

Jean-Marie Monier | Guillaume Haberer

l'intégrale

MATHS

PCSI-PTSI

TOUT LE 1^{er} SEMESTRE

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture :
Nicolas Weil - Elizabeth Riba (graphiste)

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

© Dunod, 2024
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-087531-3

Table des matières

1 – Logique, ensembles	1	18 – Fonctions hyperboliques	211
2 – Ensembles de nombres usuels	14	19 – Fonctions circulaires réciproques	218
3 – Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	30	20 – Calculs de primitives	230
4 – Applications, fonctions	40	21 – Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre	248
5 – Sommes, produits	56	22 – Équations différentielles linéaires du 2 nd ordre	259
6 – Premier degré	68	23 – Suites numériques : généralités, suites remarquables	272
7 – Second degré	79	24 – Suites numériques : convergence, divergence	285
8 – Racines carrées, racines n -ièmes	90	25 – Fonctions : limites	304
9 – Valeur absolue	101	26 – Fonctions : continuité	316
10 – Partie entière	110	27 – Fonctions : dérivation	330
11 – Trigonométrie	116	28 – Fonctions : convexité	353
12 – Nombres complexes : algèbre	128	29 – Calcul matriciel	359
13 – Nombres complexes : trigonométrie	142	30 – Systèmes linéaires	382
14 – Nombres complexes : géométrie	152	31 – Polynômes : algèbre	391
15 – Fonctions : généralités	161	32 – Polynômes : racines	408
16 – Calculs de dérivées	182	33 – Fractions rationnelles	415
17 – Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances	198		

Avant-propos

Cet ouvrage traite intégralement le programme du premier semestre de Mathématiques des classes de PCSI et PTSI, ces deux classes ayant quasi exactement le même programme sur cette période.

Il s'adresse aux élèves qui viennent d'entrer en PCSI ou PTSI.

Ils y trouveront les bases théoriques et le vocabulaire des ensembles dans les chapitres 1 à 4, et tout ce qui leur est nécessaire pour réviser et maîtriser les calculs usuels dans les chapitres 5 à 14.

Les élèves trouveront ensuite dans chacun des chapitres suivants une aide précieuse pour l'assimilation du cours et l'apprentissage des méthodes de résolution d'exercices, constituant un soutien solide pour leur travail tout au long du premier semestre.

Chaque chapitre est constitué de trois parties : cours, exercices d'apprentissage et exercices d'entraînement.

Le cours est détaillé, sans les démonstrations. Le programme officiel est exactement respecté. Chaque notion ou propriété est illustrée par des exemples et des contre-exemples. Des remarques répondent souvent par avance aux questions que l'élève pourrait logiquement se poser. De nombreuses figures permettent de mieux visualiser les situations.

Les nombreux exercices, de niveau très facile à facile, permettent à l'élève de mieux assimiler le cours et de l'appliquer dans des contextes classiques. Chaque énoncé d'exercice est suivi de son corrigé détaillé.

Les chapitres sont volontairement plus courts que dans un manuel, ce qui permet à l'élève de faire assez rapidement le tour des notions envisagées de façon à passer ensuite aux exercices en un temps raisonnable. Nous conseillons aux élèves un travail régulier, dès l'amorce en classe du chapitre concerné.

Les auteurs remercient Emmanuelle Chatelet et Brice Martin, des éditions Dunod, sans qui cet ouvrage n'aurait pu voir le jour.

Depuis le début du xx^e siècle, l'utilisation du vocabulaire de la théorie des ensembles a permis de clarifier, simplifier, unifier toutes les mathématiques. Depuis de nombreuses années, ce vocabulaire s'est fixé et est devenu la langue universelle de tous ceux et celles qui font des mathématiques. Son emploi induit des modes de raisonnement simples, clairs, généraux, et l'étudiant ou l'étudiante en mathématiques peut ainsi cheminer sur une voie sûre.

Le but est ici d'exposer un vocabulaire et des propriétés utilisables et utilisés dans tous les domaines des mathématiques, sans masquer inutilement la puissance de leur généralité, mais également sans développement stérile.

Rappels de cours

1 Logique

Définition

Une **assertion** (ou aussi : affirmation) p , correctement exprimée, peut être **vraie** ou **fausse**, l'un des deux mais pas les deux simultanément.

Une **table de vérité** consigne ces deux possibilités, dans laquelle on note V pour vrai et F pour faux, ou encore 1 pour vrai et 0 pour faux :

p
V
F

Les deux lignes correspondent aux deux possibilités pour l'assertion p .

Définition

Une **proposition** (ou aussi : théorème, ou aussi : propriété) est une assertion vraie.

Définition

La **négation** d'une assertion p est l'assertion notée (non p) (ou : $\neg p$), définie par la table de vérité suivante :

p	non p
V	F
F	V

Définition

Les connecteurs logiques

conjonction « et » (ou aussi : $\wedge$), **disjonction** « ou » (ou aussi : $\vee$),
implication « $\implies$ », **équivalence logique** « $\iff$ »,
sont définis, pour deux assertions p, q , par les tables de vérité suivantes :

p	q	p et q	p ou q	$p \implies q$	$p \iff q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Les quatre lignes correspondent aux quatre possibilités pour les assertions p, q .

On note aussi $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$, et même (p, q) , pour $p \wedge q$.

Par exemple, $(x = 1, y = 2)$ signifie : $x = 1$ et $y = 2$.

Dans l'implication « $p \implies q$ », p s'appelle l'**hypothèse**, q s'appelle la **conclusion**.
Lorsque l'implication « $p \implies q$ » est vraie, on dit aussi que :

- p **entraîne** q ;
- p **implique** q ;
- **si** p est vraie **alors** q est vraie ;
- pour que p soit vraie il **faut** que q soit vraie ;
- pour que q soit vraie il **suffit** que p soit vraie ;
- p est une **condition suffisante** pour q ;
- q est une **condition nécessaire** de p .

Lorsque l'équivalence logique « $p \iff q$ » est vraie, on dit aussi que :

- p est **équivalente** à q ;
- p est logiquement équivalente à q ;
- p et q sont équivalentes ;
- p et q sont logiquement équivalentes ;
- pour que p soit vraie il **faut et il suffit** que q soit vraie ;
- p est une **condition nécessaire et suffisante** (CNS) pour q ;
- p est vraie **si et seulement si** q est vraie, ou encore : p si et seulement si q .

Deux assertions sont logiquement équivalentes si et seulement si elles sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses.

L'implication « $q \Rightarrow p$ » est appelée la **réci-proque** de l'implication « $p \Rightarrow q$ ».

Attention

Bien noter qu'une implication n'est pas équivalente à sa réciproque : il se peut que l'implication « $p \Rightarrow q$ » soit vraie et que sa réciproque « $q \Rightarrow p$ » soit fausse. Par exemple, si un nombre réel est positif ou nul, alors son carré est positif ou nul, mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple du nombre -1 , dont le carré est positif ou nul, mais -1 lui-même n'est pas positif ou nul.

Proposition

Les assertions suivantes sont toujours vraies, quelles que soient les valeurs de vérité (vrai ou faux) des assertions p, q, r qui interviennent :

$$\begin{aligned} (p \text{ ou } p) &\Longleftrightarrow p, & (p \text{ et } p) &\Longleftrightarrow p, & p \text{ ou } (\text{non } p), & \text{non}(p \text{ et } (\text{non } p)), \\ p \Rightarrow p, & p \Longleftrightarrow p, & (\text{non}(\text{non } p)) &\Longleftrightarrow p, \\ ((p \text{ et } q) \text{ et } r) &\Longleftrightarrow (p \text{ et } (q \text{ et } r)), & ((p \text{ ou } q) \text{ ou } r) &\Longleftrightarrow (p \text{ ou } (q \text{ ou } r)), \\ (p \Rightarrow q) &\Longleftrightarrow ((\text{non } p) \text{ ou } q), & (p \Rightarrow q) &\Longleftrightarrow ((\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)), \\ (p \text{ et } (p \Rightarrow q)) &\Rightarrow q, & (\text{non}(p \Rightarrow q)) &\Longleftrightarrow (p \text{ et } (\text{non } q)). \end{aligned}$$

Définition

L'implication « $(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)$ » est appelée la **contraposée** (ou aussi : contre-apposée) de l'implication « $p \Rightarrow q$ », et ces deux implications sont équivalentes.

Attention

Ne pas confondre réciproque et contraposée.

Exemple

À titre d'exemple, démontrons, par une table de vérité, le théorème

$$(\text{non } (p \Rightarrow q)) \Longleftrightarrow (p \text{ et } (\text{non } q)) :$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\text{non } (p \Rightarrow q)$	$\text{non } q$	$p \text{ et } (\text{non } q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F



Puisque les deux assertions $(\text{non } (p \Rightarrow q))$, $(p \text{ et } \text{non } q)$ ont la même table de vérité, elles sont logiquement équivalentes.

Pour établir qu'une assertion p est vraie, surtout lorsque p s'exprime grammaticalement à l'aide d'une négation, on peut essayer de **raisonner par l'absurde** : on suppose que p est fausse, et on déduit que cela entraîne une contradiction, c'est-à-dire une assertion fausse.

Exemple

Dans le plan, soient D, D' deux droites parallèles entre elles, Δ une troisième droite. Montrer que si Δ est sécante à D (c'est-à-dire telle que D et Δ ont exactement un point commun), alors Δ est sécante à D' .

Raisonnons par l'absurde : supposons Δ non sécante à D' . Alors, puisque Δ et D' sont dans le même plan, Δ est parallèle à D' . Ainsi, D est parallèle à D' (par hypothèse), et Δ est parallèle à D' , donc (cours de géométrie) D est parallèle à Δ , contradiction. Ce raisonnement par l'absurde montre que Δ est sécante à D' .

2 Ensembles

2.1 Ensembles, sous-ensembles

Définition

Lorsqu'un objet x est un **élément** d'un ensemble E , on note $x \in E$, et, lorsque x n'est pas un élément de E , on note $x \notin E$.

Exemple

$-4 \in \mathbb{Z}$, $-4 \notin \mathbb{N}$.

Définition

On note $\emptyset$ l'ensemble vide, qui n'a aucun élément.

Définition

Pour tout objet x , on note $\{x\}$ le **singleton** formé de x tout seul, c'est-à-dire l'ensemble ne contenant que x .

Le quantificateur universel $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit ».

Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « il existe au moins un élément ».

La notation $\exists!$ signifie : il existe un élément et un seul.

Si $p(x)$ est une assertion portant sur un élément x d'une ensemble E , la notation $(\nexists x \in E, p(x))$ signifie qu'il n'existe pas de $x \in E$ tel que $p(x)$, et revient donc à $\text{non}(\exists x \in E, p(x))$, ou encore à $(\forall x \in E, \text{non } p(x))$.

La lettre affectée par un quantificateur est **muette** : elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre (n'ayant pas, par ailleurs, déjà une signification); par exemple, si P est une assertion portant sur un élément d'un ensemble E :

$$\begin{aligned} (\forall x \in E, P(x)) &\iff (\forall y \in E, P(y)), \\ (\exists x \in E, P(x)) &\iff (\exists U \in E, P(U)). \end{aligned}$$

Une assertion est dite quantifiée lorsqu'elle comporte au moins un quantificateur.

La négation d'une assertion quantifiée est obtenue en changeant chaque $\forall$ en $\exists$, chaque $\exists$ en $\forall$, et en remplaçant l'assertion finale par sa négation; par exemple :

$$(\text{non}(\forall x \in E, P(x))) \iff (\exists x \in E, \text{non } P(x))$$

$$(\text{non}(\exists x \in E, P(x))) \iff (\forall x \in E, \text{non } P(x))$$

Toute assertion quantifiée commençant par « $\exists x \in \emptyset$ » est fausse.

Toute assertion quantifiée commençant par « $\forall x \in \emptyset$ » est vraie.

Dans une assertion quantifiée, on ne peut pas, a priori, modifier l'ordre des quantificateurs.

Par exemple, l'assertion « $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y$ » est vraie, comme on le voit en prenant, par exemple, $y = x + 1$, mais l'assertion « $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \leq y$ », obtenue en permutant $\forall x \in \mathbb{N}$ et $\exists y \in \mathbb{N}$, est fausse, car il n'existe pas d'entier y fixé (indépendant de tout x) tel que y soit plus grand que tout entier x .

Cependant, si les ensembles E et E' sont fixés et indépendants l'un de l'autre :

- on peut remplacer « $\forall x \in E, \forall x' \in E'$ » par « $\forall x' \in E', \forall x \in E$ »,
ou encore par « $\forall (x, x') \in E \times E'$ » ;
- on peut remplacer « $\exists x \in E, \exists x' \in E'$ » par « $\exists x' \in E', \exists x \in E$ »,
ou encore par « $\exists (x, x') \in E \times E'$ ».

Définition

Étant donné deux ensembles E, F , on dit que E est **inclus** dans F (ou aussi : E est un **sous-ensemble** de F ; ou aussi : E est une **partie** de F ; ou aussi : F contient E), et on note $E \subset F$ (ou aussi : $F \supset E$), si et seulement si : $\forall x \in E, x \in F$.

Exemple

- 1) L'ensemble $\{1, 2\}$ est une partie de $\mathbb{N}$.
- 2) L'ensemble $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{R}$.
- 3) L'ensemble $\{-1, 1\}$ n'est pas une partie de $\mathbb{N}$.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E .

Exemple

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

On remarque que : $(A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E), \quad (\{x\} \in \mathcal{P}(E) \iff x \in E).$

On note $E \subsetneq F$ pour : $E \subset F$ et $E \neq F$.

On note $E \not\subset F$ la négation de $E \subset F$, c'est-à-dire : $\exists x \in E, x \notin F$.

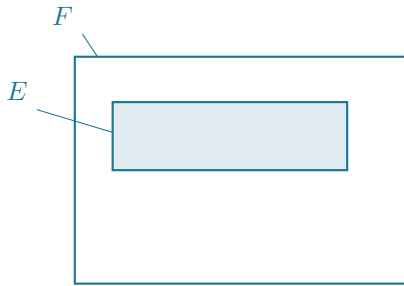
Attention

Ne pas confondre $E \subsetneq F$ et $E \not\subset F$.

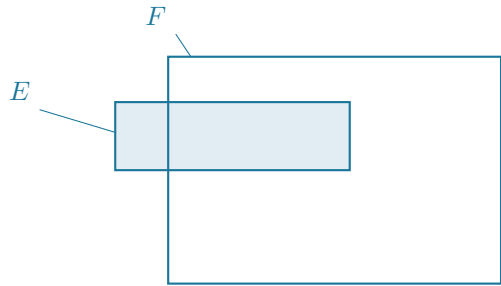
Exemple

- 1) On a $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$ mais on n'a pas $\{1, 2\} \not\subset \{1, 2, 3\}$.
- 2) On a $\{1, 2\} \not\subset \{1, 3\}$ mais on n'a pas $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 3\}$.

3) Sur des schémas (diagrammes de Venn) :



Exemple dans lequel
 $E \subsetneq F$
 (E est inclus dans F
 et E est différent de F)



Exemple dans lequel
 $E \not\subset F$
 (E n'est pas inclus dans F)

On a, pour deux ensembles E, F : $E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$,

et donc : $E \neq F \iff (E \not\subset F \text{ ou } F \not\subset E)$

$\iff ((\exists x \in E, x \notin F) \text{ ou } (\exists y \in F, y \notin E))$.

Les propriétés suivantes, pour tous ensembles E, F, G , sont immédiates :

$\emptyset \subset E$, $E \subset E$, $(E \subset F \text{ et } F \subset G) \implies E \subset G$.

2.2 Opérations sur les ensembles

Définition

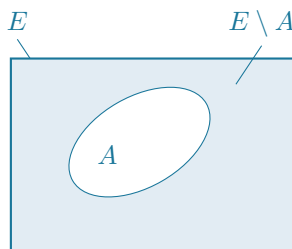
Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit les parties suivantes de E :

$\overline{A} = E \setminus A = A^c = \complement_E(A) = \{x \in E; x \notin A\}$, **complémentaire** de A dans E ,

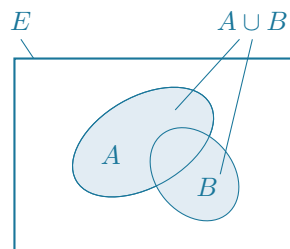
$A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$, **réunion** (ou aussi : union) de A et B ,

$A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$, **intersection** de A et B ,

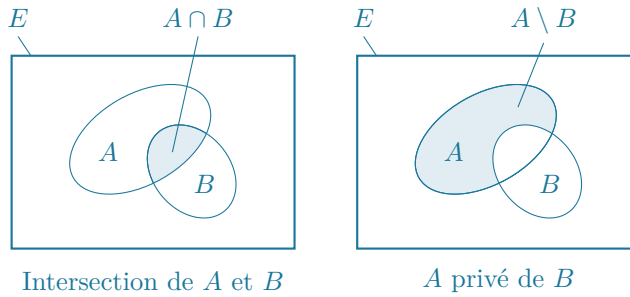
$A \setminus B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}$, **différence**, A **privé de** B .



Complémentaire
 de A dans E



Réunion de A et B



Attention

Ne pas confondre, pour une partie A d'un ensemble E , la notation $\overline{A}$, complémentaire de A dans E , et la même notation $\overline{A}$ dans l'étude des espaces vectoriels normés, qui désigne l'adhérence de A dans E .

Si F, G sont des ensembles (et pas seulement, comme plus haut, des parties d'un même ensemble), on admet qu'on peut définir $F \cup G$, $F \cap G$, $F \setminus G$, $F \triangle G$ de façon analogue à celle vue ci-dessus.

Exemple

1) Pour $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{2, 4\}$, on a :

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E \cap F = \{2\}, \quad E \setminus F = \{1, 3\}, \quad F \setminus E = \{4\}, \quad E \triangle F = \{1, 3, 4\}.$$

2) Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]0; 2]$, $B = [1; 3]$, on a :

$$A \cup B =]0; 3], \quad A \cap B = [1; 2], \quad A \setminus B =]0; 1[, \quad B \setminus A =]2; 3], \quad A \triangle B =]0; 1[\cup]2; 3].$$

3) Pour $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{N}$, on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}_+, \quad A \cap B = \mathbb{N}, \quad A \setminus B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n; n+1[= A \triangle B, \quad B \setminus A = \emptyset,$$

en utilisant une notation désignant la réunion d'une infinité d'ensembles.

Remarque : Pour définir un objet à partir d'autres objets déjà définis, on peut utiliser la notation « $:=$ ». Par exemple, au lieu de « Pour $E = \{1, 2, 3\}$ », on peut écrire : « $E := \{1, 2, 3\}$ ».

Définition

Deux ensembles F, G sont dits **disjoints** si et seulement si $F \cap G = \emptyset$.

Exemple

1) Les ensembles $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont disjoints.

2) Les ensembles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont disjoints.

3) Les ensembles $[0; 1]$ et $[1; 2]$ ne sont pas disjoints, car leur intersection est l'ensemble $\{1\}$, qui n'est pas vide.

Attention

Ne pas confondre disjoints (c'est-à-dire $E \cap F = \emptyset$) et distincts (c'est-à-dire $E \neq F$).

On dispose des propriétés suivantes, pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E :

Proposition

$$\begin{aligned} \emptyset &= E, \quad \overline{E} = \emptyset, \quad \overline{\overline{A}} = A, \quad A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}, \\ A \cup \emptyset &= A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup E = E, \quad A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ A \cap \emptyset &= \emptyset, \quad A \cap A = A, \quad A \cap E = A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Il pourra être utile de remarquer : $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \overline{B} \iff B \subset \overline{A}$.

2.3 Partitions d'un ensemble

Définition

On appelle **partition** d'un ensemble E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telles que :

- $\forall i \in I, \quad A_i \neq \emptyset,$
- $\forall (i, j) \in I^2, \quad (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset),$
- $\forall x \in E, \quad \exists i \in I, \quad x \in A_i.$

Autrement dit, la famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E est une partition de E si et seulement si les A_i sont toutes non vides, deux à deux disjointes, et de réunion égale à E .

La notion de famille sera vue dans le chapitre 3.

Exemple

- 1) La famille $(\mathbb{R}_-, \{0\}, \mathbb{R}_+)$ est une partition de $\mathbb{R}$.
- 2) La famille $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-)$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$, car $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\} \neq \emptyset$.
- 3) La famille $(\mathbb{R}_-, \emptyset, \mathbb{R}_+)$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$, car elle contient l'élément $\emptyset$.
- 4) La famille $(\mathbb{R}_-,]0; 2])$ n'est pas une partition de $\mathbb{R}$, car la réunion des éléments de cette famille n'est pas égale à $\mathbb{R}$.

Nous retrouverons la notion de partition lors de l'étude d'une relation d'équivalence, dans le chapitre 2.

2.4 Produits cartésiens d'ensembles

Définition

Pour deux éléments x, y , on appelle **couple** (x, y) la liste ordonnée formée par x puis y .

Exemple

On peut considérer le couple $(-1, 2)$, le couple $(1, 1)$, le couple $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition

On a, pour tous couples $(x, y), (a, b)$:

$$(x, y) = (a, b) \iff (x = a \text{ et } y = b)$$

Définition

Pour des ensembles E, F , on appelle **produit cartésien** $E \times F$ de E par F l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \in E, y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y); x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Le produit cartésien $E \times E$ est souvent noté E^2 .

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de deux nombres réels.

En pratique, écrire « $\forall (x, y) \in E \times F, \dots$ », revient à écrire « $\forall x \in E, \forall y \in F, \dots$ ».

Définition

La notion de couple (x, y) se généralise en n -**uplet** $(x_1, \dots, x_n)$, et la notion de produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles se généralise en **produit cartésien** $E_1 \times \dots \times E_n$ de plusieurs ensembles :

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n); \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k \in E_k\}$$

Si $E_1 = \dots = E_n = E$, le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$ est noté E^n .

Exemple

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

Exercices d'apprentissage

1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair, et que n est impair si et seulement si n^2 est impair.

1) Montrons d'abord que si n est pair, alors n^2 est pair et que, si n est impair, alors n^2 est impair.

- Supposons n pair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

On a : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et $2k^2 \in \mathbb{N}$, donc n^2 est pair.

- Supposons n impair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

On a : $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, donc n^2 est impair.

2) Montrons maintenant les réciproques, en utilisant un raisonnement par l'absurde.

- Supposons que n^2 est pair.

Raisonnons par l'absurde : supposons que n n'est pas pair. Alors n est impair, donc, d'après 1), n^2 est impair, contradiction avec l'hypothèse n^2 pair.

Ce raisonnement par l'absurde montre que n est pair.

- Supposons que n^2 est impair.

Raisonnons par l'absurde : supposons que n n'est pas impair. Alors n est pair, donc, d'après a), n^2 est pair, contradiction avec l'hypothèse n^2 impair.

Ce raisonnement par l'absurde montre que n est impair.

1.2

Soient p, q, r des assertions. Montrer que l'assertion $((p \text{ ou } q) \implies r)$ est équivalente à l'assertion $(p \implies r) \text{ ou } (q \implies r)$.

On a :

$$\begin{aligned} ((p \text{ ou } q) \implies r) &\iff ((\text{non}(p \text{ ou } q)) \text{ ou } r) \iff (((\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)) \text{ ou } r) \\ &\iff (((\text{non } p) \text{ ou } r) \text{ et } ((\text{non } q) \text{ ou } r)) \\ &\iff ((p \implies r) \text{ et } (q \implies r)). \end{aligned}$$

1.3

Soient E, F des ensembles. Montrer : $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Nous allons montrer l'équivalence en montrant deux implications, un sens puis sa réciproque.

1) Supposons $E \subset F$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a alors $A \subset E$, puis $A \subset F$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(F)$.

Ceci montre : $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

2) Réciproquement, supposons $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Utilisons les singletons. Soit $x \in E$. On a alors $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$, puis, comme $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, on déduit $\{x\} \in \mathcal{P}(F)$, c'est-à-dire $\{x\} \subset F$, d'où $x \in F$.

Ceci montre : $E \subset F$.

1.4

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer : $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$.

Il est conseillé, dans les calculs, de partir de l'objet apparemment le plus compliqué. On a, en utilisant entre autres le complémentaire d'une intersection, la distributivité de l'intersection sur la réunion :

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \setminus B \\ (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = A \setminus B. \end{aligned}$$

Remarquons que les égalités demandées sont apparentes sur un diagramme de Venn.

1.5

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

a) $A \cap B = A \iff A \subset B$

b) $A \cup B = A \iff B \subset A$.

a) 1) Si $A \cap B = A$, alors $A = A \cap B \subset B$.

2) Réciproquement, on a toujours $A \cap B \subset A$, et, d'autre part, si $A \subset B$, alors, tout élément de A est dans A et dans B , donc $A \subset A \cap B$, d'où finalement $A \cap B = A$.

b) 1) Si $A \cup B = A$, alors $B \subset B \cup A = A \cup B$.

2) Réciproquement, on a toujours $A \subset A \cup B$, et, d'autre part, si $B \subset A$, alors tout élément de $A \cup B$ est dans A , donc $A \cup B \subset A$, d'où finalement $A \cup B = A$.

1.6

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Simplifier $\overline{(A \cap B) \cup \overline{A} \cup \overline{A \cup B}}$.

Plusieurs calculs sont possibles. On peut commencer, par exemple, par exprimer tous les complémentaires sur des parties plus simples, en utilisant les formules sur le complémentaire d'une réunion, le complémentaire d'une intersection, et la distributivité de l'intersection sur la réunion :

$$\begin{aligned} \overline{(A \cap B) \cup \overline{A} \cup \overline{A \cup B}} &= \overline{(A \cap B \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} = \overline{((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} \\ &= \overline{(\overline{A} \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)} \cup \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})} \\ &= \overline{(A \cup \overline{A}) \cap \overline{B}} = \overline{E \cap \overline{B}} = \overline{\overline{B}}. \end{aligned}$$

Exercices d'entraînement

1.7 Différences sur plusieurs ensembles

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Simplifier : $A \setminus (A \setminus B)$, $A \setminus (B \setminus A)$, $(A \setminus B) \setminus A$, $(A \setminus B) \setminus B$.

1.8 Équivalence logique entre des égalités d'ensembles

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer : $A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$.

1.9 Exemple de résolution d'une équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $B \subset A$.

Résoudre l'équation $A \cap X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1.10 Complémentaire d'un produit et produit des complémentaires

Soient E, F des ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$, $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E , $\overline{B}$ le complémentaire de B dans F , $\overline{A \times B}$ le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$.

Peut-on affirmer : $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$?

Corrigés des exercices d'entraînement

1.7

Exprimons toutes les différences d'ensembles par la définition, en nous ramenant à des complémentaires, intersections, réunions :

- $A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$
 $= A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$
 $= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B,$

- $A \setminus (B \setminus A) = A \cap \overline{(B \cap \overline{A})}$
 $= A \cap (\overline{B} \cup A) = A,$
- $(A \setminus B) \setminus A = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{A}$
 $= (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = \emptyset,$
- $(A \setminus B) \setminus B = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{B}$
 $= A \cap (\overline{B} \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A \setminus B.$

1.8

Plusieurs calculs sont possibles, et on peut, d'autre part, passer par les éléments.

1) On a :

$$\begin{aligned}
 A \cup B &= A \cup C \\
 \Leftrightarrow \overline{A \cup B} &= \overline{A \cup C} \\
 \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} &= \overline{A} \cap \overline{C} \\
 \Rightarrow A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\
 \Leftrightarrow (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\
 &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\
 \Leftrightarrow E \cap (A \cup \overline{B}) &= E \cap (A \cup \overline{C}) \\
 \Leftrightarrow A \cup \overline{B} &= A \cup \overline{C}.
 \end{aligned}$$

Ceci montre l'implication :

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

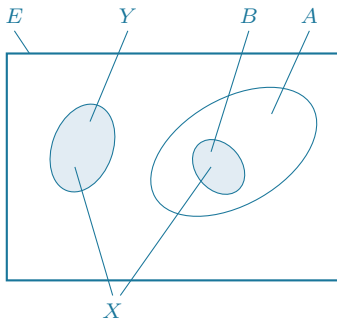
2) En appliquant le résultat de 1) à $(\overline{B}, \overline{C})$ à la place de (B, C) , on a :

$$\begin{aligned}
 A \cup \overline{B} &= A \cup \overline{C} \Rightarrow A \cup \overline{\overline{B}} = A \cup \overline{\overline{C}} \\
 &\Rightarrow A \cup B = A \cup C.
 \end{aligned}$$

On conclut :

$$A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

1.9



D'après le schéma, les solutions X de l'équation $A \cap X = B$ semblent être les parties X de la forme $X = B \cup Y$ où Y est une partie quelconque de E telle que $Y \subset \overline{A}$.

1) Soient $Y \subset \overline{A}$ et $X = B \cup Y$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 A \cap X &= A \cap (B \cup Y) \\
 &= (A \cap B) \cup (A \cap Y) = B \cup (A \cap Y)
 \end{aligned}$$

et, comme $Y \subset \overline{A}$, on a $A \cap Y \subset A \cap \overline{A} = \emptyset$, donc $A \cap Y = \emptyset$, d'où $A \cap X = B$, donc X est solution de l'équation $A \cap X = B$.

2) Réciproquement, soit $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \cap X = B$.

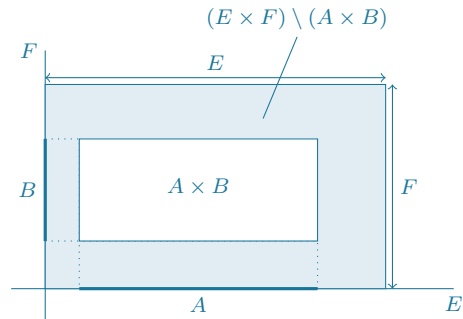
Considérons $Y = \overline{A} \cap X$.

On a alors $Y \subset \overline{A}$ et :

$$\begin{aligned}
 X &= E \cap X = (A \cup \overline{A}) \cap X \\
 &= (A \cap X) \cup (\overline{A} \cap X) = B \cup Y,
 \end{aligned}$$

donc X est de la forme $X = B \cup Y$ où $Y \subset \overline{A}$. On conclut que les solutions $X \in \mathcal{P}(E)$ de l'équation $A \cap X = B$ (où, par hypothèse, $B \subset A$) sont les parties X de E de la forme $X = B \cup Y$, où Y est une partie quelconque de E telle que $Y \subset \overline{A}$.

1.10



Sur un schéma correspondant à l'exemple où $E = F = \mathbb{R}$ et A, B sont des intervalles de $\mathbb{R}$, on voit que le complémentaire de $A \times B$ dans $E \times F$ n'est pas formé seulement de $\overline{A} \times \overline{B}$ et qu'il manque, par exemple, $A \times \overline{B}$. D'ailleurs, on peut montrer :

$$\overline{A \times B} = (A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (\overline{A} \times \overline{B}).$$

Donnons un contreexemple explicite :

Pour $E = F = \{0, 1\}$ et $A = B = \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \overline{A} &= \{1\}, \quad \overline{B} = \{1\}, \quad A \times B = \{(0, 0)\}, \\
 E \times F &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \\
 \overline{A \times B} &= \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \quad A \times \overline{B} = \{(1, 1)\},
 \end{aligned}$$

et donc $\overline{A \times B} \neq A \times \overline{B}$.

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ des entiers naturels est l'ensemble de nombres le plus simple, qui sert couramment à compter les objets. À partir de $\mathbb{N}$, on construit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, c'est-à-dire les entiers avec signe, puis l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les fractions d'entiers avec signes. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est le plus utile en Analyse, il contient $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a déjà été étudié dans les chapitres 11 à 13. On a : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$. Conformément au Programme officiel, nous admettons l'existence et l'unicité, à la notation près, de ces ensembles.

Rappels de cours

1 Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

1.1 Propriétés algébriques

Nous rappelons ici les propriétés usuelles des entiers naturels, supposées connues.

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ des **entiers naturels** est muni de deux lois internes, l'addition, notée $+$, la multiplication, notée $\cdot$ (ou aussi : $\times$, ou aussi par l'absence de symbole), qui vérifient les propriétés suivantes :

- $+$ est commutative, associative, admet un neutre noté 0
- $\cdot$ est commutative, associative, admet un neutre, noté 1
- $\cdot$ est distributive sur $+$
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}, (a + c = b + c \iff a = b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (ac = bc \iff a = b).$

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une relation d'ordre total, notée $\leq$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}, (a + c \leq b + c \iff a \leq b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}^*, (ac \leq bc \iff a \leq b)$
- toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément
- toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

On déduit les propriétés élémentaires suivantes :

- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, ((a \leq b \text{ et } c \leq d) \implies a + c \leq b + d)$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, ((a \leq b \text{ et } c \leq d) \implies ac \leq bd)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a, b \in \mathbb{N}, (a \leq b \iff a^n \leq b^n).$

1.2 Raisonnement par récurrence

1.2.1 Récurrence simple

On dispose du **théorème de récurrence** suivant :

Théorème

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé. Si une partie E de $\mathbb{N}$ vérifie

- $n_0 \in E$
 - et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $(n \in E \implies n + 1 \in E)$,
- alors $E = \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$.

Ce théorème se traduit en pratique de la façon suivante.

Proposition

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{H}_n$ une assertion dépendant d'un entier naturel $n \geq n_0$.

- Si $\mathcal{H}_{n_0}$ est vraie
 - et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dès que $\mathcal{H}_n$ est vraie, alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie,
- alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Autrement dit, si une assertion $\mathcal{H}_n$, dépendant d'un entier naturel n , est vraie pour un entier n_0 et si, dès qu'elle est vraie pour un entier quelconque n alors elle est vraie pour l'entier $n + 1$ suivant, alors cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

L'assertion $\mathcal{H}_{n_0}$ s'appelle l'**initialisation**, et la démonstration de l'implication $(\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1})$ s'appelle le **passage de récurrence**.

Quand on va faire un raisonnement par récurrence, il est conseillé :

- a) d'annoncer que l'on va faire une récurrence,
- b) de démontrer l'initialisation,
- c) de démontrer le passage de récurrence,
- d) de conclure.

Exemple

Montrons, par récurrence, le résultat classique : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

La formule est triviale pour $n = 1$.

Si la formule est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \underset{[HR_n]}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ce raisonnement par récurrence montre que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dès qu'il s'agit de démontrer qu'une propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (à partir d'un certain entier n_0), il faut envisager la possibilité de faire une récurrence, et, pour que cette récurrence ait une chance d'aboutir, il faut que l'on puisse faire un lien simple entre $\mathcal{H}_{n+1}$ et $\mathcal{H}_n$.

1.2.2 Récurrence à deux pas

Lorsque l'assertion $\mathcal{H}_{n+1}$ n'est pas simplement reliée à $\mathcal{H}_n$ mais qu'elle fait intervenir $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$, alors on peut essayer de faire un raisonnement par **récurrence à deux pas** (ou aussi : récurrence double) :

Proposition

- Si $\mathcal{H}_{n_0}$ et $\mathcal{H}_{n_0+1}$ sont vraies
- et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dès que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies, alors $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie, alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Remarque : Une récurrence à deux pas pour prouver l'assertion $\mathcal{H}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, revient à une récurrence (simple) sur l'assertion « $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ ».

Exemple

Montrer que la suite de Fibonacci, définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$, est à termes dans $\mathbb{N}$.

On fait une récurrence à deux pas.

Il est clair que la propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

Si, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, ϕ_n et ϕ_{n+1} sont dans $\mathbb{N}$, alors, par addition, $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$ est dans $\mathbb{N}$.

Ce raisonnement par récurrence à deux pas montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Récurrence forte

Il peut arriver que $\mathcal{H}_{n+1}$ ne dépende pas que de $\mathcal{H}_n$, et ne dépende pas que de $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$, mais dépende de tous les précédents, $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_n$. On peut alors essayer d'utiliser un raisonnement par **récurrence forte** :

Proposition

- Si $\mathcal{H}_{n_0}$ est vraie
- et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, dès que $\mathcal{H}_{n_0}, \dots, \mathcal{H}_n$ sont vraies, alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Remarque : Une récurrence forte pour prouver l'assertion $\mathcal{H}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, revient à une récurrence simple sur l'assertion « $\forall k \in \{n_0, \dots, n\}, \mathcal{H}_k$ ».

Exemple

Montrons un résultat du cours : tout entier ≥ 2 admet au moins un facteur premier. La propriété est triviale pour $n = 2$, puisque 2 est facteur premier de 2.

Supposons que, pour un $n \geq 2$ fixé, la propriété est vraie pour tout entier k de 2 à n . Si le nombre $n + 1$ est premier, alors il admet lui-même comme facteur premier.

Si $n + 1$ n'est pas premier, alors $n + 1$ admet au moins un diviseur entier a dans $\mathbb{N}^*$ autre que 1 et que $n + 1$, donc un diviseur a tel que $2 \leq a \leq n$. D'après l'hypothèse de récurrence forte, a admet au moins un facteur premier, et celui-ci est alors facteur premier de $n + 1$, donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence forte, que tout entier ≥ 2 admet au moins un facteur premier.

Pour l'étude de la divisibilité dans $\mathbb{N}$, voir le chapitre 29 sur l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

1.3 Analyse combinatoire

Proposition

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés **coefficients binomiaux** (à cause de la formule du binôme de Newton, cf. ci-après).

Remarque :

1) On a, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$.

2) On a, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$: $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p!}$.

3) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, le nombre $\binom{n}{p}$ est un entier naturel non nul.

On note, pour $p > n$ et pour $p < 0$: $\binom{n}{p} = 0$.

On dispose des propriétés suivantes :

Proposition

1) $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

2) $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

On place les $\binom{n}{p}$ sous forme d'un triangle, appelé **triangle de Pascal**, dans lequel