

M^a TERESA GONZÁLEZ MANTEIGA

400

**PROBLEMAS RESUELTOS
DE ESTADÍSTICA
MULTIDISCIPLINAR**



M^a TERESA GONZÁLEZ MANTEIGA

400

**PROBLEMAS RESUELTOS
DE ESTADÍSTICA
MULTIDISCIPLINAR**



Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

© M^a Teresa González Manteiga, 2021 (Versión papel)
© M^a Teresa González Manteiga, 2021 (Versión electrónica)

Reservados todos los derechos.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley ,cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (art.270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto de los citados derechos.

Ediciones Díaz de Santos
Email:ediciones@editdiazdesantos.com
www.editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-326-1 (Libro electrónico)
ISBN: 978-84-9052-267-7 (Libro en papel)

*A mis padres y a mi hermana,
a los que fueron mis profesores
y a mis alumnos*

ÍNDICE

Dedicatoria	V
Prólogo	IX
Capítulo 1. Fundamentos generales. Sucesos aleatorios. Combinatoria	1
Capítulo 2. Estadística Descriptiva Unidimensional. Estadística Descriptiva Bidimensional. Regresión. Correlación. Números Índices.....	33
Capítulo 3. PROBABILIDAD. Cálculo de Probabilidades. Probabilidad condicionada. Regla de Bayes. Aplicaciones. Especificidad y sensibilidad de una prueba en Medicina	99
Capítulo 4. Distribuciones de Probabilidad Discretas.....	133
Capítulo 5. Distribuciones de Probabilidad Continuas. Aproximaciones de Distribuciones Discretas. Distribuciones Conjuntas. Independencia de Variables Aleatorias. Intervalos de Probabilidad.....	185
Capítulo 6. INFERENCIA ESTADÍSTICA I. Estimación. Intervalos de Confianza	281
Capítulo 7. INFERENCIA ESTADÍSTICA II. Contrastes de Hipótesis Paramétricos.....	337
Capítulo 8. INFERENCIA ESTADÍSTICA III. Contrastes de Hipótesis No Paramétricos	403
Capítulo 9. INFERENCIA ESTADÍSTICA IV. ANOVA con un Factor de Variación. Contraste de Normalidad de Shapiro-Wilk. Contraste de Bartlett. Prueba de Kruskal-Wallis. Análisis de la Regresión Lineal Simple.....	509
Capítulo 10. INFERENCIA ESTADÍSTICA V. ANOVA y Análisis de Regresión con STATGRAPHICS	607
ANEXO. Tablas de las Distribuciones.....	689
Bibliografía y enlaces de Internet	719

PRÓLOGO

*“Cada uno de nosotros debe trabajar su propio
perfeccionamiento, aceptando,
en la vida general de la humanidad, su parte de responsabilidad,
ya que nuestro deber particular es el de ayudar a aquellos
a quienes podemos ser útiles”*

MARÍA SŁODOWSKA-CURIE
Premio Nobel de Física 1903 y
Premio Nobel de Química 1911

Las palabras de María Słodowska-Curie, y su ejemplo durante toda su vida, son un acicate no solo para nuestra propia formación sino también para la de aquellos que tengamos en nuestro entorno, de modo que unos a otros nos ayudemos y entre todos hagamos un mundo mejor.

Saber es hacer puede servir de introducción a este libro de *Problemas resueltos de Probabilidad y Estadística* destinado a estudiantes de los primeros cursos universitarios y a todos aquellos que necesiten apoyarse en la Estadística para aceptar o rechazar hipótesis de trabajo en sus investigaciones. Cualquiera que sea la disciplina científica, de la ingeniería o de las ciencias sociales, que trabaje con experimentos de tipo aleatorio y trate de confirmar una hipótesis de trabajo, a partir de unos datos recogidos, necesita los métodos estadísticos que permiten aceptar o rechazar esa hipótesis con alta probabilidad de acertar o, lo que es lo mismo, con riesgo muy bajo de equivocarse.

La Estadística es una de las ramas más recientes de las Matemáticas. Algunos rechazan su estudio, la ven complicada y como una barrera insalvable, porque intentan hablar un lenguaje del que desconocen hasta su alfabeto. En esta disciplina, como en muchas otras, el trabajo personal es fundamental. Decía Terencio: “No hay cosa tan difícil que a fuerza de estudiarla no parezca fácil” y también “No hay cosa por fácil que sea que no la haga difícil la mala gana”.

La metodología y las técnicas estadísticas se comprenden mejor haciendo ejercicios, planteando problemas, resolviéndolos e interpretando los resultados obtenidos. No se pueden improvisar ni inventar las conclusiones. Cuando se logra plantear un problema, resolverlo e interpretar los resultados, a todos nos gusta, se entiende el verdadero valor de la Estadística y se reconoce como una buena herramienta que es útil para la Ciencia en general, incluidas las Ciencias Sociales, y también para la Técnica.

Hoy vivimos en un mundo audiovisual. Los alumnos en la Universidad no toman o no saben tomar apuntes, utilizan el móvil y la *tablet* para todo, escriben poco y algunos mal y almacenan en la memoria de un portátil algunos archivos. De este modo les cuesta más entender y aplicar disciplinas como la Estadística. Todos hemos experimentado que lo que se oye se olvida fácilmente, lo que se ve se recuerda y lo que se hace se retiene por más tiempo, porque se entiende mejor. Sabemos que la lectura nos da una persona formada, el diálogo científico una persona preparada y la escritura una persona exacta. Decía

Balmes: “La lectura es como el alimento, el provecho no está en proporción de lo que se come, sino de lo que se digiere”.

La Estadística, como cualquier otra rama de las Matemáticas, tiene múltiples aplicaciones en campos muy diversos. Para poder aprovechar sus aplicaciones es necesario conocer la nomenclatura estadística y sus técnicas. Este libro de problemas resueltos pretende familiarizar al lector con las técnicas estadísticas y a la vez presentarle sus aplicaciones en distintos campos. El mejor modo de familiarizarse con la Probabilidad y con la Estadística, y la única forma de comprenderla, pasa por adquirir unas habilidades que solo se consiguen mediante la resolución de problemas. De esta forma se comprenden los conceptos teóricos y posteriormente cada uno lo puede aplicar en su campo de estudio y de trabajo. Este es el objetivo de este libro que se ha escrito después de muchos años dedicados a la docencia de la Estadística.

Para una mejor comprensión, cada capítulo comienza con una sucinta introducción teórica con nomenclatura, fórmulas y cuadros-resumen. Para profundizar en la teoría se recomienda consultar un libro de teoría. Muchos de los problemas que aquí aparecen totalmente resueltos con detalle fueron propuestos en el libro *Estadística Aplicada. Una visión instrumental*. Ed. Díaz de Santos, 2009, y también se han añadido otros nuevos.

En la Estadística hay que entrenarse todos los días, como lo hacen los buenos deportistas. Un campeón no llega a serlo mirando cómo lo hace otro compañero o leyendo un manual. Las medallas se ganan en los entrenamientos; en los campeonatos o en las Olimpiadas solo se recogen. Lo mismo ocurre con la Estadística. En la vida, con esfuerzo personal, algunas veces se triunfa, pero siempre se aprende. Lo que se aprende no se pierde y es nuestra mayor riqueza.

Para obtener un mayor provecho de este libro se recomienda seguir el orden establecido de los temas y en cada uno de ellos leer la introducción, tener a mano un manual de teoría, elegir los problemas, resolverlos, o al menos intentarlo sin mirar previamente la solución, y posteriormente comprobar el resultado y comprender el procedimiento de resolución.

El estudiante y el investigador de hoy necesitan analizar los datos que recogen en su campo de trabajo y se encuentran, en numerosas ocasiones, en situaciones de incertidumbre, lo que hace necesario la utilización de métodos estadísticos para sacar de su estudio mejores conclusiones.

Los métodos estadísticos son de dos tipos: descriptivos e inductivos. Los *métodos descriptivos* se ocupan de la recogida de muestras y de ordenar, resumir y analizar los datos de la muestra o las muestras recogidas. A partir del conocimiento de una o más muestras de las poblaciones objeto de estudio, se formulan hipótesis sobre la población, o las poblaciones, de las que proceden, se contrastan y se obtienen conclusiones, aceptando o rechazando las hipótesis planteadas con una probabilidad alta de acertar. Este es el objetivo de los *métodos inductivos*.

Actualmente es frecuente encontrar alumnos en los primeros cursos de Grado, que se enfrentan por primera vez a la Estadística, desconociendo el lenguaje específico de esta materia. Por lo que no comprenden los textos ni saben interpretar los enunciados de los problemas. Por ello en el *Capítulo 1* de este libro se hace una breve introducción que incluye Nomenclatura y Glosario de símbolos y se recogen en él ejercicios sobre los fundamentos generales y Álgebra de Sucesos Aleatorios, conocimientos básicos necesarios para traducir los enunciados de los problemas al lenguaje de la Estadística. Se incluye también la Combinatoria, que ayuda a discernir si el orden de los elementos es irrelevante o no y que facilita contar el número de casos favorables a un suceso dado entre todos los posibles.

En el *Capítulo 2* se incluyen problemas de Estadística Descriptiva Unidimensional y Bidimensional. Regresión. Números Índices. En el *Capítulo 3* los problemas de Probabilidad. En el *Capítulo 4* los problemas de Distribuciones de Probabilidad Discretas. En el *Capítulo 5* problemas de Distribuciones de Probabilidad Continuas. Aproximaciones de Distribuciones Discretas por Distribuciones Continuas. Distribuciones Conjuntas. Independencia de Variables Aleatorias. Intervalos de Probabilidad.

Con el *Capítulo 6*, Inferencia Estadística I, comienzan los Métodos Inductivos que permiten aceptar o rechazar hipótesis sobre la población, o las poblaciones objeto de estudio, a partir de los resultados de muestras extraídas o dadas y obtener conclusiones, con una probabilidad alta de acertar. En este tema se incluyen los problemas de Estimación de parámetros e Intervalos de Confianza. En el *Capítulo 7*, Inferencia Estadística II, los problemas de Contrastes de Hipótesis Paramétricos, que exigen que las muestras procedan de distribuciones Normales.

La Inferencia a partir de muestras de tamaño pequeño que proceden de poblaciones que no son Normales, como ocurre a menudo en la investigación en Psicología, en Pedagogía, en Ciencias Sociales... para tratar muestras que vienen dadas y no son recogidas por quien tiene que realizar el estudio estadístico, hay que aplicar Contrastes de Hipótesis No Paramétricos, o de distribución libre. Los problemas de Contrastes de Hipótesis No

Paramétricos: Contrastes χ^2 de Bondad de Ajuste, Contrastes de Homogeneidad, Contrastes de Independencia, Otros Contrastes No Paramétricos se recogen en el *Capítulo 8*, Inferencia Estadística III.

En el *Capítulo 9*, Inferencia Estadística IV, se incluyen los problemas de Análisis de la Varianza y los de Análisis de la Regresión Lineal Simple.

Y en el *Capítulo 10*, Inferencia Estadística V, los problemas de Análisis de la Varianza y Análisis de la Regresión utilizando STATGRAPHICS™¹ Centurion XVII, que facilita enormemente los cálculos, sobre todo si las muestras son grandes, y que proporciona ayuda gráfica para interpretar los resultados.

También en temas anteriores se han resuelto, o comprobado, problemas con el Programa de Análisis Estadístico STATGRAPHICS™ Centurion XVII, por ser esta una buena versión muy empleada, por su facilidad de manejo y por los resultados gráficos que ofrece. Otros programas que se utilizan son: Excel™², que permite formar tablas detalladas de los cálculos, y DERIVE™³, Versión 6.10, para realizar algunas operaciones, por su gran precisión y para representar algunas gráficas.

Se adjunta un archivo titulado “Archivo DATOS Libro Problemas.sgd”, en el que están grabados los datos para analizarlos con STATGRAPHICS.

Los problemas se resuelven a mano, haciendo uso de calculadora, hojas de cálculo y tablas de las distribuciones incluidas en este libro. También, cuando hay que manejar muchos datos, se utiliza el Programa STATGRAPHICS Centurion XVII.

El conjugar ambos procedimientos ayuda, entre otras cosas, a comprender mejor el método para obtener la solución, a interpretar los resultados que proporcionan los Programas Informáticos, a valorar la ayuda que supone poder hacer uso de *software*, que ahorra tiempo, facilita los cálculos y desarrolla el espíritu crítico, fomentando el hábito de no aceptar sin justificación ningún resultado. Familiarizarse con STATGRAPHICS™ Centu-

-
1. STATGRAPHICS es una marca registrada por Manugistics Inc. and Statistical Graphics Corporation. USA.
 2. Excel es una marca registrada por Microsoft Corporation.
 3. DERIVE es una marca registrada por Texas Instruments Incorporated.

rion XVII ayuda y permite comprender los resultados de otros programas estadísticos. El uso de estos es hoy imprescindible en la investigación y en el trabajo científico.

En el *Anexo* se incluyen las Tablas de las Distribuciones Estadísticas que se utilizan para resolver los problemas.

Ojalá este libro de problemas resueltos sea útil tanto a estudiantes universitarios como a cuantos necesiten aplicar la Estadística en la investigación o en su profesión. En la actualidad es muy difícil realizar investigación sin utilizar la Estadística y el ordenador, que facilita el cálculo y el manejo de gran cantidad de datos ahorrando tiempo y esfuerzo y con una precisión asombrosa.

Doy las gracias a la Editorial por haber confiado de nuevo en mi trabajo, y a todas las personas que han contribuido a que este libro se haya podido escribir: a mis profesores que me han ayudado a formarme y siempre han resuelto mis dudas, algunos ya fallecidos, a mis alumnos por sus preguntas y dudas planteadas que me han motivado y alentado cada día en esta tarea y a mi familia por su apoyo incondicional.

Si a las personas que utilicen este libro les resulta provechoso, habré logrado mi objetivo de animarles a hacer un buen uso de la Estadística. Estaré muy agradecida a todos los que me remitan sus opiniones, sugerencias o comentarios a la siguiente dirección mtgmant@bio.ucm.es

Capítulo

1

Fundamentos generales Sucesos aleatorios Combinatoria

*No nos atrevemos a muchas cosas porque son difíciles, pero son difíciles
porque no nos atrevemos a hacerlas.*

*Por la ignorancia se desciende a la servidumbre, por la educación y el
estudio se asciende a la libertad.*
Diego Luis Córdoba (1907-1964)

*La lectura es como el alimento; el provecho no está en proporción de lo que
se come, sino de lo que se digiere.*
Jaime Balmes (1810-1848)

NOMENCLATURA

Conjuntos	Nombre
U	Conjunto <i>Universal</i>
$\emptyset$	Conjunto <i>vacío</i>
$A \cup B$	<i>Unión</i> de los conjuntos A y B
$A \cap B$	<i>Intersección</i> de los conjuntos A y B
$A \subset B$	El conjunto A <i>está contenido en</i> B o también A es un subconjunto de B
$\complement_U(A) = \bar{A}$	Conjunto <i>complementario</i> de A respecto de U
$\bar{\bar{A}} = A$	El complementario de $\bar{A}$ es A
$A \subseteq B$	El conjunto A está contenido en B o es igual a B, o A es un subconjunto de B que puede coincidir con el conjunto B.
$A \cap B = \emptyset$	Conjuntos disjuntos, o sin elementos comunes.
$A \cap B \neq \emptyset$	Conjuntos no disjuntos.
$A - B = A \cap \bar{B}$	<i>Diferencia de conjuntos</i> . Conjunto formado por los elementos del primero que no son del segundo.
$a \in A$	El elemento <i>a pertenece</i> al conjunto A
$x \notin A$	El elemento <i>x no pertenece</i> al conjunto A
$\max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	El mayor de los elementos del conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	El menor de los elementos del conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
Cuantificador $\forall x \in A$	<i>Para todo</i> elemento <i>x</i> perteneciente a A
Cuantificador $\exists x \in A$	<i>Existe al menos un</i> elemento <i>x</i> perteneciente a A
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (Primera ley de De Morgan)	El complementario de $A \cup B$ y la intersección de los complementarios de A y de B son iguales.
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (Segunda ley de De Morgan)	El complementario de $A \cap B$ y la unión de los complementarios de A y de B son iguales.
$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$	<i>Cardinal, o número de elementos, de la unión de los conjuntos A y B.</i>
$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$	<i>Cardinal de la unión de los conjuntos A y B que son disjuntos.</i>
$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$	<i>Cardinal de la unión de tres conjuntos.</i>
$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C)$	<i>Cardinal de la unión de tres conjuntos disjuntos dos a dos.</i>

NOMENCLATURA

Conjuntos numéricos	Nombre
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$	Conjunto de los números Naturales.
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$	Conjunto de los números Enteros.
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ siendo } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$	Conjunto de los números Racionales, que son los que tienen un número finito de cifras decimales y también los decimales periódicos.
$\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, 2\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \dots, \pi, e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$ $1, 1011011101111011110\dots, 3, 01001000100001000001\dots,$ $1, 23344455556666677777788888899999900000000022333\dots,$ $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, e^2, \dots\}$	Conjunto de los números Irracionales que son los números decimales no periódicos.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números Reales, que son todos los números decimales tanto periódicos como no periódicos. El conjunto $\mathbb{R}$ está formado por todos los números Racionales y todos los números Irracionales.
$\mathbb{C} = \{a + bi \text{ siendo } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$	Conjunto de los números Complejos.

Alfabeto griego (minúscula y mayúscula)	Nombre
α A	alfa
β B	beta
γ Γ	gamma
δ Δ	delta
ε E	épsilon
ζ Z	zeta
η H	eta
θ Θ	theta
ι I	iota
κ K	kappa
λ Λ	lambda
μ M	my
ν N	ny
ξ Ξ	xi
$\omicron$ O	ómicron
π Π	pi
ρ P	ro
σ Σ	sigma
τ T	tau
υ Y	ypsilon
ϕ Φ	fi
χ X	ji
ψ Ψ	psi
ω Ω	omega

Lógica proposicional	Nombre
τ	Tautología, proposición siempre verdadera.
ϕ	Falacia, proposición siempre falsa.
$p, q, r, \dots, a, b, c, \dots$	Proposiciones. Una proposición es una frase que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.
$p \vee q$	Disyunción de p y q (“ p o q ”).
$p \underline{\vee} q$	Disyunción exclusiva de p y q (“o p o q ”).
$p \wedge q$	Conjunción de p y q (“ p y q ”).
$\bar{p}$ o también $\neg p$	Negación de la proposición p (“no p ”).
$\bar{\bar{p}} = p$	En la lógica aristotélica la negación de la negación de p es p .
$p \rightarrow q$	Condición “si p entonces q ”
$p \leftarrow q$	Condición “si q entonces p ”
$p \leftrightarrow q$	Bicondicional o “ p si y solo si q ”
$a \Rightarrow b$	a implica b . Condicional tautológico.
$a \Leftarrow b$	b implica a . Condicional tautológico.
$p \Leftrightarrow q$	“ p es equivalente a q ” O también “ p implica q y q implica p ”
$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ (Primera ley de De Morgan)	La negación de $p \vee q$ es igual a la conjunción de las negaciones de p y de q .
$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ (Segunda ley de De Morgan)	La negación de $p \wedge q$ es igual a la disyunción de las negaciones de p y de q .

Sucesos aleatorios	Nombre
E	Espacio muestral o Suceso seguro.
$\emptyset$	Suceso imposible.
$A \subset E, B \subset E$	A y B son sucesos del espacio muestral E , son subconjuntos de E .
$A \subset B$	El suceso A es una parte del suceso $B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Si se verifica A también se verifica B .
$A \cup B$	Unión de los sucesos A y B .
$A \cap B$	Intersección de los sucesos A y B .
$\bar{A} = \complement_E(A)$	Suceso contrario de A .
$\bar{\bar{A}} = A$	El suceso contrario de $\bar{A}$ es el mismo que A .
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (Primera Ley de De Morgan)	El suceso contrario de $A \cup B$ y la intersección de los sucesos contrarios de A y de B son iguales.
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (Segunda ley de De Morgan)	El suceso contrario de $A \cap B$ y la unión de los sucesos contrarios de A y de B son iguales.

Circuitos eléctricos	Nombre
I	Cable conectado o cable con un interruptor siempre cerrado. Siempre pasa corriente.
ϕ	Cable cortado, o cable con un interruptor siempre abierto. Nunca pasa corriente.
$a, b, c, \dots$	Interruptores. Puede estar en dos posiciones: abierto, no conduce corriente, o cerrado, conduce corriente.
$a \oplus b$	Conexión de los interruptores a y b en paralelo. Pasa corriente si uno de los dos o ambos están cerrados.
$a \odot b$	Conexión de los interruptores a y b en serie. Pasa corriente solo si los dos están cerrados.
$\bar{a}$ o bien a'	Interruptor complementario o contrario al a . Está cerrado cuando a está abierto y Está abierto cuando a está cerrado.
$\overline{\bar{a}} = a$	El interruptor contrario de $\bar{a}$ es a .
$\overline{a \oplus b} = \bar{a} \odot \bar{b}$ (Primera ley de De Morgan)	El circuito contrario del que tiene conectados los interruptores a y b en paralelo y la conexión en serie de los interruptores contrarios de a y b son iguales.
$\overline{a \odot b} = \bar{a} \oplus \bar{b}$ (Segunda ley de De Morgan)	El circuito contrario del que tiene conectados los interruptores a y b en serie y la conexión en paralelo de los interruptores contrarios de a y b son iguales.

NOMENCLATURA

Obsérvese las analogías entre el álgebra de los subconjuntos de un conjunto U dado, la de las proposiciones, la de los circuitos eléctricos y la de los sucesos aleatorios. *Todas estas álgebras son casos particulares del Álgebra de Boole. Lo que significa que son isomorfas dos a dos.*

Postulados de Huntington para Álgebras de Boole

Un conjunto C en el que se han definido dos operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ y la complementación es un Álgebra de Boole si se verifican las siguientes propiedades:

P1. Conmutativas: $\forall a, b \in C \quad a \oplus b = b \oplus a$ y $a \odot b = b \odot a$

P2. Distributivas:

$$\forall a, b, c \in C \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \text{ y también: } a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$$

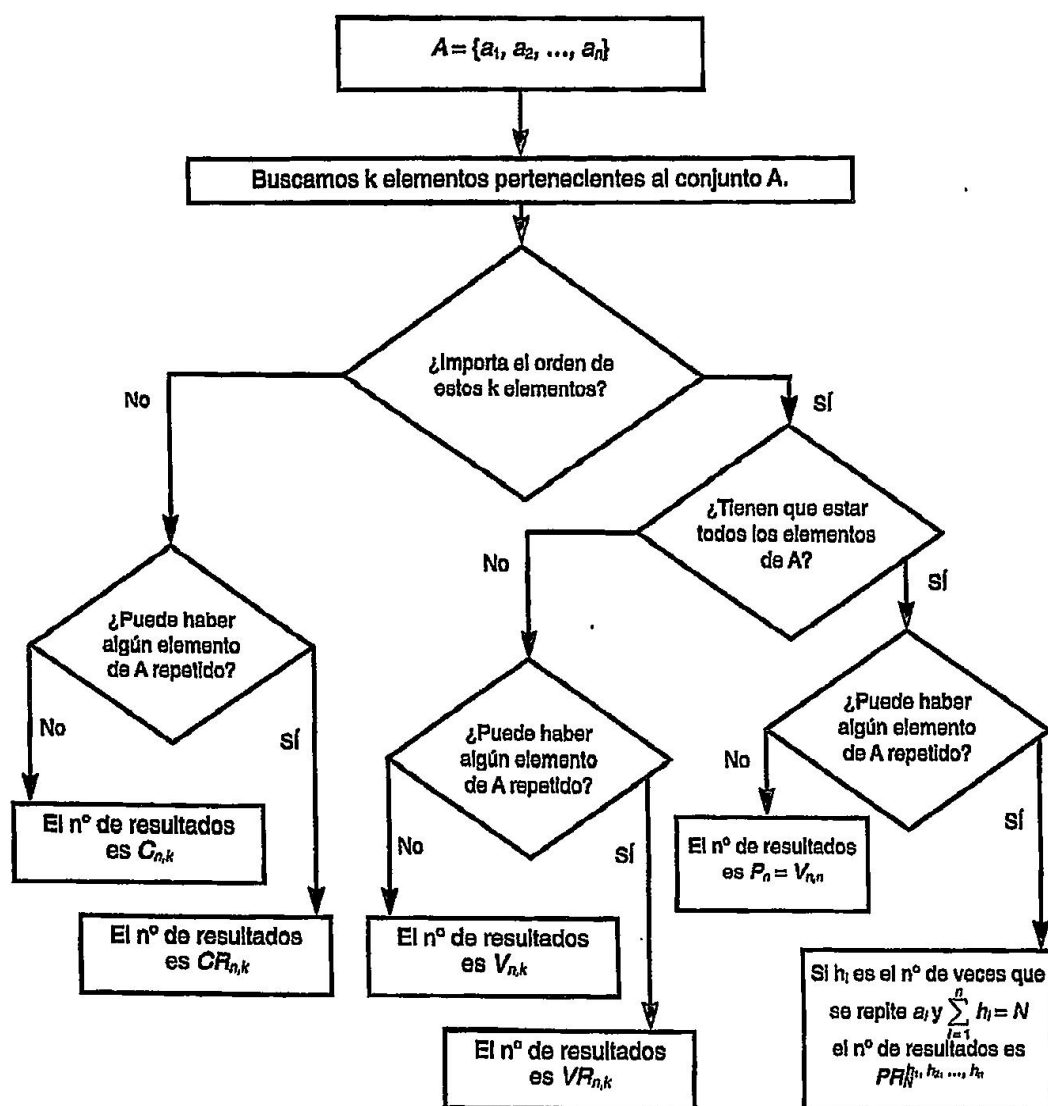
P3. Elementos neutros: $\emptyset$ e I que verifican:

$$\forall a \in C \quad a \oplus \emptyset = a \text{ y } a \odot I = a$$

P4. Todo elemento tiene su complementario: $\forall a \in C \quad \exists \bar{a} \in C$, tal que $a \oplus \bar{a} = I$ y $a \odot \bar{a} = \emptyset$

Por la simetría de las dos operaciones, en toda Álgebra de Boole se cumple el *principio de dualidad*. Esto significa que si un teorema es válido, intercambiando $\oplus$ por $\odot$ y los elementos neutros entre sí, $\emptyset$ por I , se obtiene siempre otro teorema también válido.

ORGANIGRAMA PARA COMBINATORIA



Fórmulas de Combinatoria	Nombre
$P_n = n! = n.(n-1).(n-2). \dots .3.2.1$ siendo $n \in \mathbb{N}$	Número de <i>permutaciones de n elementos</i> o también factorial de n .
$VR_{n,k} = n^k$ siendo n y $k \in \mathbb{N}$	Número de <i>variaciones con repetición de n elementos de orden k</i> .
$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1).(n-2). \dots .(n-k+1)$ siendo n y $k \in \mathbb{N}$ y $0 < k \leq n$	Número de <i>variaciones ordinarias de n elementos de orden k</i> .
$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ siendo $0 \leq k \leq n$, n y $k \in \mathbb{N}$	Número de <i>combinaciones ordinarias de n elementos de orden k</i> .
$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$ siendo $k \in \mathbb{N}$	Número de <i>combinaciones con repetición de n elementos de orden k</i> .
$PR_N^{h_1, h_2, \dots, h_n} = \frac{N!}{h_1! h_2! \dots h_n!}$ siendo $N = \sum_{i=1}^n h_i = h_1 + h_2 + \dots + h_n$	Número de <i>permutaciones con repetición de n elementos de índices de repetición $h_1, h_2, \dots, h_n$ respectivamente</i> .

Propiedades de los números combinatorios

I. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

II. Triángulo de Pascal o triángulo de Tartaglia. Ordenación de los números combinatorios:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & & 1 & 1 & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & & \cdot & & \cdot & & \\
 & & \cdot & & \cdot & & \\
 & & \cdot & & \cdot & &
 \end{array}$$

III. En el triángulo anterior se ve fácilmente que: $\binom{n}{k}$ es la suma de $\binom{n-1}{k-1}$ y $\binom{n-1}{k}$ que están situados en la fila anterior, a su izquierda y a su derecha.

Es decir: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ siendo $n > 0$

IV. $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$

V. $(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$

VI. Caso particular del anterior:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Esto significa que el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n .

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1.- Si el conjunto $C = \{a, b, 1, *, \circ, \triangleright, \{7, 9\}, z\}$ razonar cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y de estas cuáles son verdaderas:

$$a \in C, C \in 1, 1 \in C, C \in *, \{7, 9\} \in C, \triangleright \in C, 7 \in C, 23 \in C, c \in C$$

$$z \in C, \{a, z, *\} \in C, \{a, z, *\} \subset C$$

Solución

$a \in C$, tiene sentido y es verdadera.

$C \in 1$, no tiene sentido.

$1 \in C$, tiene sentido y es verdadera.

$C \in *$, no tiene sentido.

$\{7, 9\} \in C$, tiene sentido y es verdadera.

$\triangleright \in C$, tiene sentido y es verdadera.

$7 \in C$, no es verdadera.

$23 \in C$, no es verdadera.

$c \in C$, no es verdadera.

$z \subset C$, no tiene sentido.

$z \in C$, tiene sentido y es verdadera.

$\{a, z, *\} \in C$, no es verdadera.

$\{a, z, *\} \subset C$, tiene sentido y es verdadera.

1.2.- Si $1 \in \{3, x, 8, 2\}$, ¿qué se puede decir de x ?

Solución

$x = 1$.

1.3.- ¿Qué se puede decir de x si $x \in C = \{3, a, 5, 28\}$?

Solución

$x = 3, x = a, x = 5$ ó $x = 28$.

1.4.- Escribir todos los subconjuntos del conjunto $C = \{3, a, 5, 28\}$ que tengan tres elementos.

Solución

$S_1 = \{3, a, 5\}, S_2 = \{3, a, 28\}, S_3 = \{3, 5, 28\}, S_4 = \{a, 5, 28\}$.

1.5.- Si P es el conjunto de los números naturales pares e I es el conjunto de los números naturales impares, hallar $P \cap I$.

Solución

$P \cap I = \emptyset$ ya que no hay ningún número natural que sea par e impar a la vez.

1.6.- Si M_3 es el conjunto de los múltiplos enteros de 3 y M_2 es el conjunto de los múltiplos enteros de 2, hallar $M_3 \cap M_2$

Solución

$M_3 \cap M_2$ es el conjunto de los múltiplos enteros de 6 porque todo múltiplo de 6 es a la vez múltiplo de 2 y de 3.

1.7.- En la asignatura Biología Celular hay 150 alumnos matriculados y en Genética hay matriculados 115, ¿cuántos alumnos podrían asistir a clase en cada uno de los siguientes supuestos?:

- a) Si las dos clases se impartieran a la misma hora y no hay ningún alumno matriculado en las dos asignaturas.
- b) Si las dos clases se impartieran a la misma hora y hay 70 alumnos matriculados en las dos asignaturas.

Solución

- a) Como se imparten a la misma hora y no hay ningún alumno matriculado en las dos asignaturas, podrían asistir a clase:

$$\text{Card}(B \cup G) = \text{Card}(B) + \text{Card}(G) = 150 + 115 = 265 \text{ alumnos.}$$

- b) Si la hora de clase de las dos asignaturas coincide y hay 70 alumnos matriculados en las dos asignaturas, el número total de alumnos que podrían asistir a clase será:

$$\text{Card}(B \cup G) = \text{Card}(B) + \text{Card}(G) - \text{Card}(B \cap G) = 150 + 115 - 70 = 195 \text{ alumnos.}$$

1.8.- Una Empresa necesita cubrir 29 plazas, 13 tienen que ser ingenieros, 15 químicos y 13 matemáticos, exige que 6 sean ingenieros y matemáticos, 4 matemáticos y químicos y 5 ingenieros y químicos.

- a) ¿Cuántos deberán tener las tres titulaciones?
- b) ¿Cuántos deberán ser químicos e ingenieros pero no matemáticos?
- c) ¿A cuántos que solo tengan la titulación de ingeniero se les puede ofrecer empleo?

Solución

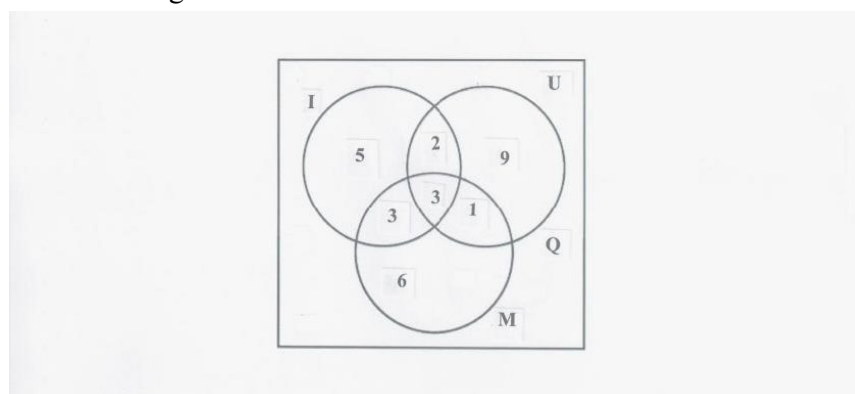
a)

$$\begin{aligned} \text{Card}(I \cup Q \cup M) &= \\ &= \text{Card}(I) + \text{Card}(Q) + \text{Card}(M) - \text{Card}(I \cap Q) - \text{Card}(I \cap M) - \text{Card}(Q \cap M) + \text{Card}(I \cap Q \cap M) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} 29 &= 13 + 15 + 13 - 6 - 4 - 5 + \text{card}(I \cap Q \cap M) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Card}(I \cap Q \cap M) &= 29 - 13 - 15 - 13 + 6 + 4 + 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Card}(I \cap Q \cap M) &= 3 \text{ deberán tener las tres titulaciones.} \end{aligned}$$

Resumiendo los datos en un diagrama de Venn:



$$\text{b) } \text{Card}(Q \cap I \cap \overline{M}) = \text{Card}(Q \cap I) - \text{Card}(Q \cap I \cap M) = 5 - 3 = 2.$$

Deberán ser dos químicos e ingenieros pero no matemáticos.

$$\text{c) Como el } \text{Card}(I \cap \overline{Q} \cap \overline{M}) = \text{Card}(I) - \text{Card}(I \cap M) - \text{Card}(M \cap Q) + \text{Card}(I \cap Q \cap M)$$

$$\text{Card}(I \cap \overline{Q} \cap \overline{M}) = 13 - 6 - 5 + 3 = 5$$

Solo a cinco de los que tengan titulación de Ingeniero se les puede ofrecer empleo.

1.9.- La respuesta al anuncio correspondiente al ejercicio anterior fue la siguiente: acudieron 29, de los cuales 15 eran matemáticos, 16 químicos, 6 ingenieros y matemáticos, 5 matemáticos y químicos, uno químico e ingeniero y uno tenía las tres titulaciones.

a) ¿Cuántos ingenieros había?

b) ¿Qué puestos quedaron sin cubrir?

c) ¿Qué personas no consiguieron empleo?

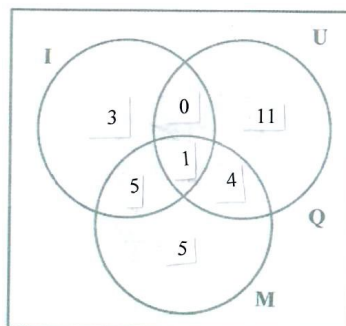
Solución

a) Para saber cuántos ingenieros había:

$$\begin{aligned} \text{Card}(I \cup Q \cup M) &= \\ &= \text{Card}(I) + \text{Card}(Q) + \text{Card}(M) - \text{Card}(I \cap Q) - \text{Card}(I \cap M) - \text{Card}(Q \cap M) + \text{Card}(I \cap Q \cap M) \end{aligned}$$

Por tanto:

$29 = Card(I) + 16 + 15 - 1 - 6 - 5 + 1 \Rightarrow Card(I) = 29 - 16 - 15 + 1 + 6 + 5 - 1 = 9$ como se puede comprobar en el siguiente diagrama de Venn.



- b) Un matemático, 2 ingenieros, 2 ingenieros y químicos y 2 con las tres titulaciones.
 c) Dos químicos no ingenieros ni matemáticos, 3 matemáticos y químicos, 2 ingenieros y matemáticos.

1.10.- Comprobar que el condicional $p \rightarrow q$ es la misma proposición que $\bar{p} \vee q$ y también que la proposición $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ y, por tanto, las tres proposiciones son equivalentes.

Solución

Construimos las tablas de verificación, comenzando por las proposiciones simples que las componen, p y q . Como una proposición solo puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez, todos los casos que se pueden dar de las dos proposiciones simples están indicados en las cuatro filas siguientes.

Por la definición de condicional, este es verdadero siempre que no sea verdadero el antecedente y falso el consecuente, esto significa que si el antecedente es verdadero para que lo sea el condicional también lo tiene que ser el consecuente, pero si el antecedente es falso entonces tanto si el consecuente es verdadero como si es falso, el condicional es verdadero.

p	q	$p \rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee q$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Como se observa en la tabla anterior, las tres proposiciones compuestas: $p \rightarrow q$, $\bar{p} \vee q$ y $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ tienen la misma tabla y, por ello, son equivalentes.

1.11.- Asisten a una conferencia cien personas de las que 50 hablan español, 45 inglés y 45 francés, 24 hablan español e inglés, 21 hablan español y francés, 15 hablan francés e inglés y 5 los tres idiomas.

- a) ¿Cuántos no hablan ninguno de los tres idiomas?
- b) ¿Cuántos hablan español y no francés?
- c) ¿Cuántos hablan español y no hablan ni francés ni inglés?
- d) ¿Cuántas de las personas que asisten a la conferencia hablan solo dos idiomas?

Solución

a) Como

$$\begin{aligned} \text{card}(E \cup I \cup F) &= \\ &= \text{card}(E) + \text{card}(I) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap I) - \text{card}(E \cap F) - \text{card}(I \cap F) + \text{card}(E \cap I \cap F) = \\ &= 50 + 45 + 45 - 24 - 21 - 15 + 5 = 85 \end{aligned}$$

No hablan ninguno de los tres idiomas: $100 - \text{card}(E \cup I \cup F) = 100 - 85 = 15$ personas.

b) $\text{card}(E \cap \bar{F}) = 50 - 21 = 29$ hablan español y no francés.

c) $\text{card}(E \cap \bar{F} \cap \bar{I}) = 50 - 21 - 24 + 5 = 10$ hablan español pero no inglés ni francés.

d) $\text{card}(E \cap I) + \text{card}(E \cap F) + \text{card}(I \cap F) - 3\text{card}(E \cap I \cap F) = 24 + 21 + 15 - 15 = 45$ personas solo hablan dos idiomas.

1.12.- Simplificar y dar la expresión más sencilla posible para los siguientes conjuntos:

- a) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$
- b) $(A \cap B) \cap (\overline{\bar{C} \cup A})$
- c) $B - (A \cap B)$

Solución

a)

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) &= (A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \cup (B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) = \\ &= ((A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})) \cup ((B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})) = \\ &= (\emptyset \cup (A \cap \bar{B})) \cup ((B \cap \bar{A}) \cup \emptyset) = \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \cap \overline{(C \cup A)} &= (A \cap B) \cap (C \cap \bar{A}) = \\
 &= A \cap B \cap C \cap \bar{A} = A \cap \bar{A} \cap B \cap C = (A \cap \bar{A}) \cap (B \cap C) = \\
 &= \emptyset \cap (B \cap C) = \emptyset
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 B - (A \cap B) &= B \cap \overline{(A \cap B)} = B \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \\
 &= (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B}) = (B \cap \bar{A}) = B - A
 \end{aligned}$$

1.13.- Se sabe, por definición, que: “Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son linealmente independientes si se verifica que: $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ”. Decir que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son vectores linealmente dependientes significa lo contrario de que esos vectores sean linealmente independientes. Teniendo esto en cuenta, dar la expresión lógica equivalente a: “ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son vectores linealmente dependientes”.

Solución

Indicamos por p : “ $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ ” y por q : “ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ”

Por la definición de independencia, decir que “ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son linealmente independientes” se puede expresar así: $p \rightarrow q$, y este condicional es tautológico: $p \Rightarrow q$. Y, por tanto, no puede ser p verdadera y q falsa porque haría falso el condicional.

Afirmar que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son vectores linealmente dependientes es lo contrario de que sean independientes y, por tanto:

Si los tres vectores son dependientes, se cumplirá que q es falso y p es verdadero, es decir:

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son vectores linealmente dependientes $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ no todos nulos que cumplen } \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}]$$

Otra forma de entenderlo sería la siguiente:

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son vectores linealmente dependientes, se verificará el suceso contrario a $p \rightarrow q$, esto es, se verificará el suceso: $\overline{(p \rightarrow q)}$

Una proposición equivalente a esta, teniendo en cuenta el ejercicio anterior, es:

$$\overline{(p \rightarrow q)} = \overline{(\bar{p} \vee q)} = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} = p \wedge \bar{q}.$$

Por tanto, afirmar que los tres vectores son dependientes significa que el suceso $\overline{(p \rightarrow q)} = p \wedge \bar{q}$ es verdadero y esto solo es cierto si p y $\bar{q}$ son verdaderos a la vez o, lo que es lo mismo, si p es verdadero y q es falso, como se decía anteriormente.

En conclusión:

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \text{ son vectores linealmente dependientes} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [\exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ y } \lambda_3 \text{ no todos nulos que verifican: } \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}] \end{aligned}$$

1.14.- a) ¿Son linealmente independientes los vectores $(2,1,0)$, $(3,2,1)$ y $(0,1,2)$ del espacio $\mathbb{R}^3$?
b) ¿Y los vectores $(2,1,0)$, $(3,2,1)$ y $(-1,-1,-1)$?

Solución

a) En el primer caso, los vectores $(2,1,0)$, $(3,2,1)$ y $(0,1,2)$ serán linealmente independientes si y solo si:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (2,1,0) + \lambda_2 (3,2,1) + \lambda_3 (0,1,2) &= (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 (2,1,0) + \lambda_2 (3,2,1) + \lambda_3 (0,1,2) &= (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Y por tanto son independientes. Pueden formar una base de $\mathbb{R}^3$.

b) En el segundo caso, los vectores $(2,1,0)$, $(3,2,1)$ y $(-1,-1,-1)$ serán linealmente independientes si y solo si:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (2,1,0) + \lambda_2 (3,2,1) + \lambda_3 (-1,-1,-1) &= (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 (2,1,0) + \lambda_2 (3,2,1) + \lambda_3 (-1,-1,-1) &= (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases} \quad \forall \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por tanto, $\exists \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$ que verifican: $-(2,1,0) + (3,2,1) + (-1,-1,-1) = (0,0,0)$

Luego, en este caso los vectores son linealmente dependientes.

No pueden formar una base de $\mathbb{R}^3$.

1.15.- Simplificar lo más posible el circuito:

$$(a \odot b \odot c) \oplus (a \odot \bar{b} \odot c) \oplus (\bar{c} \odot a \odot b \odot c)$$

Solución

$$\begin{aligned} & (a \odot b \odot c) \oplus (a \odot \bar{b} \odot c) \oplus (\bar{c} \odot a \odot b \odot c) = \\ & = (a \odot c \odot b) \oplus (a \odot c \odot \bar{b}) \oplus (\bar{c} \odot a \odot b \odot c) = \\ & = (a \odot c \odot (b \oplus \bar{b})) \oplus \phi = (a \odot c \odot I) = a \odot c \end{aligned}$$

1.16.- Demostrar que son ciertas las dos igualdades siguientes, que se conocen como leyes de absorción:

a) $a \odot (a \oplus b) = a$

b) $a \oplus (a \odot b) = a$

Solución

a) $a \oplus (a \odot b) = (a \odot I) \oplus (a \odot b) = a \odot (I \oplus b) = a \odot I = a$

b) $a \odot (a \oplus b) = (a \oplus \phi) \odot (a \oplus b) = a \oplus (\phi \odot b) = a \odot \phi = a$

1.17.- En una habitación grande con dos puertas se instalan dos llaves conmutadas, una en cada puerta, para encender o apagar la lámpara de la habitación, indistintamente, desde cada una de ellas. Diseñar el circuito más sencillo para que funcionen las dos llaves conmutadas, es decir, para poder encender o apagar la misma lámpara desde cualquiera de las dos.

Solución

a	b	$a \odot b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \odot \bar{b}$	$(a \odot b) \oplus (\bar{a} \odot \bar{b})$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Como se ve en el cuadro anterior, si se acciona la llave en una de las puertas se enciende la lámpara y si a continuación se acciona la otra llave, la lámpara queda apagada y si se vuelve a accionar desde cualquiera de las dos entradas, la lámpara se enciende. Por tanto, el circuito que permite encender y apagar la lámpara desde cualquiera de las dos puertas será:

$$(a \odot b) \oplus (\bar{a} \odot \bar{b})$$

Por este circuito pasa corriente solo si los dos interruptores están en la misma posición, como se comprueba en la tabla de verificación.

1.18.- Un aprendiz construye el circuito:

$$(\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot (\bar{a} \oplus b) \odot (a \oplus b)$$

Enseñarle cómo puede ahorrar interruptores.

Solución

$$\begin{aligned} & (\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot (\bar{a} \oplus b) \odot (a \oplus b) = \\ & = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot [((\bar{a} \oplus b) \odot a) \oplus (\bar{a} \oplus b) \odot b] = \\ & = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot [((\bar{a} \odot a) \oplus (b \odot a)) \oplus ((\bar{a} \odot b) \oplus (b \odot b))] = \\ & = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot [(\phi \oplus (b \odot a)) \oplus ((\bar{a} \odot b) \oplus b)] = \\ & = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot [((b \odot a) \oplus b)] = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \odot b = \\ & = (\bar{a} \odot b) \oplus (\bar{b} \odot b) = (\bar{a} \odot b) \oplus \phi = \bar{a} \odot b \end{aligned}$$

El circuito es equivalente a conectar los interruptores $\bar{a}$ y b en serie.

1.19.- Un cartero lleva seis cartas para un edificio de viviendas, una para cada uno de los seis vecinos, y las introduce en los buzones sin fijarse en el nombre, ¿de cuántas formas distintas las puede repartir?

Solución

$$P_6 = 6! = 720 \text{ formas distintas.}$$

1.20.- Una combinación ganadora de la Lotería Primitiva está formada por seis números diferentes elegidos entre el 1 y el 49. ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden obtener?

Solución

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ combinaciones diferentes.}$$

1.21.- ¿En cuántos puntos se cortan diez rectas, sabiendo que tres de ellas son paralelas y tres o más no se cortan en el mismo punto?

Solución

Si no hubiera dos de ellas paralelas, se cortarían en $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ puntos.

Pero como tres rectas son paralelas entre sí, se pierden $\binom{3}{2} = 3$ puntos.

Así, el número de puntos de intersección es: $45 - 3 = 42$ puntos.

1.22.- Con las vocales A, E, I y las consonantes P, Q, R, ¿cuántos códigos se pueden formar de tal manera que no figuren dos consonantes seguidas ni tres vocales consecutivas?

Solución

Las distintas posiciones de las vocales y consonantes son las siguientes:

C V C V C V
C V C V V C
C V V C V C
V C V C V C

El número de códigos será:

$$4 \cdot P_3 \cdot P_3 = 4 \cdot 3!3! = 144 \text{ códigos.}$$

1.23.- ¿Cuántas pirámides de base triangular se pueden construir con ocho puntos del espacio, de los cuales no hay cuatro coplanarios?

Solución

Con cuatro de estos puntos se determinan los cuatro vértices de la pirámide, porque no hay cuatro de ellos coplanarios. Así, el número de pirámides de base triangular es:

$$C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{8!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ pirámides.}$$

1.24.- a) ¿De cuántas formas distintas se puede responder a un examen tipo test con diez preguntas si cada una tiene tres respuestas posibles, a, b, c, y solo se puede marcar una de ellas?
b) ¿Cuántas respuestas distintas se pueden dar si se utiliza cada letra al menos tres veces?

Solución

a) $VR_{3,10} = 3^{10} = 59049 \text{ formas.}$

b) $3 \cdot PR_{10}^{4,3,3} = 3 \cdot \frac{10!}{4!3!3!} = 12600 \text{ respuestas distintas.}$

1.25.- Un equipo formado por ocho personas se quiere dividir en tres grupos de 3, 2 y 3 personas, respectivamente, con la condición de que ninguna persona esté en dos de los grupos. ¿De cuántas maneras lo pueden hacer?

Solución

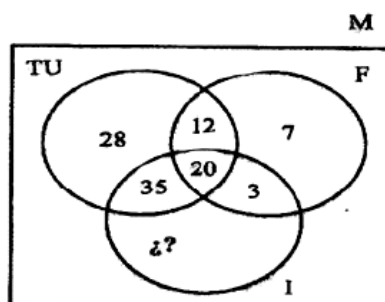
$$C_{8,3} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,3} = \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{3!}{3!0!} = 560 \text{ maneras.}$$

1.26.- Una Multinacional oferta un puesto directivo y se presenta un único candidato. En la entrevista se le entrega un informe con los siguientes datos: en esta Empresa el 20% son trabajadores con título universitario y que hablan francés e inglés, el 32% son titulados universitarios y hablan francés, el 55% son titulados universitarios y hablan inglés, el 23% hablan francés e inglés, el 95% tienen titulación universitaria, el 42% hablan francés y el 53% hablan inglés. Se le pide al candidato que examine los datos con tranquilidad y que entregue por escrito su valoración del informe.

Explicar por qué el Director General de la Multinacional, al leer que le parece bien el informe, decide no contratarlo.

Solución

Recogiendo los datos del informe en un diagrama de Venn:



Se descubre que el porcentaje de personas que hablan inglés no es coherente con los porcentajes de los que hablan inglés y francés, que son el 23%, los que hablan inglés y tienen titulación universitaria, el 55% y los que tienen titulación universitaria y hablan los dos idiomas, el 20%, ya que suman el 58% de la plantilla y en el informe se dice que son el 53%.

1.27.- Se dispone de cinco cobayas enfermas en un laboratorio a las que se les administra un antibiótico. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener en cada uno de los siguientes casos?:

- a) Si solo una de ellas desarrolla antitoxina.
- b) Si dos de ellas desarrollan antitoxina.
- c) Si desarrolla antitoxina al menos una de ellas.

Solución

$$a) C_{5,1} = \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5 \text{ resultados.}$$

$$b) C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ resultados.}$$

$$c) C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = (1+1)^5 - 1 = 2^5 - 1 = 31 \text{ resultados distintos.}$$

1.28.- Un examen tipo test consta de 12 preguntas, cada una de ellas admite tres respuestas distintas y solo una es verdadera. ¿De cuántas formas distintas se puede contestar el examen si se han de responder obligatoriamente todas las preguntas?

Solución

El número de respuestas distintas es $VR_{3,12} = 3^{12} = 531441$ formas distintas.

1.29.- ¿Cuántos automóviles se pueden matricular si cada matrícula está formada por un número de cuatro cifras seguido de tres letras y solo se usan 25 letras del alfabeto?

Solución

$VR_{10,4} \cdot VR_{25,3} = 10^4 \cdot 25^3 = 156250000$ automóviles.

1.30.- ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con dos cifras pares y tres cifras impares sin que aparezca en ninguno de ellos el cero?

Solución

Como no podemos utilizar el 0, quedan cuatro cifras pares y cinco impares. En todos los números ha de haber dos cifras pares y tres impares. En consecuencia, se pueden formar

$$C_{4,2} \cdot C_{5,3} \cdot P_5 = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 5! = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 120 = 7200 \text{ números.}$$

1.31.- Si $A = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 7\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x \leq 10\}$ escribir los sucesos: $A \cup B$, $\bar{A}$, $A \cap B$ y $A - B = A \cap \bar{B}$.

Solución

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 10\} = [3, 10] \\ \bar{A} &= \{x \in \mathbb{R} / (x < 3) \vee (x > 7)\} = (-\infty, 3) \cup (7, +\infty) \\ A \cap B &= \{x \in \mathbb{R} / 5 \leq x \leq 7\} = [5, 7] \\ A - B &= A \cap \bar{B} = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 5\} = [3, 5) \end{aligned}$$

1.32.- Resolver la ecuación: $5 \binom{2x}{x} = 36 \binom{2x-3}{x-1}$

Solución

La ecuación dada es:

$$5 \frac{(2x)!}{x!x!} = 36 \frac{(2x-3)!}{(x-1)!(x-2)!} \Leftrightarrow 5(2x)!(x-1)!(x-2)! = 36(2x-3)!x!x! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(2x)(2x-1)(2x-2) = 36x^2(x-1) \Leftrightarrow 20(2x-1) = 36x \Leftrightarrow 4x = 20$$

Por tanto la solución de la ecuación es $x = 5$.

1.33.- a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener si se lanzan tres monedas diferentes a la vez? b) ¿Y si se lanzan cinco monedas distintas?

Solución

a) $VR_{2,3} = 2^3 = 8$ resultados.

b) $VR_{2,5} = 2^5 = 32$ resultados.

1.34.- a) ¿Cuántas secuencias nucleótidas distintas de cinco bases se pueden formar con las cuatro bases constituyentes del ADN, adenina (A), guanina (G), citosina (C) y timina (T)?
b) ¿En cuántas de las secuencias anteriores se encuentra la terna ACG en este orden?
c) ¿Cuántas secuencias de cinco bases tienen tres guaninas y dos timinas?

Solución

a) $VR_{4,5} = 4^5 = 1024$ secuencias.

b) $3 \cdot VR_{4,2} = 3 \cdot 4^2 = 48$ secuencias.

c) $PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ secuencias.

1.35.- Cinco coches utilizan diez plazas de aparcamiento que están numeradas del 1 al 10:

a) ¿De cuántas formas distintas pueden aparcar?

b) ¿Y si fueran diez coches los que las utilizaran?

c) Si solo hay tres plazas de aparcamiento, ¿de cuántas formas distintas se pueden ocupar con cinco coches?

Solución

a) $V_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ formas distintas.

b) $P_{10} = 10! = 3628800$ formas distintas.

c) $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas distintas.

1.36.- a) ¿Cuántas “palabras” de cinco letras, tengan sentido o no, se pueden formar con las veintiséis letras del abecedario español?
b) ¿Cuántas están formadas solo por vocales?

Solución

a) $VR_{26,5} = 26^5 = 11881376$ palabras.

b) $VR_{5,5} = 5^5 = 3125$ palabras están formadas solo con las vocales.

1.37.- a) Un mapa está dividido en cuatro regiones, ¿de cuántas formas distintas se puede pintar si hay siete colores disponibles y cada región debe pintarse con un solo color?
b) Responder a la pregunta del apartado anterior si el mapa estuviera dividido en siete regiones.

Solución

a) $V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ formas.

b) $P_7 = 7! = 5040$ formas distintas.

1.38.- Los símbolos del código Braille se obtienen a partir de un código generador que consta de seis posiciones y en cada una de ellas se coloca un punto en relieve o no. ¿Cuántos símbolos distintos se pueden formar?

Solución

$VR_{2,6} = 2^6 = 64$ símbolos distintos. Son suficientes para representar las letras, las cifras, los símbolos ortográficos, distinguir palabras de números, letra cursiva, mayúsculas de minúsculas, etc., en Braille.

1.39.- En el estudio de la anemia hereditaria se cree que los responsables son los alelos anormales de cinco loci de genes. Los alelos normales para estos cinco loci los denominamos A, B, C, D y E y los correspondientes alelos anormales son a, b, c, d, y e. ¿Cuántas ordenaciones genéticas diferentes se pueden encontrar para estos cinco loci?

Solución

Para cada locus se pueden encontrar uno de los siguientes genotipos: dos alelos normales, uno normal y otro no, o ninguno normal.

Para los cinco loci se pueden encontrar $VR_{3,5} = 3^5 = 243$ ordenaciones genéticas diferentes.

1.40.- ¿Cuántos números naturales se pueden formar con las seis primeras cifras significativas, que sean:

a) mayores que 10^3 y menores que 10^4 ?

b) mayores que 10^3 y menores que 10^5 ?

Solución

a) Las seis primeras cifras significativas son: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Los números naturales mayores que 10^3 y menores que 10^4 han de tener cuatro cifras, y todos los números de cuatro cifras formados con las cifras del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cumplen la condición anterior.

El número de ellos es $VR_{6,4} = 6^4 = 1296$ números.

b) Los números mayores que 10^3 y menores que 10^5 son los 1296 anteriores más los que tienen cinco cifras que son $VR_{6,5} = 6^5 = 7776$ números.

En total son $VR_{6,4} + VR_{6,5} = 1296 + 7776 = 9072$ números.

1.41.- Simplificar $Z \cup (X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) \cup (\bar{Z} \cap X \cap Y \cap Z)$ lo más posible.

Solución

$$\begin{aligned} & Z \cup (X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) \cup (\bar{Z} \cap X \cap Y \cap Z) = Z \cup (X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) \cup \emptyset = \\ & = Z \cup (X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z) = Z \cup (X \cap Z \cap Y) \cup (X \cap Z \cap \bar{Y}) = Z \cup (X \cap Z \cap (Y \cup \bar{Y})) = \\ & = Z \cup (X \cap Z \cap U) = Z \cup (X \cap Z) = Z \end{aligned}$$

1.42.- a) ¿Cuántos genotipos diferentes se pueden obtener en el cruce de dos individuos heterocigóticos para un carácter con dominancia completa?

b) ¿Cuántos fenotipos distintos se pueden obtener?

Solución

a) Genotipos $CR_{2,2} = C_{2+1,2} = \binom{3}{2} = 3$, que son AA, Aa y aa.

b) Fenotipos se pueden obtener 2: dominante o recesivo.

1.43.- ¿Cuántos números de cinco cifras significativas se pueden formar que tengan todas las cifras diferentes, dos de ellas sean pares y las otras tres impares?

Solución

Se cuentan todos los números de cinco cifras distintas que se pueden formar con dos cifras pares y tres impares y se restan los que empiezan por cero.

Los números de cinco cifras distintas que tengan dos pares y tres impares son en total:

$$C_{5,2} \cdot C_{5,3} \cdot P_5 = \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 5! = 12000 \text{ números.}$$

$$\text{De estos, empiezan por cero: } 4 \cdot \binom{5}{3} \cdot 4! = 960 \text{ números.}$$

Por tanto, se puede formar $12000 - 960 = 11040$ números de cinco cifras significativas, con dos cifras pares y tres impares y con todas las cifras distintas.

1.44.- Un tenista juega nueve partidos seguidos de los que gana cuatro, empata dos y pierde el resto, ¿de cuántas formas distintas se han podido obtener estos resultados?

Solución

$$PR_9^{4,2,3} = \frac{9!}{4!2!3!} = 1260 \text{ formas distintas.}$$

1.45.- a) ¿De cuántas formas se pueden repartir once personas en tres ascensores de tal modo que entren seis en el primero, tres en el segundo y dos en el tercero?

b) ¿De cuántas maneras se podrán repartir las once personas en los tres ascensores de modo que entren en uno seis, en otro tres y en otro 2?

Solución

$$a) PR_{11}^{6,3,2} = \frac{11!}{6!3!2!} = 4620 \text{ formas}$$

$$\text{O también, } C_{11,6} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2} = \binom{11}{6} \binom{5}{3} \binom{2}{2} = 462 \cdot 10 \cdot 1 = 4620 \text{ formas.}$$

$$b) P_3 \cdot C_{11,6} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2} = 6 \cdot 462 \cdot 10 \cdot 1 = 27720 \text{ formas distintas.}$$

1.46.- En Morse se transmiten los mensajes con solo dos símbolos: punto (•) y raya (–) ¿Cuántos mensajes distintos se pueden enviar si el mensaje tiene solo cuatro signos?

Solución

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ mensajes distintos.}$$

1.47.- Una persona tiene una Cartera de Valores formada por acciones de diez sociedades distintas. Necesita liquidez y decide vender todas sus acciones de seis de las sociedades.

a) ¿De cuántas formas distintas puede realizar la elección?

b) Sabiendo que en la Cartera hay acciones de una sola Sociedad eléctrica, ¿en cuántas de las elecciones anteriores van incluidas las eléctricas?

Solución

$$a) C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!4!} = 210 \text{ formas.}$$

$$b) C_{9,5} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = 126 \text{ formas.}$$

1.48.- En una reunión hay más hombres que mujeres, más mujeres que beben que hombres que fuman, y más mujeres que fuman y no beben que hombres que no beben ni fuman. Demostrar que hay menos mujeres que no beben ni fuman que hombres que beben y no fuman. (Propuesto en una Olimpiada Matemática).

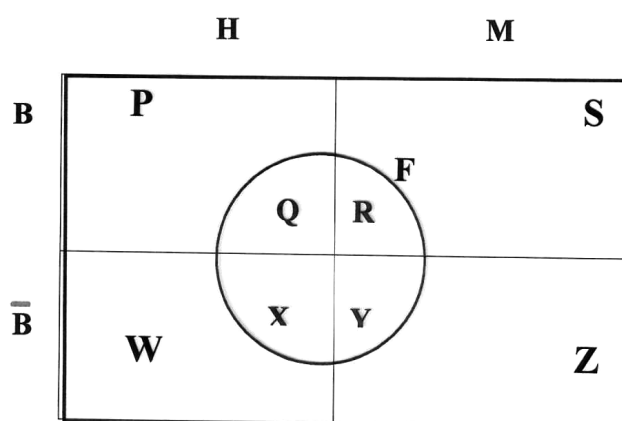
Solución

Se puede expresar el conjunto U como unión de conjuntos disjuntos:

$$U = H \cup M$$

$$U = B \cup \bar{B}$$

$$U = F \cup \bar{F}$$



Las tres clasificaciones dividen el rectángulo en ocho regiones, disjuntas dos a dos, que se denominan: P, Q, R, S, W, X, Y, Z. Por tanto $U = P \cup Q \cup R \cup S \cup W \cup X \cup Y \cup Z$.

Los ocho conjuntos disjuntos se pueden expresar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} P &= H \cap B \cap \bar{F} & R &= M \cap B \cap F \\ Q &= H \cap B \cap F & S &= M \cap B \cap \bar{F} \\ W &= H \cap \bar{B} \cap \bar{F} & Y &= M \cap \bar{B} \cap F \\ X &= H \cap \bar{B} \cap F & Z &= M \cap \bar{B} \cap \bar{F} \end{aligned}$$

Según se dice en el enunciado, se debe probar que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Card}(H) > \text{Card}(M) \\ \text{Card}(M \cap B) > \text{Card}(H \cap F) \\ \text{Card}(M \cap F \cap \bar{B}) > \text{Card}(H \cap \bar{B} \cap \bar{F}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Card}(M \cap \bar{B} \cap \bar{F}) < \text{Card}(H \cap B \cap \bar{F})$$

Indicando el número de elementos, o cardinal, de cada uno de los ocho conjuntos de la partición del conjunto U con la letra minúscula correspondiente, lo que se trata de probar es:

$$\left\{ \begin{array}{l} p+q+x+w > r+s+y+z \\ r+s > q+x \\ y > w \end{array} \right\} \Rightarrow z < p$$

Utilizando la primera desigualdad y la tercera:

$$\left\{ \begin{array}{l} p+q+x+w > r+s+y+z \\ y > w \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p+q+x+w > r+s+y+z \\ r+s+y+z > r+s+w+z \end{array} \right\} \Rightarrow p+q+x+w > r+s+w+z$$

Restando a los dos miembros de la desigualdad anterior w , se obtiene:

$$p+q+x > r+s+z.$$

Utilizando junto con este resultado la segunda de las desigualdades del enunciado que aún no ha sido utilizada:

$$\left\{ \begin{array}{l} p+q+x > r+s+z \\ r+s > q+x \end{array} \right\} \Rightarrow p+q+x > q+x+z$$

Y restando $q+x$ a los dos miembros, se obtiene $p > z$.

Hemos probado así que:

$$Card(H \cap B \cap \bar{F}) > Card(M \cap \bar{B} \cap \bar{F}).$$

Es decir, que hay más hombres que beben y no fuman que mujeres que no beben ni fuman, que es lo que se pedía.

1.49.- En un total de treinta minutos hay que programar en televisión un documental, un espacio informativo y un espacio de publicidad. Cada uno de los tres debe ocupar un tiempo múltiplo de cinco minutos. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer la programación?

Solución

Se pueden repartir los treinta minutos de tres formas:

$$5+5+20$$

$$5+15+10$$

$$10+10+10$$

Al asignar el documental, el informativo y la publicidad, se obtendrían:

$$PR_3^{2,1} + P_3 + 1 = 3 + 6 + 1 = 10 \text{ formas distintas.}$$

1.50.- Con seis alelos diferentes: A, B, C, D, E, F para el mismo locus,

- a) ¿cuántos genotipos distintos se pueden obtener?
 b) ¿Cuántos genotipos distintos se pueden formar con n alelos?
 c) ¿Y con dos alelos?

Solución

$$a) CR_{6,2} = C_{6+2-1,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ genotipos.}$$

$$b) CR_{n,2} = C_{n+2-1,2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n^2 + n}{2} \text{ genotipos.}$$

$$c) CR_{3,2} = C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6 \text{ genotipos.}$$

1.51.- ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

Solución

Cada ficha se forma con dos elementos del conjunto

$$A = \{\text{blanca, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis}\}$$

que se pueden repetir o no.

Las fichas se pueden girar y no hay dos fichas iguales.

Por tanto el número de fichas de este juego es:

$$CR_{7,2} = C_{7+2-1,2} = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ fichas.}$$

1.52.- Se colocan n conejos en n celdas.

- a) ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer?
 b) ¿Y si solo puede haber un conejo en cada celda?

Solución

a) Se le asigna una celda a cada conejo y como pueden colocarse uno, dos, tres o hasta n conejos en la misma celda, el número de resultados distintos es:

$$VR_{n,n} = n^n$$

b) Como no se puede repetir la celda el número de formas distintas para colocarlos es:

$$P_n = n!$$

1.53.- Se venden boletos con cinco cifras que hay que descubrir arañando la pintura que los cubre.
 a) ¿Cuántos boletos distintos se pueden vender si hay boletos con al menos una cifra repetida?
 b) ¿En cuántos de los anteriores no aparece la cifra 7?
 c) ¿Cuántos boletos se pueden vender si todas las cifras son diferentes?
 d) ¿Cuántos de estos últimos no tienen el 7?

Solución

a) Si existen boletos con al menos una cifra repetida hay

$$VR_{9,5} = 9^5 = 59049 \text{ boletos.}$$

b) De los boletos anteriores no tienen la cifra 7

$$VR_{8,5} = 8^5 = 32768 \text{ boletos.}$$

c) Con todas las cifras diferentes hay

$$V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120 \text{ boletos.}$$

d) Con todas las cifras diferentes y que no contienen el 7 hay

$$V_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720 \text{ boletos.}$$

1.54.- Hay que alojar a nueve personas en tres habitaciones de tres camas cada una.

a) ¿De cuántas formas se pueden distribuir?

b) ¿De cuántas formas se pueden repartir en las tres habitaciones si dos de ellas se niegan a alojarse en la misma habitación?

Solución

a) $PR_9^{3,3,3} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$ formas distintas.

b) Como no se pueden alojar juntas dos de ellas, se envía una de ellas a una cualquiera de las habitaciones y la otra a otra habitación distinta.

Se puede completar la primera habitación de $C_{7,2}$ formas distintas.

Quedan aún cinco personas para asignar habitación.

Se puede completar la segunda de $C_{5,2}$ y las tres restantes se envían a la tercera habitación.

Y ahora falta asignar a cada grupo de tres su habitación.

Por tanto, en este caso, hay

$$P_3 \cdot C_{7,2} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,3} = 3! \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 6 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 1 = 1260$$

formas distintas de distribuir las.

1.55.- Si un equipo de piragüismo está compuesto por siete remeros y un Club de dicho deporte cuenta con veinte piragüistas, ¿cuántos equipos diferentes puede hacer?

Solución

$$C_{20,7} = \binom{20}{7} = \frac{20!}{7!13!} = 77520 \text{ equipos.}$$

1.56.- Se quieren seleccionar muestras de tamaño cinco de un conjunto de dieciséis elementos.

- a) ¿Cuántas muestras distintas se pueden seleccionar si se anotan los resultados en el orden que van apareciendo y el muestreo se realiza con reemplazamiento?
- b) ¿Y si se extraen sin reemplazamiento y se anotan en el orden en que van apareciendo?
- c) ¿Y si no se tiene en cuenta el orden de extracción?

Solución

a) $VR_{16,5} = 16^5 = 1048576$ muestras diferentes.

b) $V_{16,5} = \frac{16!}{11!} = 524160$ muestras distintas.

c) $CR_{16,5} = CR_{16+5-1,5} = \binom{20}{5} = 15504$ muestras.

Capítulo

2

Estadística Descriptiva Unidimensional

Estadística Descriptiva Bidimensional

Regresión

Números Índices

*Si la gente no cree que las Matemáticas son sencillas, es que no se ha dado
cuenta de lo complicada que es la vida.*
John von Neumann (1903-1957)

NOMENCLATURA

I.-Tabla de frecuencias de una variable estadística unidimensional

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	n_r	f_r	$N_r = n$	$F_r = 1$
Total	$\sum_{i=1}^r n_i = n$	$\sum_{i=1}^r f_i = 1$		

Estadística Descriptiva	Nombre
x_i	Un valor de la variable estadística
n	Número de valores recogidos
n_i	Frecuencia absoluta del valor x_i
$f_i = \frac{n_i}{n}$	Frecuencia relativa del valor x_i
N_i	Frecuencia absoluta acumulada del valor x_i
F_i	Frecuencia relativa acumulada del valor x_i
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^r x_i n_i}{n}$	Media aritmética
$m_g = \sqrt[n]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}}$	Media geométrica
$m_a = \frac{\sum_{i=1}^r n_i}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{x_i} n_i}$	Media armónica

Estadística Descriptiva (continuación)	Nombre
$Q_j = L_{i-1} + \frac{j \frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} c_i$ <p>Siendo $j = 1, 2, \text{ y } 3$</p>	Cuartil j -ésimo
$Me = Q_2$	Mediana o Segundo cuartil
$D_j = L_{i-1} + \frac{j \frac{n}{10} - N_{i-1}}{n_i} c_i$ <p>Siendo $j = 1, 2, \dots, 9$</p>	Decil j -ésimo
$P_j = L_{i-1} + \frac{j \frac{n}{100} - N_{i-1}}{n_i} c_i$ <p>Siendo $j = 1, 2, \dots, 99$</p>	Percentil j -ésimo
$R_{\text{int}} = Q_3 - Q_1$	Rango intercuartílico
$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$	Varianza para una muestra de tamaño n
$S^2 = Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}$	Varianza para datos repetidos de una muestra de tamaño n
$S = +\sqrt{S^2}$	Desviación típica de una muestra
$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{nS^2}{n-1}$	Cuasivarianza de una muestra de tamaño n. Estimador centrado o insesgado de la varianza poblacional. Algunos programas la denominan varianza muestral .
$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n-1} = \frac{nS^2}{n-1}$	Cuasivarianza para datos repetidos de una muestra de tamaño n . También denominada varianza muestral .
$s = +\sqrt{s^2}$	Desviación estándar de una muestra o Cuasidesviación típica de una muestra
$CV = \frac{s}{ \bar{X} }$, en tanto por uno. $CV = \frac{s}{ \bar{X} } 100$, en tanto por ciento.	Coefficiente de variación de Pearson
$g_1 = \frac{m_3}{(\sqrt{Var(x)})^3} = \frac{m_3}{S^3}$	Coefficiente de asimetría de Fisher. También se llama coeficiente de sesgo
$g_2 = \frac{m_4}{(\sqrt{Var(x)})^4} - 3 = \frac{m_4}{S^4} - 3$	Coefficiente de curtosis de Fisher. $\begin{cases} g_2 > 0, \text{ distribución leptocúrtica} \\ g_2 = 0, \text{ distribución mesocúrtica} \\ g_2 < 0, \text{ distribución platicúrtica} \end{cases}$

II.-Tabla de una variable estadística bidimensional (datos no repetidos)

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
	x_1	y_1	$x_1 y_1$	x_1^2	y_1^2
	x_2	y_2	$x_2 y_2$	x_2^2	y_2^2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_n	y_n	$x_n y_n$	x_n^2	y_n^2
Totales	$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n y_i$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n y_i^2$

Estadística Descriptiva Regresión	Nombre
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	Media aritmética de la variable x
$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$	Media aritmética de la variable y
$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$	Varianza de la variable x
$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2$	Varianza de la variable y
$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y}$	Covarianza de las variables x e y

III.- Tabla de frecuencias de una variable estadística bidimensional (datos repetidos)

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	$\dots$	y_s	$n_{i.}$
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1s}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2s}	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	n_{r1}	n_{r1}	$\dots$	n_{r1}	$n_{r.}$
$n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$		$n_{.s}$	$n_{..} = n$

Estadística Descriptiva Regresión	Nombre
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^r x_i n_{i.}}{n}$	Media aritmética de la variable x
$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^s y_j n_{.j}}{n}$	Media aritmética de la variable y
$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^r x_i^2 n_{i.}}{n} - \bar{x}^2$	Varianza de la variable x
$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^s y_j^2 n_{.j}}{n} - \bar{y}^2$	Varianza de la variable y
$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x} \bar{y}$	Covarianza de las variables x e y

Rectas de regresión	
$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$	Ecuación de la recta de regresión de y sobre x
$x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}(y - \bar{y})$	Ecuación de la recta de regresión de x sobre y

Coefficientes de correlación y de determinación lineal

$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$	Coefficiente de correlación lineal de Pearson $-1 \leq r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \leq 1$
$r^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 S_y^2}$	Coefficiente de determinación lineal $0 \leq r^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 S_y^2} \leq 1$ Se expresa en tanto por uno. También en tanto por ciento. En la recta de regresión de y sobre x el coeficiente de determinación, r^2 , indica el porcentaje de la variación de la variable respuesta, y, que se explica por la variación de la variable explicativa o variable controlada, x.