morgan généralisée :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} .$$

❑ **Exercice 2.4.*** — Soit trois ensembles A, B et C vérifiant :

$$A\cup B = A\cap C,\ B\cup C = B\cap A \text{ et } C\cup A = C\cap B$$

1. Montrer que $A\cup B \subset C$. En déduire que : $A\subset C$ et $B\subset C$.

2. Montrer, en réitérant ce procédé, que : $A = B = C$.

❑ **Exercice 2.5.** — Exhiber des exemples pour illustrer les deux affirmations suivantes :

1. Sous l'hypothèse $A\cup B = A\cup C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.

2. Sous l'hypothèse $A\cap B = A\cap C$, on ne peut pas conclure que $B = C$.

❑ **Exercice 2.6.** — La composition n'est pas commutative.

Soit f l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Soit g l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

❑ **Exercice 2.7.** — Soit f l'application définie, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et déterminer f^{-1}.

❑ **Exercice 2.8.** — On peut traiter cet exercice seulement après avoir étudié les équations du second degré (voir **chapitre 4**).

Soit f l'application définie par : $f(x) = x^2 + 3x$.

Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ vers $\left[-\dfrac{9}{4}, +\infty\right[$ et déterminer f^{-1}.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 2.2. Montrer d'abord que $I_{n+1} = I_n \cap A_{n+1}$ et $U_{n+1} = U_n \cup A_{n+1}$.

Exercice 2.3. Pour la question **2**, appliquer la première question à la suite d'ensembles $\left(\overline{A_j}\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2.4. Pour la question **1**, utiliser le fait que $A \cap C \subset C$.

Exercice 2.5. Trouver des contre-exemples avec des ensembles simples, ayant (par exemple) au plus trois éléments.

Exercice 2.6. Justifier que la composition est possible : en ce qui concerne $g \circ f$, vérifier que l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g.
Ensuite, il faut utiliser la relation $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$.

Exercice 2.7. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x. Déterminer f^{-1}, c'est trouver $f^{-1}(y)$ pour tout y appartenant à l'ensemble d'arrivée de f.

Exercice 2.8. A priori, l'équation $y = f(x)$ a deux solutions, mais l'une ne fait pas l'affaire.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
V	F	V	F	V	V	F	V	F	V

1. C'est du cours : tout élément de $A \cap B$ est à la fois dans A et dans B, il est donc, entre autres, élément de B (**propriété 2.12**).

2. Voici un exemple avec $A = \{0, 1\}$ et $B = \{2, 3\}$.
On a alors : $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$ et il est évident que $A \cup B$ n'est pas inclus dans B.

3. Par associativité et commutativité de l'intersection, on a :
$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap A \cap C = A \cap A \cap B \cap C$.
Comme $A \cap A = A$, on obtient bien : $(A \cap B) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

4. Par distributivité de l'intersection sur la réunion, on a : $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = B \cap \left(A \cup \overline{A}\right)$, ce qui donne $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = B \cap \Omega$.
Comme $B \subset \Omega$, on trouve : $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = B$, qui est, en général différent de Ω.

5. Par associativité de l'intersection, on a : $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap B \cap \overline{A} \cap B$.
Or l'intersection est commutative donc $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap \overline{A} \cap B \cap B$, puis encore par associativité : $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = (A \cap \overline{A}) \cap (B \cap B)$. Comme $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $B \cap B = B$, on trouve : $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing \cap B = \varnothing$.

6. Par distributivité de la réunion sur l'intersection, on a : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. L'égalité proposée ressemble à la distributivité de l'intersection sur la réunion, mais...
Si l'on prend $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$.

- $B \cup C = \{1, 2, 3\}$ donc $A \cap (B \cup C) = \{1\}$.
- $A \cup B = \{0, 1, 2\}$ et $A \cup C = \{0, 1, 3\}$ donc $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 1\}$.

On a donc : $A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8. On sait que $A \cap \overline{B} \subset A$ (**propriété 2.12**) et que $A \subset A \cup B$ (**propriété 2.12**).

9. On peut se douter que c'est faux puisque l'on sait (grâce aux lois de Morgan) que :

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}.$$

Voici un contre exemple :

Avec $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, considérons les ensembles : $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$.

- Alors $B \cap C = \{1\}$ donc $A \cup (B \cap C) = \{0, 1\}$ et $\overline{A \cup (B \cap C)} = \{2, 3\}$.
- De plus, $\overline{A} = \{2, 3\}$, $\overline{B} = \{0, 3\}$ et $\overline{C} = \{0, 2\}$ donc $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \varnothing$.

10. Par distributivité de la réunion sur l'intersection, on a : $(A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)$.

Comme $\overline{B} \cup B = \Omega$, on obtient $(A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap \Omega$, et comme $A \cup B \subset \Omega$, la **propriété 2.4** permet de conclure : $(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$.

❑ Les erreurs classiques

• Il ne faut surtout pas confondre réunion et intersection, notamment quand il faut établir des inclusions (ce qui sera le cas en probabilités).
• Il ne faut pas utiliser une propriété de distributivité lorsque l'on est en présence d'une seule opération ($\cap$ ou $\cup$).
• Le non respect des lois de Morgan entraîne de graves erreurs, similaires aux erreurs de logique (revoir à ce sujet le chapitre 1).
• Il vaut mieux ne pas trop se fier à son intuition lorsqu'il s'agit de mettre en place des inclusions (ce que l'on appelle le bon sens n'est parfois pas suffisant, voire trompeur).

Corrigé

■■ Corrigé des exercices

Exercice 2.1

1. On a :

$A \subset C$ $\quad 5 \in A$ $\quad 6 \in B$ $\quad \{2;5\} \subset C$ $\quad \varnothing \subset C$ $\quad 3 \notin B$ $\quad \{6\} \subset B$ $\quad \{9\} \not\subset C$

2. Les ensembles X cherchés sont : $\{1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$ et $\{1;2;3;4\}$.

⇨ *Méthode 2.1*

Exercice 2.2

- Par définition, on a :

$$I_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap A_{n+1} = \left(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n\right) \cap A_{n+1} = I_n \cap A_{n+1}.$$

Or $I_n \cap A_{n+1} \subset I_n$ (**propriété 2.12**) ainsi : $I_{n+1} \subset I_n$.

- De même, on a :

$$U_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1} = \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\right) \cup A_{n+1} = U_n \cup A_{n+1}.$$

- Or $U_n \subset U_n \cup A_{n+1}$ (**propriété 2.12**) ainsi : $U_n \subset U_{n+1}$.

Finalement, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a bien : $I_{n+1} \subset I_n$ et $U_n \subset U_{n+1}$.

⇨ *Méthodes 2.2, 2.3*

Exercice 2.3

1. Soit n un entier naturel non nul. Posons R(n) : "$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ ".

Montrons par récurrence que la propriété R(n) est vraie pour tout entier naturel non nul.

- R(1) est vraie. En effet, d'une part, $\overline{\bigcap_{k=1}^{1} A_k} = \overline{A_1}$ et d'autre part $\bigcup_{k=1}^{1} \overline{A_k} = \overline{A_1}$.

On a donc : $\overline{\bigcap_{k=1}^{1} A_k} = \bigcup_{k=1}^{1} \overline{A_k}$.

- Soit n un entier naturel non nul pour lequel R(n) est vraie. Montrons qu'alors R(n + 1) est vraie.

On a : $\overline{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k} = \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}} = \left(\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}\right) \cup \overline{A_{n+1}}$, par la première loi de Morgan.

$= \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \cup \overline{A_{n+1}}$, par hypothèse de récurrence R(n).

On en déduit : $\overline{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A_k}$. Ceci signifie que R($n$+1) est vraie.

Ainsi, par récurrence, pour tout entier naturel n non nul , on a bien : $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$.

2. Appliquons la première formule de Morgan généralisée à la suite d'ensembles $\left(\overline{A_j}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

Nous obtenons : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\overline{A_k}}$. Ceci signifie que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

En passant au complémentaire, nous obtenons bien : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$.

⇨ *Méthode 2.5*

Exercice 2.4

Utilisons la **méthode 2.4**, pour obtenir des inclusions entre les différents ensembles.

- Puisque $A\cap C\subset C$, la relation $A\cup B = A\cap C$ donne alors $A\cup B\subset C$ ce qui implique $\begin{cases} B\subset C \\ A\subset C \end{cases}$ (**propriété 2.12**).
- Puisque $B\cap A\subset A$, la relation $B\cup C = B\cap A$ donne alors $B\cup C\subset A$, ce qui implique $\begin{cases} B\subset A \\ C\subset A \end{cases}$ (**propriété 2.12**).
- Enfin, puisque $C\cap B\subset B$, la relation $C\cup A = C\cap B$ donne alors $C\cup A\subset B$, ce qui implique $\begin{cases} C\subset B \\ A\subset B \end{cases}$ (**propriété 2.12**).

Ces six relations nous permettent de conclure, par double inclusion, que $A = B = C$.

⇨ *Méthode 2.4*

Exercice 2.5

1. Considérons $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2\}$ et $C=\{0,2\}$. On a $A\cup B = A\cup C = \{0,1,2\}$ mais $B\neq C$.

2. Considérons $A=\{0\}$, $B=\{0,1,2\}$ et $C=\{0,2\}$. On a $A\cap B = A\cap C = \{0\}$ mais $B\neq C$.

Exercice 2.6

• L'application $g\circ f$ est bien définie car l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g (les réels du type $f(x)$ sont bien positifs).

Pour tout réel x, on a : $(g\circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.

• L'application $f \circ g$ est bien définie car l'ensemble d'arrivée de g (qui est $\mathbb{R}_+$) est inclus dans l'ensemble de départ de f (qui est $\mathbb{R}$).

Pour tout réel x positif, on a : $(f \circ g)(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{x}{1+x}$.

Remarque. Comme annoncé au début de l'énoncé, on a : $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

⇨ *Méthode 2.6*

Exercice 2.7

Soit y élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tel que $y = f(x)$.

On a les équivalences suivantes :

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = 1-x \Leftrightarrow y+xy = 1-x \Leftrightarrow x+xy = 1-y \Leftrightarrow x(1+y) = 1-y$.

Comme y est différent de -1, on a une seule solution : $x = \dfrac{1-y}{1+y}$.

Ceci prouve que f est bien une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

De plus, on a : $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{1-y}{1+y}$.

Conclusion : f est bijective et $f^{-1} = f$.

⇨ *Méthode 2.7*

Exercice 2.8

Soit y un élément de $[-9/4, +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 + 3x \Leftrightarrow x^2 + 3x - y = 0$.

On a une équation du second degré d'inconnue x et de discriminant : $\Delta = 9 + 4y$. Comme y est supérieur ou égal à $-\dfrac{9}{4}$, Δ est supérieur ou égal à 0. Le discriminant est positif donc l'équation possède une ou deux solutions : $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{9+4y}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{9+4y}}{2}$ ($x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$).

Seule la première de ces solutions est dans $[-3/2, +\infty[$ donc l'équation $y = f(x)$ a une seule solution (x_1) et f est bien une bijection de $[-3/2, +\infty[$ vers $[-9/4, +\infty[$.

Pour conclure, la bijection réciproque de f est la fonction de $[-9/4, +\infty[$ vers $[-3/2, +\infty[$, qui à tout y de $[-9/4, +\infty[$ associe $f^{-1}(y) = \dfrac{-3+\sqrt{9+4y}}{2}$.

⇨ *Méthode 2.7*

Chapitre 3

Calculs numériques Calculs littéraux

UN MATHÉMATICIEN



Le mathématicien et astronome indien **Brahmagupta** a développé des méthodes très sophistiquées en arithmétique. C'est dans ses écrits que l'on rencontre pour la première fois l'usage du zéro et de nombres négatifs et il manie les racines carrées avec habileté. Il résout des équations du premier et même du second degré. C'est à son époque que l'on voit apparaitre la numération de position en base 10 mais il ne semble pas en être l'initiateur.

Un peu d'histoire

Les Sumériens et les Babyloniens avaient déjà élaboré des méthodes de calcul, surprenantes pour l'époque.

La numération de position, inventée par les Indiens vers le VI^{e} siècle puis généralisée par les Arabes, s'introduit lentement en Occident à la fin du Moyen-Âge ; elle permet d'élaborer des algorithmes pour les opérations simples. L'introduction des logarithmes au tout début du XVII^{e} siècle a permis d'effectuer des calculs sur des très grands nombres, ce qui a entrainé de spectaculaires progrès en astronomie.

L'émergence de l'informatique, en particulier des tableurs, mais aussi l'arrivée des calculatrices de poche, ont modifié totalement notre rapport au calcul, mais pourtant, un bon maniement du calcul mental reste un garde-fou salutaire pour éviter des erreurs.

Objectifs

les incontournables

- Savoir gérer les parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions.
- Connaître les règles de priorité.
- Savoir développer et factoriser.
- Savoir ajouter et multiplier les fractions.
- Savoir utiliser les identités remarquables.
- Savoir manipuler les puissances.

et plus si affinités

- Savoir factoriser des expressions compliquées.
- Savoir manipuler les puissances avec des fractions.

■■ Résumé de cours

■ Opérations sur les nombres réels

❑ Addition

Définition 3.1. — Le réel noté $a+b$ est la *somme* de a et b. Les réels a et b s'appellent les *termes* de la somme.

Propriété 3.1. — L'addition est *commutative*, ce qui signifie que, si a et b sont deux réels, on a : $a+b=b+a$.

Propriété 3.2. — L'addition est *associative*, ce qui signifie que, si a, b et c sont des réels, on a : $(a+b)+c=a+(b+c)$. On note alors cette somme plus simplement : $a+b+c$.

Propriété 3.3. — Le nombre 0 est appelé *élément neutre* de l'addition, ce qui signifie que, pour tout réel a, on a : $a+0=0+a=a$.

Propriété 3.4. — Chaque réel a possède un *opposé*, noté $-a$, défini par :

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

❑ Soustraction

Définition 3.2. — Le réel noté $a-b$, défini par $a-b=a+(-b)$, est la *différence* de a et de b. Les réels a et b s'appellent les *termes* de la différence.

Remarque 3.1. — L'égalité $a-b=a+(-b)$ signifie que "soustraire", c'est "ajouter l'opposé".

Remarque 3.2. — La soustraction ne possède aucune des propriétés que possède l'addition.

Propriété 3.5. — Le réel $b-a$ est l'opposé du réel $a-b$. On a donc : $b-a=-(a-b)$.

Remarque 3.3. — En particulier (en faisant $b=0$), on a : $0-a=-a$.

Propriété 3.6. — Signe "–" devant une parenthèse.
Si a, b et c sont des réels, on a : $a-(b+c)=a-b-c$ et $a-(b-c)=a-b+c$.

Remarque 3.4. — Il n'y a aucun problème avec un signe "–" **derrière** une parenthèse donc, pour tout triplet (a, b, c) de réels, on a : $(a+b)-c=a+b-c$ et $(a-b)-c=a-b-c$.

⇨ **Méthode 3.1. Comment enlever les parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions ?**

❑ Multiplication

Définition 3.3. — Le réel noté $a \times b$, ou plus simplement ab, est le *produit* de a et b. Les réels a et b s'appellent les *facteurs* du produit.

Propriété 3.7. — La multiplication est *commutative*, ce qui signifie que, si a et b sont des réels, on a : $ab = ba$.

Propriété 3.8. — La multiplication est *associative*, ce qui signifie que, si a, b et c sont des réels, on a : $(ab)c = a(bc)$. On note alors ce produit plus simplement : abc.

Propriété 3.9. — Le nombre 1 est appelé *élément neutre* de la multiplication, ce qui signifie que, pour tout réel a, on a : $a \times 1 = 1 \times a = a$.

Propriété 3.10. — Chaque réel b **non nul** possède un *inverse*, noté $\frac{1}{b}$ ou b^{-1}, défini par :

$$b \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times b = 1$$

❑ Puissances

Définition 3.4. — Soit n un entier naturel non nul. Le réel noté a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a. On a donc : $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

On lit « a puissance n » ou bien « a exposant n ».
L'entier naturel n s'appelle l'exposant.

Remarque 3.5. — Par convention, on pose : $a^0 = 1$.

Propriété 3.11. — Si a et b sont des réels, on a, pour tout entier naturel n :

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Propriété 3.12. — Si n et p sont des entiers naturels, on a, pour tout réel a :

$$a^{n+p} = a^n a^p$$

Propriété 3.13. — Si n et p sont des entiers naturels, on a, pour tout réel a :

$$(a^n)^p = a^{np}$$

❑ Division

Définition 3.5. — Lorsque $b \neq 0$, le réel noté $\frac{a}{b}$, défini par $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, est le *quotient* de *a* par *b*. Le réel *a* s'appelle le *numérateur* et le réel *b* s'appelle le *dénominateur*.

Remarque 3.6. — L'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ signifie que "diviser", c'est "multiplier par l'inverse".

Propriété 3.14. — Pour tout réel *c* non nul, on a (toujours avec $b \neq 0$) : $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Définition 3.6. — Lorsque *a* et *b* sont des entiers, le réel $\frac{a}{b}$ est une *fraction*.

Propriété 3.15. — Addition et soustraction.

Si *a*, *b*, *c* et *d* sont des réels, avec *b* et *d* non nuls, on a : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$.

⇨ **Méthode 3.2. Comment ajouter ou soustraire des quotients ?**

Remarque 3.7. — Ces formules sont valables tout le temps, mais il y a souvent mieux à faire en trouvant le plus petit dénominateur commun aux deux fractions (voir la **méthode 3.2**).

Propriété 3.16. — Multiplication et division.

Si *a*, *b*, *c* et *d* sont des réels, avec *b* et *d* non nuls, on a : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

⇨ **Méthode 3.3. Comment multiplier ou diviser des quotients ?**

Définition 3.7. — Soit *p* un entier naturel.

Si le réel *b* n'est pas nul, l'inverse de b^p est noté b^{-p}. On a donc, par définition : $b^{-p} = \frac{1}{b^p}$.

Propriété 3.17. — Soit *n* un entier naturel. Si *a* et *b* sont deux réels, avec $b \neq 0$, on a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Propriété 3.18. — Soit *n* et *p* deux entiers naturels. Pour tout réel *a* non nul, on a :

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

Remarque 3.8. — L'**exercice 3.18** propose des manipulations sur les puissances de 10.

Remarque 3.9. — Les **propriétés 3.11** à **3.13**, ainsi que **3.17** et **3.18**, restent valables avec des exposants négatifs, pourvu que *a* et *b* soient différents de 0.

■ Expressions numériques et littérales

❑ Règles de priorité

Propriété 3.19. — Les parenthèses, **quand on peut les calculer**, sont prioritaires devant les puissances, les produits, les quotients, les sommes et les différences.

Exemple 3.1. — On a $(3+2)y = 5y$, mais on ne peut pas réduire $(3+2x)y$.

Propriété 3.20. — En l'absence de parenthèses, on effectue, **quand on le peut**, les puissances avant les produits et les quotients.

Exemple 3.2. — On a : $8\times 5^3 = 8\times 125 = 1000$ (et non pas $40^3 = 64\,000$).
On ne peut pas transformer l'expression $8x^3$, sauf à écrire, grâce à la **propriété 3.11**, que : $8x^3 = (2x)^3$, ce qui est très pratique ici : $8\times 5^3 = (2\times 5)^3 = 10^3 = 1000$.

Propriété 3.21. — En l'absence de parenthèses, on effectue, **quand on le peut**, les produits et les quotients avant les sommes et les différences.

Exemple 3.3. — On a : $3+2\times 5 = 3+10 = 13$ (et non pas 5×5, c'est-à-dire 25)
On ne peut pas transformer l'expression $3+2x$ (elle n'est pas égale à $5x$).

⇨ **Méthode 3.4. Comment utiliser les règles de priorité ?**

Remarque 3.10. — L'addition et la soustraction ont le même niveau de priorité.

❑ Distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction

Définition 3.8. — *Développer*, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence) et *factoriser*, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

Propriété 3.22. — La multiplication est distributive sur l'addition, ce qui signifie que, si a, b et c sont trois réels, on a : $a(b+c) = ab+ac$ et $(b+c)a = ba+ca$.

⇨ **Méthode 3.5. Comment utiliser la distributivité ?**

Exemple 3.4. — On a : $(3+2x)y = 3y+2xy$. On dit que l'on a développé $(3+2x)y$.

Remarque 3.11. — La multiplication est aussi distributive sur la soustraction (qui n'est qu'une addition déguisée). On a donc : $a(b-c) = ab-ac$ et aussi $(b-c)a = ba-ca$.

❑ Identités remarquables

Propriété 3.23. — Si a et b sont deux réels, on a :
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

⇨ **Méthode 3.6. Comment reconnaître une identité remarquable ?**

■■ Méthodes

■ Opérations sur les nombres réels

❑ Méthode 3.1. Comment enlever les parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions ?

Il faut repérer le signe qui **précède** la parenthèse que l'on veut supprimer :
• Si c'est un signe +, on la supprime sans rien changer de ce qui se trouve dans la parenthèse.
• Si c'est un signe –, il faut changer tous les signes de ce qui se trouve dans la parenthèse (comme si on "distribuait" le signe –).

⇨ Exercices 3.2, 3.8

Exemple 1. Simplifier $A = x - 1 + (1 - x)$.
La parenthèse étant précédée du signe +, on est tranquille et on a : $A = x - 1 + 1 - x = 0$.

Exemple 2. Simplifier $B = x - 1 - (1 - x)$.
La parenthèse étant précédée du signe –, on fait attention et on obtient :
$B = x - 1 - 1 + x = x + x - 1 - 1 = 2x - 2$.

❑ Méthode 3.2. Comment ajouter ou soustraire des quotients ?

• On peut utiliser les formules passe-partout du cours :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ et } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

• Parfois, il est plus malin de trouver un meilleur dénominateur commun que bd en cherchant un multiple commun à b et à d qui soit plus petit que bd. On utilise ensuite la **propriété 3.14** pour simplifier s'il y a lieu.
Remarque. Faire très attention à un signe "–" devant une fraction, il faut agir comme avec un signe "–" devant une parenthèse : en effet, la barre de fraction indique une priorité comme le fait une parenthèse (voir l'**exemple 3**).

⇨ Exercices 3.3, 3.5, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16

Exemple 1. Calculer $A = \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$.
On choisit 35 comme dénominateur commun (il n'y a pas plus simple). On a alors :
$A = \frac{7 \times 3}{7 \times 5} + \frac{5 \times 2}{5 \times 7} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{31}{35}$.

Exemple 2. Calculer $B = \frac{3}{4} + \frac{11}{6}$.

Ici, un dénominateur commun est si l'on veut 4×6, soit 24, mais il y a mieux, avec 12, qui est multiple commun de 4 et de 6. On a alors : $B = \frac{3\times 3}{3\times 4} + \frac{2\times 11}{2\times 6} = \frac{9}{12} + \frac{22}{12} = \frac{31}{12}$.

Remarque. Si l'on avait choisi 24 comme dénominateur commun, on aurait trouvé $\frac{62}{24}$ et il aurait fallu simplifier par 2 pour finir.

Exemple 3. Calculer $C = \frac{n+1}{2} - \frac{2n+3}{10}$.

On choisit 10 (plutôt que 20) comme dénominateur commun et l'on a, en faisant attention au signe – devant la barre de fraction du deuxième terme (d'où l'apparition de parenthèses autour de $2n+3$, tout de suite après la deuxième égalité ci-dessous) :

$$C = \frac{5(n+1)}{10} - \frac{2n+3}{10} = \frac{5(n+1)-(2n+3)}{10} = \frac{5n+5-2n-3}{10} = \frac{3n+2}{10}.$$

❑ Méthode 3.3. Comment multiplier ou diviser des quotients ?

Les formules du cours sont incontournables et faciles d'utilisation :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ et } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Pour la division, se souvenir que "diviser", c'est "multiplier par l'inverse".
Remarque. Il faut le plus possible simplifier les fractions en présence afin d'éviter de manipuler des expressions trop importantes (voir **exemple 2** et **exemple 3**).

⇨ **Exercices 3.4, 3.5, 3.6, 3.13, 3.14, 3.15**

Exemple 1. Calculer $A = 3\times\frac{5}{4}$.

On écrit $A = \frac{3}{1}\times\frac{5}{4} = \frac{3\times 5}{1\times 4} = \frac{15}{4}$.

Exemple 2. Calculer le nombre B égal aux deux tiers de $\frac{3}{4}$.

On a : $B = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{2\times 3}{3\times 4} = \frac{2\times 3}{3\times 2\times 2} = \frac{1}{2}$ (la dernière égalité s'obtient après avoir simplifié par 6).

Exemple 3. Calculer $C = \dfrac{\dfrac{12}{25}}{\dfrac{18}{125}}$.

On a, d'après la formule du cours : $C = \dfrac{12}{25} \times \dfrac{125}{18} = \dfrac{12 \times 125}{25 \times 18} = \dfrac{2 \times 6 \times 25 \times 5}{25 \times 6 \times 3} = \dfrac{2 \times 5}{3} = \dfrac{10}{3}$.

L'avant-dernière égalité est obtenue en simplifiant la fraction par 6×25.

■ Expressions numériques et littérales

❑ Méthode 3.4. Comment utiliser les règles de priorité ?

Avant d'agir, il faut bien observer où sont les priorités, c'est-à-dire ne pas se laisser embarquer à lire de gauche à droite l'expression proposée en faisant les calculs dans cet ordre.

⇨ **Exercices 3.1, 3.5, 3.6**

Exemple 1. Calculer $A = 5 - 2 \times \dfrac{3}{7}$.

On commence par la multiplication (en se référant à l'**exemple 1** de la **méthode 3.3**). On doit donc comprendre que $A = 5 - \left(2 \times \dfrac{3}{7}\right)$. On a donc : $A = 5 - \dfrac{6}{7}$.

Ensuite, on réduit au même dénominateur : $A = \dfrac{35}{7} - \dfrac{6}{7} = \dfrac{29}{7}$.

Exemple 2. Calculer $B = 6^2 + 13 - 5 \times 2$.

Priorité à la puissance et à la multiplication (qui est séparée de la puissance). On trouve :
$B = 36 + 13 - 10 = 49 - 10 = 39$.

Exemple 3. Calculer $C = 2 + 3 \times 10^2 - 5 \times 10 + 8$.

Avec la même technique, on calcule d'abord 10^2 et 5×10 et on obtient :
$C = 2 + 3 \times 100 - 50 + 8$.

On finit en calculant le produit restant en premier, ce qui donne :
$C = 2 + 300 - 50 + 8 = 302 - 50 + 8 = 252 + 8 = 260$.

Exemple 4. Calculer $D = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 - 4 + 2 \times \dfrac{6}{5}$. En respectant les priorités, on trouve :

$D = \dfrac{9}{25} - 4 + \dfrac{12}{5} = \dfrac{9}{25} - \dfrac{100}{25} + \dfrac{60}{25} = \dfrac{-31}{25}$, ce que l'on peut écrire : $D = -\dfrac{31}{25}$.