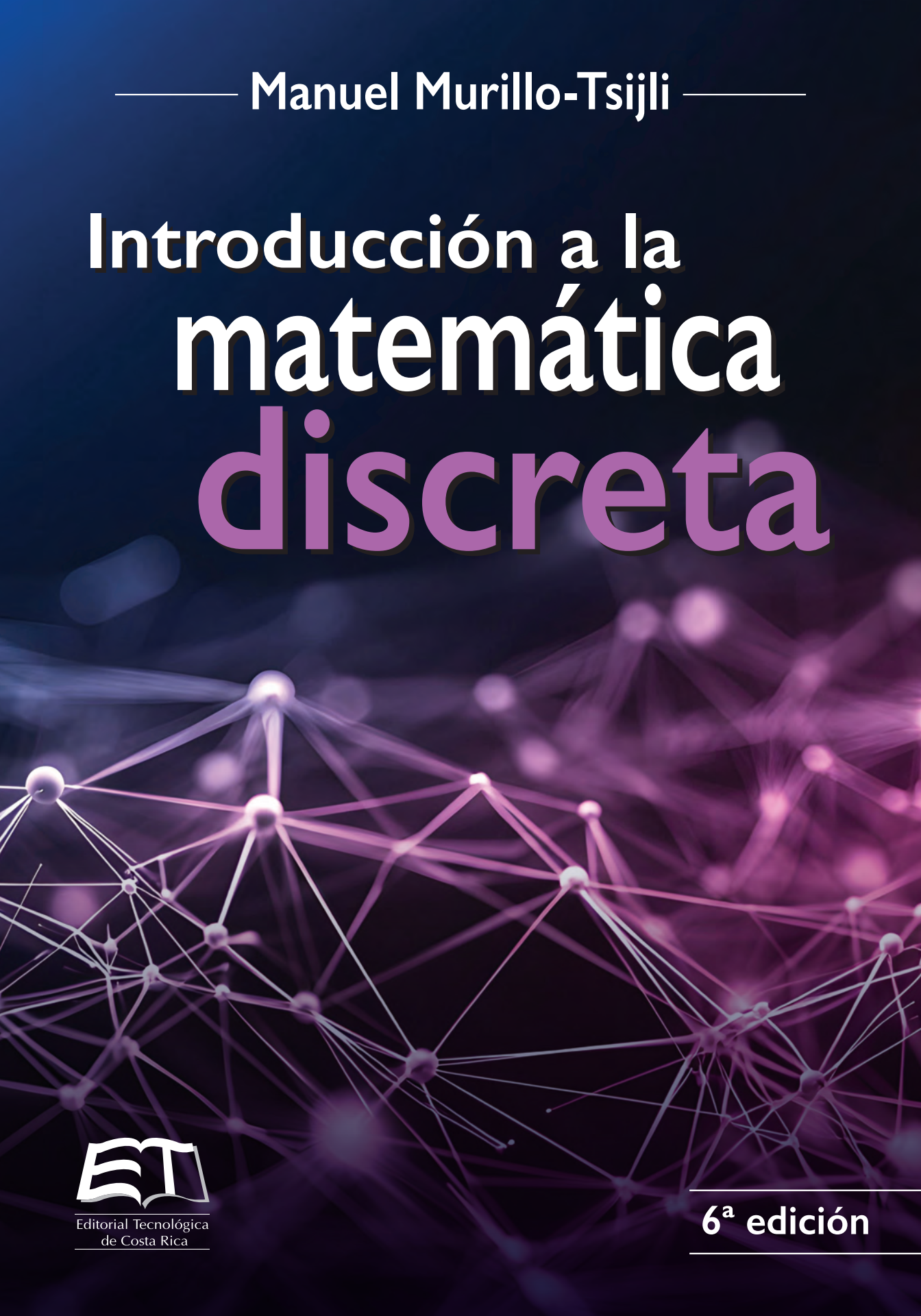
Manuel Murillo-Tsijli

Introducción a la matemática discreta



Editorial Tecnológica de Costa Rica

6ª edición

6ª edición

Introducción a la matemática discreta

Manuel Murillo-Tsijli

Editorial Tecnológica
de Costa Rica

Primera edición
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2004

Segunda edición
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2007

Tercera edición
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2009

Primera reimpresión
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2010

Cuarta edición
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2010

Primera reimpresión
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2013

Segunda reimpresión
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2014

Quinta edición
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2018

Sexta edición
Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2027

511.3
M977i6 Murillo-Tsijli, Manuel, autor/a.
Introducción a la matemática discreta / Manuel Murillo-Tsijli.
-- 6 edición. -- Cartago, Costa Rica : Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2027.
532 páginas ; 17.78 x 25.4 cm : ilustraciones.

Disponible también en formato digital.
ISBN: 978-9977-66-606-8
ISBN: 978-9977-66-607-5 (e-book)
Incluye bibliografía.
Incluye índice temático.
Incluye apéndice.

1. Matemáticas. 2. Teoría de conjuntos. 3. Funciones. 4. Inducción (matemáticas). 5. Recursividad -- Matemáticas. 6. Lógica y simbólica matemática. 7. Estructuras algebraicas. 8. Matemáticas discretas. I. II. Título.



TEC | Tecnológico de Costa Rica

Integrante


© Editorial Tecnológica de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica
editorial@tec.ac.cr
www.tec.ac.cr/editorial
Tel: (506) 2550-2297
Hecho el depósito de ley.
Impreso en Costa Rica.

A mi esposa Laura y a mis hijos Héctor, Felipe, Jimena y Valeria,
por su presencia.
Su amor alumbra todos mis caminos;
sus sonrisas me alegran el espíritu.

Contenido

Presentación **11**

Prólogo **15**

Simbología **19**

Capítulo 1. Fundamentos de lógica **23**

1.1 Introducción 25

1.2 Definiciones básicas 34

1.3 Conectivas lógicas 44

1.4 Tablas de verdad 53

1.5 Leyes de la lógica 60

1.6 Inferencias lógicas 66

1.7 Formas normales 80

1.8 Cuantificadores 84

1.8.1. Proposiciones abiertas 84

1.8.2. Cuantificadores 85

1.8.3. Proposiciones con dos cuantificadores 89

1.9 Tablas de predicados 95

1.10 Inferencias cuantificadas 99

1.11 Métodos de demostración 102

Capítulo 2. Teoría de conjuntos **111**

2.1 Definiciones básicas 113

2.2 Conjuntos numéricos 119

2.3 Operaciones entre conjuntos 127

2.4 Diagramas de Venn 136

2.5 Intervalos reales 141
2.6 Leyes de conjuntos 147
2.7 Cardinalidad 152
2.8 Resultados y demostraciones 164
2.8.1. Demostración de inclusión de conjuntos 164
2.8.2. Demostración de igualdades de conjuntos 165
2.8.3. Demostración de implicaciones 168
2.8.4. Demostración de equivalencias 171
2.9 Familias de conjuntos 177
2.10 Paradoja de Bertrand Russell 183

Capítulo 3. Relaciones binarias 185

3.1 Definiciones básicas 187
3.2 Operaciones entre relaciones 193
3.3 Matriz de una relación 203
3.4 Operaciones entre matrices 209
3.5 Grafo dirigido asociado a una relación 219
3.6 Propiedades de las relaciones 222
3.7 Relaciones de equivalencia 235
3.8 Relaciones de orden 243
3.9 Grafos no dirigidos y árboles 251
3.9.1. Trayectorias y circuitos de Euler 255
3.9.2. Trayectorias y circuitos de Hamilton 258
3.9.3. Árboles 260

Capítulo 4. Funciones 267

4.1 Conceptos y definiciones 269
4.1.1. Función biyectiva 278
4.1.2. Función definida a trozos 283
4.2. Dominio máximo de una función 289
4.3 Propiedades de las funciones 292

4.4 Funciones lineal y cuadrática 299
4.4.1. Función lineal 299
4.4.2. Función cuadrática 301
4.5 Operaciones con funciones 308
4.5.1. Composición de funciones 308
4.5.2. Operaciones aritméticas entre funciones 313
4.6 Funciones inversas 320
4.7 Algunas funciones especiales 327
4.8 Principios de conteo 331
4.8.1. Permutaciones y combinaciones 331
4.8.2. Principio fundamental de conteo 334
4.8.3. Cardinalidad de conjuntos de funciones 335
4.9 Equipotencia 339

Capítulo 5. Principio de inducción y recursividad 347

5.1 Notación Σ y Π 349
5.2 Principio de inducción matemática 356
5.2.1. Proposiciones que involucran igualdades 357
5.2.2. Proposiciones que involucran divisibilidad 364
5.2.3. Proposiciones que involucran desigualdades 367
5.2.4. Procedimiento para el cálculo de S_p 369
5.3 Recursividad 377

Capítulo 6. Estructuras algebraicas 391

6.1 Estructuras algebraicas 393
6.2 Grupos 404
6.3 Otros grupos 416
6.4 Subgrupos 420
6.5 Homomorfismos de grupos 427

Apéndice A. Solución de ejercicios 435

Referencias 519

Índice temático 521

Sobre el autor 531

Presentación

Esta obra va dirigida, principalmente, a aquellas personas que encuentran en las matemáticas ese lenguaje universal con el cual se pueden explicar los fenómenos en nuestro entorno y, por supuesto, a quienes ven en ella un mágico camino que les llevará hacia la búsqueda del conocimiento orientado al desarrollo científico y tecnológico.

Contiene los temas que habitualmente se imparten en los diferentes cursos, tanto iniciales como intermedios, de matemática discreta de nivel universitario, como base para una formación académica sólida.

Su objetivo principal es presentar los contenidos de forma rigurosa y a la vez atractiva; para ello, se han escogido diversos ejemplos en los cuales se observan los métodos de demostración usuales en la matemática. Se ha tratado de que los temas se asimilen en forma paulatina; con ese propósito, se han incluido más de 1400 ejercicios distribuidos al final de cada sección. Estos ilustran cada uno de los temas expuestos y se han clasificado en tres niveles, de acuerdo con los conceptos o procedimientos que se deban aplicar para resolverlos. De la mayoría se puede encontrar la solución, parcial o completa, en el apéndice A.

A lo largo del texto se desarrollan 522 ejemplos que le ayudarán a asimilar conocimientos y comprender los conceptos y procedimientos que se presentan. Estos ejemplos son una buena guía para resolver los ejercicios propuestos, pues se ha intentado que sean bastante explicativos. En cada uno de ellos, observe el método expuesto y el razonamiento aplicado; recuerde que el procedimiento que se presenta para resolverlos no siempre es único. Quizá encuentre uno igual de efectivo y eficiente.

Las definiciones y teoremas se han resaltado en recuadros de fondo gris para enfatizar su importancia. Por otro lado, para mayor claridad en la exposición de los temas, el final de cada ejemplo se indica con el símbolo ■ y el final de cada demostración de las distintas proposiciones con un □.

Puede suceder que algunos contenidos de este libro ya sean de su dominio; sin embargo, se busca fortalecer aquellos que, por su importancia, se convierten en herramientas esenciales para la comprensión de los temas en cursos posteriores, así como para su formación académica integral y su desarrollo profesional.

En el capítulo 1 se presenta una introducción a la lógica. Se inicia con las proposiciones lógicas, se enuncian las leyes esenciales de la lógica, las reglas de inferencia, cuantificadores y sus diversas aplicaciones. Se presenta un resumen de los principales métodos de demostración que se utilizan a lo largo del texto y un interesante aporte sobre la enseñanza de la demostración de implicaciones, del profesor M.Sc. Giovanni Sanabria Brenes.

En el capítulo 2 se introduce el tema de la teoría de conjuntos. Se inicia con las operaciones básicas de conjuntos, simplificación de expresiones, además de su representación mediante diagramas de Venn y su cardinalidad. Se incluye una sección en la cual se profundiza sobre la demostración de proposiciones que involucran conjuntos, y las últimas secciones de este capítulo se dedican al tema de las familias de conjuntos y a la paradoja de Russell.

En el capítulo 3 se presenta el tema de las relaciones binarias, sus operaciones básicas y algunas propiedades que permiten clasificarlas. Se profundiza en las relaciones de equivalencia y en las de orden, particiones inducidas, grafos, matriz asociada a una relación y algunas aplicaciones. Finaliza con la presentación de los circuitos eulerianos y hamiltonianos y el tema de árboles.

En el capítulo 4 se introduce el tema de las funciones desde un punto de vista teórico y práctico, como extensión de una relación binaria. Se profundiza en sus propiedades, particularmente en los conceptos de inyectividad y sobreyectividad. Se definen las funciones lineales, cuadráticas y las definidas a trozos. Luego, se abordan las operaciones entre funciones, dominio máximo y las funciones inversas. Finaliza con los temas de conteo y equipotencia.

En el capítulo 5 se presenta el método de demostración conocido como el *principio de inducción matemática*, que se aplica, principalmente, para demostrar proposiciones con cuantificadores que involucran igualdades, desigualdades y divisibilidad. Por último, se aborda el tema de la recursividad, sobre todo en el campo de las relaciones recurrentes y la búsqueda de su fórmula explícita, mediante el análisis hacia atrás y la ecuación característica; en esta sección se incluyen algunos ejemplos interesantes relacionados con el análisis numérico aplicado a la solución de ecuaciones.

En el capítulo 6 se hace una breve, pero rigurosa, introducción al tema de las estructuras algebraicas, con especial interés en grupos y subgrupos.

En cada una de las secciones de los diferentes capítulos se propone una lista de ejercicios. En el apéndice A se presenta la solución, parcial o completa, de la mayoría de esos ejercicios propuestos; en algunos, una simple sugerencia, y en otros se recomienda que repase algún ejemplo en particular. Esto es importante para el proceso de aprendizaje y la puesta en práctica de los diferentes conceptos estudiados.

Intencionalmente, la bibliografía es extensa y los libros, artículos, así como los sitios de Internet que se incluyen, pueden servir para profundizar en los temas relacionados con esta teoría.

Como aportes de esta sexta edición se incluyen:

- Una revisión exhaustiva y una mejora didáctica en la presentación de los temas. Se ha puesto especial cuidado en la exposición de los temas, de manera que sea lo más explicativa posible y que incluso puedan estudiarse de forma autodidacta.
- La inclusión de una cantidad adecuada de ejemplos, los necesarios para cada nivel, con el propósito de favorecer el aprendizaje.
- La inclusión de una cantidad considerable de ejercicios. La gran mayoría de los ejercicios propuestos cuenta con la solución parcial o completa.
- La clasificación de todos los ejercicios en tres niveles de dificultad, de acuerdo con los conceptos o procedimientos que se deban aplicar para resolverlos.
  - **Nivel 1.** Su solución se obtiene al efectuar cálculos directos y sus desarrollos suelen ser cortos o mecánicos.
  - **Nivel 2.** Su solución corresponde a demostraciones de proposiciones o se obtiene a partir de la aplicación de teoremas.
  - **Nivel 3.** Su solución involucra la aplicación de teoremas y algunos desarrollos lógicos o algebraicos de mayor nivel.

  Esto se indica con las claves [**N1**], [**N2**] y [**N3**], respectivamente. Además, en algunas ocasiones, un mismo enunciado se aplica para varios ejercicios y se combinan los de nivel 1 con los de nivel 2, en donde la dificultad es progresiva; esto se indica con [**N1-N2**] y, de forma análoga, con [**N2-N3**]. Este punto, en particular, puede ayudar a la persona estudiante a planificar su estudio y a la persona docente a preparar sus lecciones.

- La actualización de datos, fechas y resultados.
- La inclusión de secciones y subsecciones en el desarrollo de los temas.
- El uso de una calculadora programable y el graficador del *software* libre GeoGebra para la obtención o comprobación de la respuesta en algunos de los ejercicios propuestos. Esto se sugiere mediante los símbolos  y , respectivamente.

Todo ello, sin duda, hará que la exposición de los temas sea más clara y su estudio individual más agradable.

Para finalizar, agradezco profundamente a las siguientes personas:

- Evelyn Agüero Calvo, Manuel Alfaro Arias, Silvia Calderón Laguna, Jeffry Chavarría Molina, Jorge Luis Chinchilla Valverde, José Luis Espinoza Barboza, Jorge Monge Fallas, Félix Núñez Vanegas, Giovanni Sanabria Brenes y Rosalinda Sanabria Monge, del Tecnológico de Costa Rica, y María Alicia León Solís, de la Universidad de Costa Rica, por sus valiosas sugerencias y oportunos comentarios a las ediciones anteriores de esta obra.
- José Alfredo Araya Vega, de la Universidad Estatal a Distancia, por la revisión de esta sexta edición.
- Edison de Faria Campos, de la Universidad de Costa Rica, por su prólogo, pertinente y actualizado, que dimensiona las virtudes de este texto.

Manuel Murillo Tsijli

Prólogo

Matemática discreta, también conocida como matemática finita, es el estudio de estructuras matemáticas que son fundamentalmente discretas, en el sentido de que no requieren la noción de continuidad.

Algunos de los conceptos de la matemática discreta no son nuevos, pero como disciplina matemática independiente, es relativamente nueva y ha tenido un crecimiento vertiginoso en las últimas décadas, principalmente debido a su conexión con las ciencias de la computación y su rápido desarrollo.

Los que introdujeron las nociones básicas de la matemática discreta fueron los matemáticos de la India. En el siglo VI, ellos ya conocían las fórmulas para, primero, el número de permutaciones de un conjunto con n elementos y, segundo, para el número de subconjuntos, de cardinalidad k, de un conjunto de n elementos. La matemática combinatoria tuvo sus orígenes en los trabajos de Pascal y de De Moivre durante el siglo XVII, y siguió su desarrollo con Jacob Bernoulli y Leonhard Euler, principalmente con las ideas de este último sobre la teoría de grafos. Por otro lado, los métodos probabilísticos iniciados por Paul Erdös se han convertido en una potente herramienta para la combinatoria y la teoría de probabilidad. En realidad, la matemática discreta es una disciplina que unifica diversas áreas de las matemáticas (combinatoria, probabilidad, aritmética y grafos, entre otras) y sus conceptos aparecen, con frecuencia, en muchas ramas de las matemáticas y de otras disciplinas.

La matemática discreta es el ámbito de las matemáticas que se relaciona más de cerca con las computadoras, pues en estas la información se almacena y se manipula en forma discreta (palabras formadas por ceros y unos), se necesita contar objetos (unidades de memoria, unidades de tiempo), estudiar relaciones entre conjuntos finitos (búsquedas en bases de datos) y analizar procesos que incluyan un número finito de pasos (algoritmos). Entonces los conceptos y notaciones de la matemática discreta son útiles para estudiar y expresar objetos o problemas mediante algoritmos y lenguajes de programación.

Encontramos aplicaciones de la matemática discreta en el tratamiento digital de datos, la teoría de la información, física estadística, biología molecular, geometría discreta y computacional, criptografía, modelos discretos aplicados a la industria y a las ciencias de la computación. Debido a sus importantes aplicaciones, el estudio de las estructuras discretas es una de las áreas que ha adquirido mayor relevancia e interés en las matemáticas durante las últimas décadas, especialmente en el campo de la inteligencia artificial, pues proporciona las bases teóricas para el diseño de algoritmos, la representación de datos, los procesos de optimización y la toma de decisiones.

Conozco al autor de la obra desde que él era estudiante de matemática en la Universidad de Costa Rica. En 1997 fui su director de tesis de licenciatura en Matemática Pura y, desde entonces, hemos coincidido en varias actividades académicas y científicas.

Una excelente obra en la que los temas son presentados de forma clara, precisa, elegante y con el rigor matemático necesario. En cada uno de los capítulos se hace una breve introducción y, además, los distintos conceptos y resultados importantes se ilustran con numerosos, variados y pertinentes ejemplos resueltos que figuran intercalados entre el desarrollo teórico de cada sección; cada una de estas secciones finaliza con una serie de ejercicios propuestos que de seguro ayudarán a afianzar los conocimientos adquiridos con su estudio.

Los ejercicios propuestos se clasifican en tres grupos, según su nivel de dificultad: desde los más simples (nivel 1) hasta los más complejos (nivel 3), con un nivel intermedio (nivel 2). Esta estrategia didáctico-pedagógica constituye un estímulo y un reto para las personas estudiantes. Además, el apéndice A contiene las soluciones, parciales o completas, de la mayoría de estos ejercicios propuestos en cada una de las secciones, lo cual, sin duda, será de gran ayuda para las personas lectoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En esta edición se han actualizado datos, fechas, bibliografía y enlaces a páginas web, y se han mejorado algunos elementos gráficos mediante el uso de sombreados y líneas más visibles en los cuadros, tablas y figuras.

Respecto al uso de tecnologías digitales, se enfatiza el uso de la calculadora programable o del *software* libre GeoGebra para resolver o verificar aquellos ejercicios o problemas que se consideren pertinentes. Para ello se utilizan los símbolos correspondientes  y .

Finalmente, se incorporan algunos temas. Entre ellos:

- Los árboles, que son tipos abstractos de datos cuya estructura topológica imita la estructura jerárquica de un árbol. Son útiles para indexar datos, dirigir el tráfico de redes en tablas de enrutamiento, representar posibles movimientos de un jugador de ajedrez y optimizar la toma de decisiones.
- Los circuitos eulerianos son caminos en un grafo que recorren cada arista exactamente una vez, con inicio y final en un mismo vértice. Estos son importantes para optimizar rutas y resolver problemas de recorridos eficientes en redes de transporte, informáticas o de reparto. También son útiles para modelar estructuras moleculares y predecir algunas reacciones químicas.
- Los circuitos hamiltonianos son caminos en un grafo que recorren cada vértice exactamente una vez, con inicio y final en un mismo vértice. Son importantes para encontrar la ruta más corta posible que visite todos los puntos (vértices) una única vez y regrese al punto de partida. También son útiles en el diseño de circuitos, para modelar la secuencia del ADN o la disposición de proteínas.

Estoy seguro de que este libro, especialmente esta reciente edición, será de interés y utilidad para estudiantes de computación, matemática e ingenierías, así como para la comunidad académica en general.

Edison De Faria Campos

Profesor catedrático de la Escuela de Matemática,
Universidad de Costa Rica

Miembro de la Asociación de
Matemática Educativa (ASOMED)

Especialista del área Relaciones y Álgebra del
Proyecto de Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

Miembro del Consejo Editorial de
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

Julio del 2026

Simbología

$P,\ Q,\ R,\ \ldots$	denotan proposiciones
$\neg P$	negación de P
$P \wedge Q$	conjunción de P y Q
$P \vee Q$	disyunción de P y Q
$P \veebar Q$	disyunción exclusiva de P y Q
$P \to Q$	P implica Q
$P \leftrightarrow Q$	P si y solo si Q
$P \Rightarrow Q$	$P \to Q$ es una tautología
$P \Leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$ es una tautología
$P \equiv Q$	P equivalente a Q
V_0	tautología
F_0	contradicción
$\therefore$	por lo tanto
$(\Rightarrow\Leftarrow)$	contradicción
$\exists$	cuantificador existencial (existe)
$\nexists$	no existe
$\forall$	cuantificador universal (para todo)
$A,\ B,\ C,\ \ldots$	denotan conjuntos
$a,\ b,\ c,\ \ldots$	denotan elementos
$a \in A$	a pertenece a A
$A \subseteq B$	A es subconjunto de B
$A \subset B$	A es subconjunto propio de B
$[a, b]$	intervalo cerrado
$]a, b[$	intervalo abierto
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{N}^*$	$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{N}_n$	$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$\mathbb{Z}$	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} - \{0\}$
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$	conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$A - B$	diferencia de conjuntos
$A \cup B$	unión de conjuntos
$A \cap B$	intersección de conjuntos
$A \triangle B$	diferencia simétrica de conjuntos
$\text{card}(A)$ o $\lvert A\rvert$	cardinalidad de A
$\varnothing$ o $\{\,\}$	conjunto vacío
$\mathcal{U}$	conjunto universo
$\mathcal{P}(A)$ o 2^A	conjunto potencia de A
$\overline{A}$ o $\complement_A^{\mathcal{U}}$	complemento de A
$A \approx B$	conjuntos equipotentes
$a \approx b$	aproximación de números
$A \preceq B$	A de menor potencia que B
$A \times B$	conjunto producto de A y B
(a, b), (a, b, c)	par ordenado y triplete ordenado
$\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, ...	denotan relaciones
$a\mathcal{R}b$	a se relaciona con b
$\overset{\bullet}{a}$ o $\overline{a}$ o $[a]$	clase de equivalencia de a
$A/\mathcal{R}$	conjunto cociente
$D_{\mathcal{R}}$	dominio de $\mathcal{R}$
$\mathcal{R}[A]$	rango de $\mathcal{R}$
$G_{\mathcal{R}}$	gráfico de $\mathcal{R}$
$\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$	composición de las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$
f, g, h, ...	denotan funciones
$f \circ g$	composición de las funciones f y g
$\lvert x\rvert$	valor absoluto de x
$\lceil x \rceil$	función techo
$\lfloor x \rfloor$	función piso o parte entera
$\chi_A(x)$	función característica de A
$f(E)$	imagen del conjunto E

$f^{-1}(F)$	imagen inversa del conjunto F
$f^{-1}(x)$	criterio de la función inversa de f
$\mathcal{O}(s)$	órbita de s
$n!$	factorial de n
$(\mathcal{G}, *)$	grupo
$*$, $\perp$, $\otimes$, $\oplus$, ...	denotan operaciones binarias
$\mathcal{H} < \mathcal{G}$	$\mathcal{H}$ subgrupo de $\mathcal{G}$
S_n	grupo simétrico
$o(\mathcal{G})$	orden del grupo $\mathcal{G}$
$\varphi(n)$	función de Euler
$\equiv$	equivalencia lógica o congruencia numérica
$E_p(m)$	exponente de p en factorización prima de m
N_f	núcleo del homomorfismo f
$\mathbb{Z}_n$	partición de $\mathbb{Z}$ módulo n
$P(n, r)$	permutaciones de n en r
$C(n, r)$	combinaciones de n en r
B^A	conjunto de funciones de A en B
$\mathcal{I}(A, B)$	conjunto de funciones inyectivas de A en B
$\mathcal{B}(A, B)$	conjunto de funciones biyectivas de A en B
∞	infinito
$\aleph_0$	aleph cero
$\sum$	suma
$\prod$	producto
$a\|b$	a divide a b
$\text{mcd}(a, b)$	máximo común divisor de a y b
$\text{mcm}(a, b)$	mínimo común múltiplo de a y b
sii	si y solo si
hqdq	hay que demostrar que
■	fin de un ejemplo
□	fin de una demostración

Capítulo 1
Fundamentos de lógica

"Tweedledee (a Alicia): *Sé lo que estás pensando, pero no es así de todas formas.* Tweedledum: *Al contrario, si fue así, podría ser; y si fuera así, sería; pero como no es, no es. La lógica es así*".

Lewis Carroll

Introducción
Definiciones básicas
Conectivas lógicas
Tablas de verdad
Leyes de la lógica
Inferencias lógicas
Formas normales
Cuantificadores
Tablas de predicados
Inferencias cuantificadas
Métodos de demostración

En este capítulo se hace una formalización de la lógica, aquella que se utiliza todos los días para razonar, debatir, deducir, comprender e inferir. Cuando se dice, por ejemplo: "solo las personas mayores de 18 años pueden votar" y "Héctor tiene 17 años", se concluye lógicamente que "Héctor no puede votar"; o cuando se dice que la expresión "el hielo es caliente" es falsa, sin duda se emite un juicio de valor o conclusión a partir del conocimiento adquirido con anterioridad o a partir de las diferentes premisas.

Se inicia con la terminología propia de toda teoría matemática, luego con la particular de la lógica formal y simbólica: valor de verdad, falacias, conectivas, proposiciones, cuantificadores, entre otros términos, además, se clasifican las proposiciones con base en las tablas de verdad. Luego se ven las leyes de la lógica y las reglas de inferencia, con su respectiva aplicación. Al final se definen los cuantificadores y se trabaja con proposiciones cuantificadas.

Para profundizar el tema tratado en este capítulo, se recomienda consultar las referencias bibliográficas [1], [2], [3], [4], [14] y [23].

1.1 Introducción

Para algunas personas, la *lógica* es la teoría del pensar, la ciencia de los límites del pensar justo y razonado; para otras, se puede definir brevemente como el estudio del razonamiento. En este caso, la lógica es la teoría de la inferencia (consulte [3]). Su estudio es importante porque ayuda a razonar de forma correcta y, con ello, a no incurrir en las llamadas falacias argumentativas. Las leyes de la deducción son innatas en los seres humanos, pero su uso no es obligado y pueden ser ignoradas, incluso, como es el caso de algunas normas morales, sin darse cuenta de ello. Conocer estas leyes a profundidad permite su aplicación.

Algunos de los argumentos lógicos más originales corresponden al matemático y reverendo Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), conocido por su seudónimo Lewis Carroll, quien además fue dibujante, fotógrafo y poeta. Catedrático

de la Universidad de Cambridge, en Inglaterra, y autor prolífico, entre sus obras destacan *El juego de la Lógica*, *Lógica Simbólica*, *Alicia en el País de las Maravillas* y *Silvia y Bruno*. Él mismo explica en el prólogo de su bella obra *Lógica Simbólica* las razones por las cuales es importante el estudio de este tema:

> Ella (la lógica simbólica) dará a usted claridad de pensamiento, la habilidad para ver su camino a través de un acertijo, el hábito de arreglar sus ideas en una forma adecuada y clara, y, lo más valioso, el poder para detectar falacias y separar las piezas de los argumentos endebles e ilógicos que encontramos continuamente en libros, periódicos, discursos, y aún [*sic*] sermones, y que fácilmente engañan a aquellos que nunca se han tomado la molestia de dominar este fascinante arte (consulte [19]).

El concepto de lógica tiene sus orígenes en los eleáticos, probablemente en Zenón de Elea (490-430 a.C.), discípulo de Parménides, aunque la primera lógica sistemática se debe a Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) quien, en uno de los escritos referentes a este tema, se ocupa de las teorías del concepto del *juicio*, de la *conclusión* y de la *prueba*, y es a partir de él que queda constituida como una disciplina propia.

La llamada *lógica inductiva* se caracteriza por el razonamiento de que, a partir de observaciones específicas, se conduce a conclusiones generales y por supuesto que con ella es posible obtener una idea correcta de lo que podría ser una buena conclusión, pero no se puede pensar que algo es verdadero solamente porque ha sido verdadero en cierto número de casos.

Otro tipo de razonamiento es el método deductivo, que consiste en relacionar conocimientos que se suponen verdaderos de manera que se obtienen nuevos resultados. En este caso, se hará una separación de la lógica clásica y se utilizarán símbolos matemáticos, por lo que se hablará de la *lógica simbólica*.

Es usual plantear problemas o acertijos con la finalidad de retar nuestras habilidades lógicas, en donde el razonamiento es fundamental para resolverlos. Algunos de ellos se resuelven mediante el análisis de casos; otros, mediante el descarte de posibilidades; y quizás, en varios de ellos, una redacción perspicaz forme parte de la clave de su solución. Lo importante es que en todos ellos se potencia el uso de la lógica.

El siguiente ejemplo corresponde a una variación de algunos acertijos del gran matemático estadounidense Raymond Smullyan (1919-2017), quien fue lógico, filósofo, ajedrecista y mago profesional (consulte [25]).

Ejemplo 1. En una lejana galaxia existe un planeta llamado *Vacilonia*, sus habitantes, los vacilonios, están clasificados en dos categorías: los *sinceros* y los *mentirosos*. Los sinceros siempre dicen la verdad, mientras que los mentirosos siempre mienten. Un terrícola llega a este planeta y se encuentra con dos vacilonios, A y B. El vacilonio A dice: "B es sincero o yo soy mentiroso". ¿Qué son A y B?

Solución. Si A fuese mentiroso, lo que dijo sería mentira, con lo cual la verdad sería "B es mentiroso y yo soy sincero", pero esto es imposible, ya que se estaría afirmando que A es mentiroso y sincero a la vez. Por lo tanto, se concluye que A es sincero, y con ello, lo que dice es verdad, de donde B es sincero. Se concluye que tanto A como B son sinceros. ■

Ejemplo 2. Dos amigos matemáticos hablan de sus familias. Uno le pregunta al otro si tiene hijos y qué edades tienen, la respuesta simple se disfraza de acertijo y el diálogo fue:

- Sí, tengo tres hijas. El producto de sus edades es, actualmente, 36 y la suma es justamente el número de la casa en que tú vives. ¿Aciertas sus edades?
- A decir verdad, todavía no puedo, pues me falta un dato– le responde luego de algunos minutos.
- Tienes razón, le contestó. ¡La mayor toca piano!

Con esta información, puede usted deducir las edades de las hijas.

Solución. Para A, B, C las posibles edades, se tienen solo 8 casos en donde su producto es 36:

Casos	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1	1	1	1	2	2	3
B	1	2	3	4	6	2	3	3
C	36	18	12	9	6	9	6	4
Suma	38	21	16	14	13	13	11	10

Observe que solo en los casos 5 y 6 se obtiene una suma igual, de manera que si le faltaba un dato, el amigo vive en la casa número 13. En ambos casos hay mellizas, pero solo en el caso 6 se puede hablar de "la mayor"; por lo tanto, las edades son 2, 2, 9. ■

Los siguientes ejercicios pueden ser resueltos con base en su destreza mental. Ordene bien sus ideas y, en algunos, analice o deseche casos. Para los ejercicios relacionados con sinceros y mentirosos repase el ejemplo 1.

Ejercicios (sección 1.1)

1. [**N1**] La oración "En hesta orasión hay tres errores" tiene tres errores, ¿cuáles son?

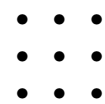
2. [**N1**] Manuel afirma que "Solo hay tres clases de personas, las que saben contar y las que no". ¿Qué se puede concluir?

3. [**N1**] Un hombre miraba un retrato y alguien le preguntó: ¿Quién aparece en el retrato? Él contestó: "yo no tengo hermanos ni hermanas, pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre". ¿Qué retrato está viendo? Si el hombre hubiera respondido "yo no tengo hermanos ni hermanas, pero el hijo de este hombre es el hijo de mi padre". ¿Qué retrato está viendo?

4. [**N1**] En una fiesta hay diez niños. Se les pide que formen cinco filas de manera que haya cuatro en cada una, y que todos ellos estén en alguna fila. ¿De qué forma deben distribuirse?

5. [**N1**] ¿Cómo se pueden formar 4 triángulos iguales (equiláteros) con 6 palitos del mismo tamaño (sin cortarlos)?

6. [**N1**] Considere nueve puntos distribuidos de la siguiente manera

   Con un trazo que contenga solamente cuatro segmentos de recta y sin levantar el lápiz, una todos los puntos.

7. [**N1**] Al visitar una tienda, es posible hallar preciosos muebles, el más antiguo de 1825. Deduzca cuándo y dónde fue tallado cada uno y el tipo de madera, si se cuenta con los siguientes datos: la silla es un cuarto de siglo más antigua que la cama (que no es francesa); el mueble de cedro, el más antiguo, tiene un cuarto de siglo más que el de fresno; la mesa es austriaca y el mueble de roble, suizo (pero no de 1850).

8. [**N1**] Un niño y una niña están sentados en los escalones afuera de su escuela. "Yo soy un niño", dijo quien tiene el pelo negro. "Yo soy una niña", dijo quien tiene el pelo rojo. Si al menos uno de ellos está mintiendo, ¿quién tiene el pelo rojo?

9. [**N1**] Manuel fue a consultar a su biblioteca tres tomos de una colección de cuentos, colocados de la manera usual, el primer tomo a la izquierda; el segundo, al centro; el tercero, a la derecha. Cada tomo tenía 100 hojas y cuando los abrió se dio cuenta de que una polilla había atravesado desde la primera hoja del primer tomo hasta la última hoja del tercero. ¿Cuántas hojas atravesó la polilla?

10. [**N1**] Determine el número X que hace falta en cada una de las siguientes series o arreglos de números.

    (a) $7 - 8 - X - 13 - 17$

    (b) $3 - X - 31 - 95 - 283 - 851$

    (c) $17 - 19 - 22 - 16 - X - 13 - 32$

    (d) $2 - 5 - 15 - 18 - 54 - 57 - 171 - X$

    (e) $60 - 30 - 28 - X - 12 - 6 - 4$

    (f)

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	6	9	36	41	246	X

11. [**N1**] Determine el sexto término de la siguiente serie



12. [**N1-N2**] Encuentre el dígito asociado con cada letra utilizada en la suma de manera que esta suma sea aritméticamente correcta y a letras distintas les correspondan dígitos distintos. Como es natural en el sistema decimal, los posibles dígitos son 0, 1, 2, ..., 8, 9.

    (a)
$$\begin{array}{cccc} & X & Y & Z \\ + & X & Y & Y \\ \hline & 7 & 7 & 7 \end{array}$$

    (b)
$$\begin{array}{ccccc} & S & E & N & D \\ + & M & O & R & E \\ \hline M & O & N & E & Y \end{array}$$

    (c)
$$\begin{array}{ccccc} & T & R & E & S \\ & T & R & E & S \\ + & T & R & E & S \\ \hline N & U & E & V & E \end{array}$$

13. [**N2**] Sobre una clave secreta de tres dígitos se le dan los siguientes datos:

2	5	7	Un dígito es correcto y en el lugar adecuado
2	1	4	Un dígito es correcto pero en el lugar equivocado
9	3	5	Los tres dígitos son incorrectos
7	0	2	Dos dígitos son correctos pero en el lugar equivocado
5	9	0	Un dígito es correcto pero en el lugar equivocado

donde los posibles dígitos son 0, 1, 2, ..., 8, 9. ¿Puede usted deducir la clave correcta?

14. [**N2**] Se tienen ocho esferas metálicas de igual forma y tamaño. Siete de ellas pesan lo mismo y una pesa ligeramente más que las demás. Se dispone de una balanza de dos platillos que permite comparar pesos. ¿Cuál es el número mínimo de pesadas necesario para identificar con certeza la esfera de mayor peso?

15. [**N2**] Una persona necesita recoger 5 litros de agua de una laguna, pero solo dispone de dos jarras, una de 7 litros y otra de 4 litros. Describa el proceder de esta persona para lograr su cometido.

16. [**N2**] Suponga que el vacilonio A dice: "yo soy un mentiroso o, en caso contrario, uno más uno es igual a tres. ¿Qué se puede concluir?

17. [**N2**] Alguien le pregunta al vacilonio A "¿es usted sincero?" y él responde: "si yo soy sincero, entonces me comeré mi sombrero". Concluya que A debe comerse el sombrero.

18. [**N2**] Es conocido que a los vacilonios les gusta la pimienta. Hubo un robo de esta especia y los tres sospechosos fueron A, B y C. En el juicio A dijo que B era inocente y B dijo que C era culpable. Se sabe que solo hay un culpable y que ningún inocente mintió y ningún culpable dijo la verdad pues, como es sabido, los que roban pimienta nunca dicen la verdad. ¿Quién se robó la pimienta?

19. [**N2**] Tres vacilonios han llegado a la Tierra. Se le pregunta al primero si es un mentiroso. Este responde a la pregunta. El segundo dice entonces que el primero negó ser un mentiroso. Finalmente, el tercero afirma que el primero es realmente un mentiroso. ¿Cuántos de los vacilonios eran mentirosos? ¿Qué era el segundo vacilonio?

20. [**N2**] Nos encontramos a tres vacilonios A, B y C que han llegado a la Tierra. Un terrícola le pregunta a A "¿eres sincero o mentiroso?"; responde A, pero el terrícola no pudo escucharlo y por eso le pregunta a B "¿qué ha dicho A?" y B le responde "A ha dicho que es un mentiroso". Pero al mismo tiempo C dice "no le crea a B, está mintiendo". ¿Qué son B y C?

21. [**N2**] De nuevo nos encontramos a tres vacilonios A, B y C. Pero esta vez el terrícola le pregunta a A "¿cuántos sinceros hay entre ustedes?"; de nuevo responde A, pero el terrícola no pudo escucharlo y por eso le pregunta a B "¿qué ha dicho A?" y B le responde "A ha dicho que hay un sincero entre nosotros". Pero al mismo tiempo C dice "no le crea a B, está mintiendo". ¿Qué son B y C?

22. [**N2**] En esta oportunidad, usted se encuentra en Vacilonia. Se sabe que en Vacilonia hay hombres y mujeres y que cada uno puede ser sincero o mentiroso. Usted va a un baile de máscaras y se encuentra con un par de vacilonios, A y B. Usted no puede determinar el sexo ni la categoría de cada uno de ellos; sin embargo, A afirma: "ambos somos mentirosos(as)" y B afirma: "ambos somos mujeres". ¿Qué son A y B?

23. [**N2**] A y B, aburridos de ser sinceros, decidieron cambiar por una semana. Ahora, A sería sincero solamente los lunes, martes y miércoles, y mentiroso el resto de la semana; B sería sincero solamente los jueves, viernes y sábado, mentiroso los otros días. Se encuentran un día de esa semana y A dice: "ayer no dije la verdad". B le responde: "ayer yo también mentí". ¿Qué día se encontraron los vacilonios A y B?

24. [**N3**] Se tienen cuatro mujeres: Alicia, Bárbara, Carolina y Diana, con sus ocupaciones: abogada, bióloga, costurera y dentista, respectivamente. Cada una de ellas tiene un automóvil cuyas marcas son: Toyota, Fiat, Mercedes y Subarú. No se sabe quién es quién ni cuál automóvil tiene, pero se cuenta con la siguiente información: la abogada derrotó a Bárbara jugando al tenis. Carolina y la costurera van a nadar con las mujeres que tienen automóviles Mercedes y Subarú. Alicia y la dentista visitaron a la mujer del Subarú, quien no es la bióloga, pues esta última tiene un Toyota. Deduzca la ocupación y la marca del vehículo de cada mujer.

25. [**N3**] Si se asume que el 70 % de los hombres son inteligentes, el 70 % guapos y el 70 % buenos. Como mínimo, en un grupo de 100 hombres, ¿cuántos de ellos serán a la vez inteligentes, guapos y buenos?

26. [**N3**] Un crimen es cometido por una persona y hay 4 sospechosos: Juan, Andrés, Pedro y Rafael. Al ser interrogados, cada uno declara:

    Andrés: "Pedro es culpable".

    Rafael: "yo no soy culpable".

    Pedro: "Juan es culpable".

    Juan: "Pedro miente cuando dice que yo soy culpable".

    Si se sabe que solo uno dice la verdad, ¿quién es el culpable?

27. [**N3**] A tres prisioneros que se hallaban en cierta cárcel, los tres por lo menos de inteligencia media, el carcelero les dijo que de un conjunto de tres sombreros blancos y dos rojos, elegiría tres de ellos y los colocaría sobre sus cabezas. Se prohibía a cada uno de ellos que viera el color del sombrero que tenía sobre su propia cabeza. Además, estaban colocados en fila, uno detrás del otro, de manera que el primero no veía ningún sombrero, el segundo veía solo el sombrero del primero y el tercero veía los sombreros de los otros dos. El carcelero ofreció la libertad al tercero, si podía decir de qué color era el sombrero que tenía sobre su propia cabeza. Este dijo que no podría. Luego, el carcelero ofreció la libertad al segundo, a condición de que dijera cuál era el color del sombrero que tenía sobre su propia cabeza. Este confesó que no podría decirlo. El carcelero no se molestó en hacer el ofrecimiento al primero, pero a pedido de este, le concedió la misma oportunidad. El primer prisionero esbozó una amplia sonrisa y dijo: *No necesito ver el sombrero de ninguno de mis compañeros pues, por lo que ellos han dicho, deduzco claramente que mi sombrero es...* ¿Puede usted deducir de qué color es su sombrero?

28. [**N3**] Tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tengas la edad que tengo, nuestras edades sumarán 63. ¿Qué edad tengo?

29. [**N3**] Este ejercicio de lógica fue tomado del libro *Harry Potter y la piedra filosofal* de la autora inglesa J. K. Rowling. Inicia cuando Hermione y Harry, en busca de la piedra filosofal, se encuentran frente a una mesa que contiene siete botellas de diferente tamaño puestas en fila, en donde la botella más pequeña está al centro.

    −¡Mira!− Hermione tomó un rollo de papel que estaba cerca de las botellas. Harry miró por encima de sus hombros para leerlo:

El peligro yace ante ti, mientras la seguridad está detrás, dos queremos ayudarte, cualquiera que encuentres, una entre nosotras siete te dejará adelantarte, otra llevará al que lo beba para atrás, dos contienen solo vino de ortiga, tres son mortales, esperando escondidas en la fila. Elige, a menos que quieras quedarte para siempre; para ayudarte en tu elección, te damos cuatro claves:

1. *Por más astucia que tenga el veneno para ocultarse, encontrarás siempre alguno al lado izquierdo del vino de ortiga y no hay dos venenos consecutivos.*
2. *Son diferentes las que están en los extremos, pero si quieres moverte hacia adelante, ninguna es tu amiga.*
3. *Como claramente ves, todas tenemos tamaños diferentes: ni el enano ni el gigante guardan la muerte en su interior.*
4. *La segunda a la izquierda y la segunda a la derecha son gemelas una vez que las pruebes, aunque a primera vista sean diferentes.*

Hermione dejó escapar un gran suspiro y Harry, sorprendido, vio que sonreía, lo último que había esperado que hiciera.

> −Muy bueno −dijo Hermione−. Esto no es magia... es lógica..., es un acertijo. Muchos de los más grandes magos no han tenido una gota de lógica y se quedarían aquí para siempre...

Puede usted descifrar este acertijo y concluir cuál botella los hará volver y cuál les permitirá seguir adelante.

1.2 Definiciones básicas

En toda *teoría matemática* se requiere de una terminología propia o lenguaje asociado con la notación respectiva; a continuación se analizan los distintos elementos de esta terminología.

Una **definición** describe con claridad y caracteriza a los **objetos matemáticos** por tratar, a los cuales se refieren las proposiciones. Por otro lado, en diferentes teorías existen objetos matemáticos que no se pueden definir, estos reciben el nombre de **términos primitivos**.

Ejemplo 3. Los números y sus operaciones constituyen la entidad central de estudio de la aritmética, disciplina en la que se definen nociones como el número primo y la divisibilidad, entre otras. En geometría se consideran elementos como el punto, la recta, el plano y el ángulo. El análisis aborda, por ejemplo, los intervalos y la continuidad. Por su parte, el álgebra lineal comprende los vectores y las matrices, entre diversas entidades de interés. ■

Una **proposición** (**enunciado** o **cláusula**) es una afirmación o una combinación de símbolos del lenguaje, a la que se le puede asignar un **valor de verdad**: verdadero o falso, **V** o **F** respectivamente.

Toda proposición debe cumplir con los principios de:

1. **Identidad**: si una proposición es verdadera, entonces es siempre verdadera.
2. **No contradicción**: ninguna proposición puede ser falsa y verdadera a la vez.
3. **El tercero excluido**: una proposición es falsa o es verdadera.

Estos tres principios establecen que toda proposición debe tener uno y solo un valor de verdad.

Ejemplo 4. La afirmación "$1 + 1 = 2$" es una proposición verdadera al igual que lo es "las vacas son mamíferos", mientras que "7 es un número par" y "los canarios ladran" son dos proposiciones falsas. Por otro lado, observe que frases como "me gusta tomar café" o "la pizarra es blanca" no son proposiciones, pues no es posible asignarles un único valor de verdad. ■

El **axioma** es una proposición cuya validez se acepta sin demostración.

Los axiomas son los fundamentos de todo desarrollo teórico, son la base sobre la cual se construye una teoría; por ejemplo, son conocidos los de Peano, el de especificación, el de elección, el del extremo superior y los cinco postulados de Euclides, entre otros. En matemática se procura tener la menor cantidad posible de axiomas; usualmente se encuentran en las teorías fundamentales, como es el caso de la teoría de conjuntos. Sin embargo, muchas veces se hacen desarrollos axiomáticos de teorías que pueden prescindir de axiomas y construirse sobre otras teorías, para simplificar su presentación.

Ejemplo 5. La geometría euclideana, expuesta y desarrollada por Euclides en su monumental y trascendental obra *Los Elementos* (para más detalles, consulte [23] y [27]). Esta obra se fundamenta en 23 definiciones, y solo para ilustrar algunas a modo de ejemplo, el *punto* lo define como "es lo que no tiene partes", y una *recta* como "es una longitud sin anchura"; él mismo enuncia y propone cinco postulados:

1. Se puede trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.
2. Se puede extender un segmento continuamente a una recta.
3. Se puede describir un círculo con cualquier centro y radio.
4. Que todos los ángulos rectos son iguales.
5. Que si una línea recta corta a otras dos rectas y forma con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

En algunos textos se ha reemplazado el enunciado del quinto postulado por el equivalente **axioma de Playfair**, cuyo enunciado más sencillo es: *por un punto que no pertenece a una recta, existe una única recta paralela a la primera que contiene al punto.* ■

Por otro lado, Euclides utiliza lo que denomina como **nociones comunes** y enuncia cinco, estas últimas llamadas por Proclus, axiomas. En su gran obra, Euclides sigue a Aristóteles: mientras que las nociones comunes se aplican a todas las ciencias, los **postulados** se aplican solo a la geometría. Como ejemplo, se mencionan aquí solo dos de esas nociones comunes:

1. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
2. Dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre sí.

Al negar el quinto postulado, se obtienen dos nuevas geometrías, llamadas *geometrías no euclideanas*. La negación de la afirmación de que existe una recta paralela se puede dar por medio de la tricotomía clásica, hay menos de una (ninguna) o hay más de una (varias). Así, se mantienen los cuatro primeros postulados, pero se reemplaza el quinto en el caso de que no existan las rectas paralelas, se obtiene la *geometría esférica* (de Riemann); en el otro caso, se obtiene la *geometría hiperbólica* (de Bolyai y Lobachevski), en donde por un punto que no esté en una recta pasan varias paralelas (consulte [23] y [27]). En estas geometrías, curiosamente, el teorema que afirma que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados resulta no ser cierto. Los resultados que se obtienen serán distintos, pues las premisas lo son.

Un **teorema** es una proposición cuya validez se prueba o verifica como consecuencia lógica a partir de los axiomas, definiciones o de otras proposiciones ya probadas.

En la geometría euclídea, por ejemplo, son conocidos los teoremas de Tales y de Pitágoras, así como el mencionado en el párrafo anterior, según el cual la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°. A su vez, estos se utilizan para obtener otros resultados o teoremas.

Algunos teoremas reciben nombres particulares:

- El **corolario** es un teorema que se deduce fácilmente de uno anterior o es un caso particular de uno más general.
- El **lema** es un teorema necesario para la demostración de un resultado posterior, pero que se sale del contexto de la teoría que se está desarrollando.
- El **escolio** es un resultado que se obtiene en el desarrollo de una demostración y no tiene relación con la teoría que se está estudiando.

A los teoremas que no son relevantes en el desarrollo de una teoría se les llama simplemente **proposiciones**.

Es decir, los lemas no son resultados centrales en el desarrollo de una teoría matemática; sin embargo, un lema en una teoría puede ser un teorema central en otra teoría.

Una **conjetura** es una proposición de la que no se puede asegurar su validez ni su falsedad.

Ejemplo 6. La **conjetura de Goldbach** fue propuesta por el matemático prusiano Christian Goldbach en una carta enviada a Leonhard Euler en 1742. En ella se afirma que todo número entero, par, mayor o igual que 4 se puede escribir como la suma de dos primos. En la actualidad no se ha podido demostrar su validez, que la convertiría en teorema, pero tampoco se ha encontrado algún par que no sea la suma de dos primos, lo que probaría su falsedad. Solamente se ha podido comprobar su validez para una gran cantidad de números, entre ellos: $6 = 3 + 3,\ 10 = 7 + 3,\ 50 = 43 + 7,\ 100 = 89 + 11$ y $700 = 641 + 59$. ■

Ejemplo 7. Suponga que se elige un número entero positivo cualquiera. Si el número es impar, se multiplica por 3 y se le suma 1; en caso contrario, si el número es par, este se divide por 2. Ahora se repite este proceso una y otra vez. La **conjetura de Collatz** afirma que, sin importar con qué número se inicie, siempre se llegará a 1. La aplicación de este algoritmo se muestra para 21, 13 y 336:

- $21 \xrightarrow{3\cdot 21+1} 64 \xrightarrow{\frac{64}{2}} 32 \xrightarrow{\frac{32}{2}} 16 \xrightarrow{\frac{16}{2}} 8 \xrightarrow{\frac{8}{2}} 4 \xrightarrow{\frac{4}{2}} 2 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 1.$
- $13 \xrightarrow{3\cdot 13+1} 40 \xrightarrow{\frac{40}{2}} 20 \xrightarrow{\frac{20}{2}} 10 \xrightarrow{\frac{10}{2}} 5 \xrightarrow{3\cdot 5+1} 16 \xrightarrow{\frac{16}{2}} 8 \xrightarrow{\frac{8}{2}} 4 \xrightarrow{\frac{4}{2}} 2 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 1.$
- $336 \to 168 \to 84 \to 42 \to 21 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$

Es un resultado sencillo y se ha comprobado para una gran cantidad de números, pero no se ha logrado probar en general para un número arbitrario. Note que, al obtener 1, el resultado se repite, pues $1 \xrightarrow{3\cdot 1+1} 4 \xrightarrow{\frac{4}{2}} 2 \xrightarrow{\frac{2}{2}} 1$. ■

Ejemplo 8. Otra conjetura es que hay un número infinito de números primos de Mersenne. La definición de estos es sencilla: los **números de Mersenne** son de la forma $M_p = 2^p - 1$ para p primo. Además, en caso de que M_p sea primo, se le llama **primo de Mersenne**, los primeros cinco primos de Mersenne son $M_2 = 2^2 - 1 = 3$, $M_3 = 2^3 - 1 = 7$, $M_5 = 2^5 - 1 = 31$, $M_7 = 2^7 - 1 = 127$, $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$. Note que M_{11} es un número de Mersenne claro, pues 11

es primo, pero no es primo de Mersenne, pues $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Curiosamente, solo se han encontrado 52 de estos primos. El mayor, que además corresponde con el mayor número primo conocido, es precisamente el número 52 de esta lista, y está dado por:

$$M_{136\,279\,841} \quad = \quad 2^{136\,279\,841} - 1$$

de 41 024 320 dígitos, descubierto en octubre del 2024 por Luke Durant, de California, Estados Unidos. Para tener una idea de lo grande que es este número, con sus dígitos se completaría un libro de 10 000 páginas. Para mayores detalles, consulte [21]. ■

Al igual que las anteriores (Collatz, Goldbach y Mersenne), existen muchas conjeturas planteadas (consulte [21]), las cuales no se han refutado ni demostrado su validez. Unas de ellas seguirán esperando, a algunas se les prueba su falsedad mientras que a otras su validez. Este es el caso de von Lindemann quien en 1882 probó la conjetura de que el número π es trascendente; o el caso más reciente de la conjetura de Poincaré, propuesta en 1904 y considerada uno de los problemas abiertos más importantes y difíciles en matemáticas, que ha sido demostrada afirmativamente por el matemático ruso Grigori Perelman en el 2006.

Una **paradoja** es una afirmación contradictoria en sí misma: no puede ser falsa ni verdadera.

Ejemplo 9. La frase "estoy mintiendo" es una paradoja en sí misma pues, si es verdadera, estoy mintiendo y por lo tanto es falsa; por otro lado, si es falsa, no estoy mintiendo y por ello es verdadera. Es decir, la proposición no puede ser verdadera ni falsa, pues en cualquier caso se obtiene una contradicción. ■

La palabra paradoja proviene del griego $\pi\alpha\rho\alpha$ (para), que significa *contra*, y $\delta o\xi\alpha$ (doxa), que significa *opinión*. Para profundizar sobre este tema, puede consultar [23]. La paradoja del ejemplo anterior radica en la estructura misma del lenguaje, por lo que se dice que es una **paradoja semántica**; por otro lado, si la paradoja es debida a la escogencia de los axiomas, se dice que es una **paradoja lógica**.

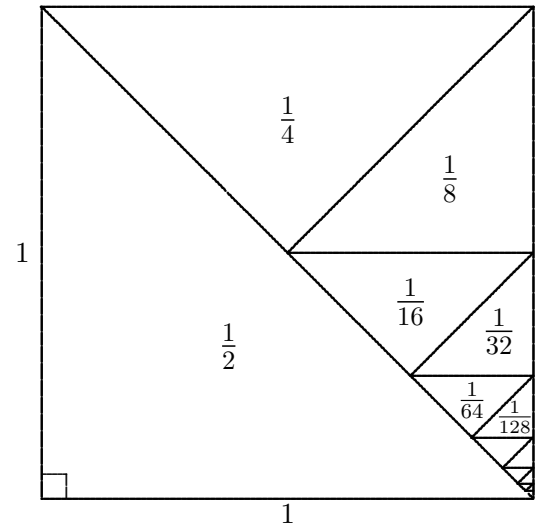
Es importante señalar que los griegos fueron los primeros en plantear distintos tipos de paradojas, muchas de ellas relacionadas con la teoría de números. Fue precisamente Zenón de Elea quien formuló en el siglo V a.C. cuatro paradojas:

la de la *Dicotomía*, la de *Aquiles*, la de la *Flecha* y la del *Estadio*, que en la actualidad son referente obligatorio en el estudio de este tema.

Ejemplo 10. La idea de la paradoja de la Dicotomía (consulte [23]) es la siguiente: un corredor recorrerá una distancia d. Para lograrlo, debe recorrer la mitad de esa distancia, $\frac{d}{2}$; luego, también la mitad de ella, que es $\frac{d}{4}$; después, la siguiente es $\frac{d}{8}$, y así sucesivamente. La conclusión es que el corredor debería recorrer un número infinito de distancias y el problema es que lo debe hacer en un tiempo finito. Por lo tanto, el corredor nunca podrá recorrerla; entonces, no hay movimiento. El problema es el concepto de infinito, en particular, realizar una división de manera infinita. En la actualidad, se reduce a calcular la suma de la serie:

$$\begin{aligned}\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{8}+\frac{d}{16}+\cdots &= d\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\\ &= d\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\\ &= d\cdot 1\\ &= d\end{aligned}$$

o con un argumento visual geométrico, como se muestra en la siguiente figura.



Se puede pensar que $\frac{1}{2}$ representa la mitad de un cuadrado de lado 1; $\frac{1}{4}$ la cuarta parte, $\frac{1}{8}$ la octava parte y así sucesivamente, de forma que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ es igual al área de todo el cuadrado, que se sabe es 1. ■

A modo de ejemplo, se presenta además la *Paradoja de Protágoras*, una de las más antiguas conocidas y que surge de la argumentación entre Protágoras (480-410 a.C.), sofista y maestro de leyes, y su alumno Eualzo.

Ejemplo 11. Protágoras aceptó como su estudiante a Eualzo, quien, aunque pobre, era talentoso. Protágoras convino con él en impartirle enseñanza sin cobrarle, a condición de que una vez que hubiera completado sus estudios y ganara el primer litigio en ejercicio de su profesión, le pagaría a su maestro el total de la deuda. Su discípulo aceptó esta condición. Tras completar sus estudios, Eualzo no emprendió ningún caso legal. Transcurrido cierto tiempo, Protágoras lo buscó y reclamó el pago o lo llevaría a los tribunales. He aquí los argumentos que alegaron uno y otro:

- Eualzo: Estimado maestro Protágoras, ¡no pagaré!, pues en los tribunales solo pueden suceder dos cosas: gano o pierdo. Si gano, la ley no me obliga a pagarte. Si pierdo, entonces no se habrá cumplido que yo haya ganado mi primer litigio. Por lo tanto, y de acuerdo con nuestro convenio, no deberé pagarte.
- Protágoras: Estimado ex-discípulo Eualzo... ¡pagarás!, pues si vamos a los tribunales, podrán suceder solamente dos cosas: gano yo o ganas tú. Si gano yo, entonces la ley te obliga a pagarme. Si ganas tú, habrás ganado tu primer litigio. Por lo tanto, y de acuerdo con nuestro convenio, tendrás que pagarme.

Parece que Protágoras y Eualzo tienen razón y, al mismo tiempo, parece que ninguno la tiene. ■

Como dato curioso, Kurt Gödel planteó en 1931 que hay proposiciones que son *indecidibles*, pues resulta imposible demostrar su validez o refutarla a partir de los axiomas. Aún más, en 1963, Paul Cohen demostró que la existencia de un número mayor que $\aleph_0$ (la cardinalidad del conjunto $\mathbb{N}$) y menor que c (la cantidad de elementos de $\mathbb{R}$) era indecidible con base en los axiomas de la teoría de conjuntos. Incluso se pensó, en algún momento, que la conjetura de Fermat era indecidible; sin embargo, ya fue demostrada por el británico Andrew Wiles en 1995 en definitiva (porque había sido anunciada por él mismo el 23 de junio de 1993 y todavía contenía algunos errores).

El lenguaje de la lógica formal está estructurado de manera que no admite paradojas semánticas. Las teorías matemáticas deben formular sus axiomas

de tal manera que no conduzcan a alguna contradicción. En este sentido, para dicha formalización son necesarias algunas definiciones y principios que permitan levantar esta teoría matemática, sin caer en paradojas análogas a las que se mencionaron anteriormente.

Una **demostración** o **prueba** de una proposición es un ensayo estructurado en el cual se verifica y constata de forma irrefutable y convincente que dicha proposición es verdadera.

Por otro lado, el término **verificar** se utiliza en ocasiones en lugar de probar, sobre todo cuando la demostración es esencialmente un cálculo.

Ejemplo 12. Un número entero n es **par** si existe un número entero k tal que $n = 2k$. Por otro lado, n es **impar** si existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Pruebe que si n es impar, entonces $3n^2 + 5$ es par.

Solución. Como n es impar, existe un entero k tal que $n = 2k+1$, por lo que

$$\begin{aligned} 3n^2 + 5 &= 3(2k+1)^2 + 5 \\ &= 3\big(4k^2 + 4k + 1\big) + 5 \\ &= 12k^2 + 12k + 3 + 5 \\ &= 12k^2 + 12k + 8 \\ &= 2\big(6k^2 + 6k + 4\big) \\ &= 2k' \end{aligned}$$

como $k' = 6k^2 + 6k + 4$ es entero, se cumple que $3n^2 + 5$ es par. ■

El siguiente ejemplo muestra un **sistema formal** donde se definen términos primitivos, reglas de inferencia propias, axiomas (que se asumen válidos) y teoremas (que deben probarse). Ponga especial atención en las demostraciones.

Ejemplo 13. A partir de las letras M, I y U, se define una **palabra** como una combinación de estos símbolos. Además, se tienen las siguientes reglas de deducción:

Regla 1. Toda palabra se puede triplicar.
Regla 2. Una U se puede reemplazar por II.
Regla 3. Si aparece IIII se puede eliminar.
Regla 4. Después de una M se puede insertar una U.
Regla 5. Si en una palabra aparece IMU puede quitarse la M.

Se dice que una palabra es **admisible** si se obtiene al aplicar una o varias de estas reglas a otra palabra admisible. Si, para empezar, se asume como admisible (axioma) la palabra MI, pruebe que la palabra MMI es admisible.

Solución. Se debe partir de la única palabra que se sabe es admisible, sobre la flecha se indica la regla que se utiliza:

$$\text{MI} \xrightarrow{1} \text{MIMIMI} \xrightarrow{4} \text{MIMUIMI} \xrightarrow{5} \text{MIUIMI} \xrightarrow{2} \text{MIIIIMI} \xrightarrow{3} \text{MMI}$$

con lo cual, hemos demostrado que MMI es otra palabra admisible. Además, a partir de MMI, se obtiene, por ejemplo, MUMI al aplicar la regla 4. Las palabras que probamos admisibles, se pueden usar como nuevas premisas. ■

Para finalizar esta sección, es interesante la comparación que hace Mariano Perero en [22]:

> La matemática, como un sistema puramente formal, se puede comparar con el ajedrez, los elementos primitivos en ajedrez son las 32 piezas y el tablero; los axiomas son las descripciones de los movimientos de las piezas, no son evidentes, no son ni verdaderos ni falsos, son así y se aceptan sin discutir, las reglas del juego constituyen la lógica del sistema. Nadie se pregunta si el ajedrez es verdadero o falso, lo único importante es saber si se siguen las reglas.

Ejercicios (sección 1.2)

1. [**N1**] En cada caso, determine cuáles corresponden a proposiciones y, si lo son, determine si es verdadera o falsa:
   (a) Yakarta es la capital de Indonesia.
   (b) El helado de fresa es delicioso.
   (c) Los pingüinos son aves, pero no vuelan.
   (d) 169 es un número primo.
   (e) No maltraten a los animales.
   (f) La suma del cuadrado de las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la medida de su hipotenusa.

2. [**N2**] Demuestre las siguientes proposiciones (repase el ejemplo 12):
   (a) Si n es impar, entonces n^2 es impar.

(b) Si n es impar, entonces $5n^2 + n - 11$ es impar.

(c) Si n es par, entonces $3n^2 - 2n + 6$ es par.

(d) El producto de dos números enteros consecutivos es par.

3. [**N2**] De acuerdo con el sistema definido en el ejemplo 13, demuestre que las palabras MIM, MUIM, MIIIMII, MIU, MUMI, MMIII, MIIIM, MIMUU, MUUIUIMIII son admisibles. Además, pruebe que MU no es admisible.

4. [**N3**] Discuta y analice las siguientes paradojas:

(a) *Paradoja de Epiménides*, el cretense, quien afirmó que todos los cretenses son mentirosos.

(b) *Paradoja de Protágoras.* Consulte el ejemplo 11, página 40.

(c) *Paradoja del barbero*, propuesta por B. Russell, que dice: El único barbero de la ciudad dice que afeitará a todos aquellos que no se afeiten a sí mismos. ¿quién afeitará al barbero?

(d) *Paradoja de Aquiles.* Según este argumento, el más rápido de los hombres, Aquiles, no podrá alcanzar nunca a la tortuga, el más lento de los animales, si se da a esta una ventaja inicial en una carrera. Pues, mientras Aquiles recorre el camino que la tortuga llevaba por la ventaja inicial, esta habrá recorrido otra porción, aunque más pequeña. Cuando Aquiles haya llegado a recorrer esta última porción de camino, la tortuga habrá avanzado otra porción más pequeña y así la tortuga siempre llevará la ventaja hasta en espacios infinitamente pequeños, con lo cual Aquiles nunca podrá alcanzarla.

(e) Cervantes, en el capítulo LI de El Quijote, escribió: "Si alguno pasare por este puente de una parte a otra, ha de jurar primero a dónde va y a qué va; y si jurare la verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". *Sabida esta ley y la rigurosa condición de ella, pasaban muchos, que luego en lo que juraban se echaba de ver que decían la verdad y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, iba a morir en aquella horca que allí estaba y no a otra cosa.* ¿Este hombre dice verdad o mentira?

1.3 Conectivas lógicas

Las proposiciones **simples** o **atómicas** son aquellas que involucran solo una afirmación, por ejemplo, "$1 + 1 = 3$" que es falsa, o "las vacas son mamíferos" que es verdadera. A partir de estas se obtienen las proposiciones **compuestas** o **moleculares** mediante la aplicación de una o varias de las *conectivas lógicas*: negación, conjunción, disyunción, disyunción exclusiva, implicación y doble implicación o equivalencia.

Estas se definen por medio de una **tabla de verdad**, en la cual se indica el valor de verdad de la proposición compuesta, para todos los posibles valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen. Es necesario prestar especial atención en el lenguaje que se utiliza, así como a las diferentes maneras de referirse a ellas.

Si P es una proposición, la **negación** de P es la nueva proposición $\neg \boldsymbol{P}$, que se lee "no es cierto que P" o "no P"

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ejemplo 14. Si P es la proposición "$2 + 1 = 5$", la proposición $\neg P$ es "no es cierto que $2+1 = 5$" o simplemente "$2+1 \neq 5$". Claramente, el valor de verdad de P es falso y el de $\neg P$ es verdadero. ■

Ejemplo 15. Si se considera la proposición verdadera P : "$3 > 2$", la negación es $\neg P$: "$3 \leq 2$", cuyo valor de verdad es F. ■

Si P y Q son dos proposiciones, la conectiva binaria **conjunción** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \wedge Q}$, que se lee "P y Q". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 16. Para las proposiciones P : "$3 > 2$" y Q : "$2 + 2 = 3$", donde claramente P es verdadera y Q es falsa, se tiene que la proposición compuesta $P \wedge Q$ es falsa, es decir "$3 > 2$ y $2 + 2 = 3$" es falsa. ■

La conectiva **disyunción** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \vee Q}$, que se lee "P o Q". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 17. Considere P : "$2^3 = 6$" y Q : "$2 + 2 = 4$", dos proposiciones en las cuales claramente P es falsa y Q es verdadera. Se tiene que la proposición compuesta $P \vee Q$ es V, es decir, "$2^3 = 6$ o $2 + 2 = 4$" es verdadera. ■

En la lengua castellana se utiliza la misma letra "o" para las proposiciones que admiten como verdaderas ambas, así como para las que solo se admite una verdadera. Se debe hacer la diferencia, por ejemplo, en casos como la proposición "Francis es hombre o mujer, pero no ambos". En latín se utilizaba la palabra *aut* para la o exclusiva y la palabra *vel* para la inclusiva, es decir, cuando se admiten ambos. La inicial de *vel* se tomó como el símbolo $\vee$ (consulte [18]).

La conectiva binaria **disyunción exclusiva** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \veebar Q}$, que se lee "P o Q, pero no ambas". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \veebar Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 18. Considere P : "$1 + 1 = 2$" y Q : "$3 > 2$", dos proposiciones en las cuales claramente P y Q son verdaderas. Se tiene que la proposición compuesta $P \veebar Q$ es F, es decir, "$1 + 1 = 2$ o $3 > 2$, pero no ambos" es falsa. ■

Para P y Q son proposiciones, la **implicación** de Q por P es la proposición $\boldsymbol{P \to Q}$, que se lee "si P entonces Q" o "P implica Q". Su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otras formas de leer esta proposición son "Q si P" o "P solo si Q" o "P es suficiente para Q" o "Q es necesario para P". A P se le llama **antecedente** y a Q el **consecuente**.

Ejemplo 19. La proposición "Si hay elefantes en el Sol, entonces $1 + 1 = 3$" es verdadera, ya que tanto el antecedente "hay elefantes en el Sol" como el consecuente "$1 + 1 = 3$" son falsos, y de acuerdo con la tabla del recuadro anterior, en ese caso el valor de verdad resultante es V. ■

Se utiliza el símbolo $\equiv$ para representar proposiciones equivalentes, es decir, que tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo 20. La proposición "Si los gatos ladran o 5 es par, entonces $1+1 \neq 3$" se simboliza como $(P \vee Q) \to R$, con P : "los gatos ladran", Q : "5 es par" y R : "$1 + 1 \neq 3$", donde P y Q son falsas y Q es verdadera, es decir, $P \equiv \mathrm{F}$, $Q \equiv \mathrm{F}$ y $R \equiv \mathrm{V}$. Con estos valores de verdad se concluye que

$$(P \vee Q) \to R \;\equiv\; (\mathrm{F} \vee \mathrm{F}) \to \mathrm{V} \;\equiv\; \mathrm{F} \to \mathrm{V} \;\equiv\; \mathrm{V}$$

Así, "Si los gatos ladran o 5 es par, entonces $1 + 1 \neq 3$" es verdadera. ■

Ejemplo 21. Si se sabe que las proposiciones P y Q son verdaderas y R es falsa, determine el valor de verdad de $(P \wedge \neg R) \to (\neg Q \vee R)$.

Solución. Al sustituir los valores de verdad dados, se tiene que

$$\begin{aligned}(P \wedge \neg R) \to (\neg Q \vee R) &\equiv (\mathrm{V} \wedge \neg \mathrm{F}) \to (\neg \mathrm{V} \vee \mathrm{F}) \\ &\equiv (\mathrm{V} \wedge \mathrm{V}) \to (\mathrm{F} \vee \mathrm{F}) \\ &\equiv \mathrm{V} \to \mathrm{F} \\ &\equiv \mathrm{F}\end{aligned}$$

Finalmente, la proposición es falsa. ■

Ejemplo 22. Si se sabe que la proposición $P \to \neg R$ es falsa, determine el valor de verdad de la proposición $\big[(R \vee S) \wedge (R \to \neg P)\big] \vee \big[R \leftrightarrow (\neg P \wedge Q)\big]$.

Solución. Como $P \to \neg R$ es falsa, se tiene que $P \equiv \mathrm{V}$ y $\neg R \equiv \mathrm{F}$, es decir, $R \equiv \mathrm{V}$. Con estos valores de verdad se cumple que $R \vee S \equiv \mathrm{V}$ para cualquier valor de S, pues $R \equiv \mathrm{V}$; $R \to \neg P \equiv \mathrm{V} \to \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$ y $\neg P \wedge Q \equiv \mathrm{F}$ para cualquier valor de Q, pues $\neg P \equiv \mathrm{F}$. Por lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \big[(R \vee S) \wedge (R \to \neg P)\big] \vee \big[R \leftrightarrow (\neg P \wedge Q)\big] &\equiv \big[\mathrm{V} \wedge \mathrm{F}\big] \vee \big[\mathrm{V} \leftrightarrow \mathrm{F}\big] \\ &\equiv \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \\ &\equiv \mathrm{F} \end{aligned}$$

Es decir, bajo el supuesto de que $P \to \neg R$ es falsa, la proposición dada es F. ■

Ejemplo 23. Para P : "63 es número primo" y Q : "$\pi > 3{,}14$", determine el valor de verdad de la proposición $\big[(Q \to \neg P) \veebar (Q \ \vee \ P)\big] \to Q$.

Solución. El valor de verdad de P es F pues, 63 no es primo ya que $63 = 7 \cdot 9$; además, el número π sí es mayor que 3,14 por lo que Q es verdadera. Así, al reemplazar estos valores de verdad se obtiene:

$$\begin{aligned} \big[(Q \to \neg P) \veebar (Q \ \vee \ P)\big] \to Q &\equiv \big[(\mathrm{V} \to \neg \mathrm{F}) \veebar (\mathrm{V} \ \vee \ \mathrm{F})\big] \to \mathrm{V} \\ &\equiv \big[(\mathrm{V} \to \mathrm{V}) \veebar \mathrm{V}\big] \to \mathrm{V} \\ &\equiv (\mathrm{V} \veebar \mathrm{V}) \to \mathrm{V} \\ &\equiv \mathrm{F} \to \mathrm{V} \\ &\equiv \mathrm{V} \end{aligned}$$

Finalmente, la proposición dada es verdadera. ■

La **doble implicación** o **bicondicional** de P y Q es la nueva proposición $\boldsymbol{P \leftrightarrow Q}$, que se lee "$P$ si y solo si Q". La proposición $P \leftrightarrow Q$ es equivalente con $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ y su valor de verdad está dado por la tabla

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

También se puede leer "P es necesario y suficiente para Q".

Ejemplo 24. Las proposiciones P : "4 es un número impar" y Q : "$1+1=3$" son falsas; por lo tanto, se tiene que la proposición compuesta "4 es un número impar si y solo si $1+1=3$" es verdadera, pues $P \leftrightarrow Q \equiv \mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{V}$. ■

> En la aplicación de las conectivas se establece el siguiente orden de **prioridad**, de mayor a menor: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Esta se da para evitar el uso excesivo de los paréntesis.

Ejemplo 25. Con esta convención es posible escribir:

- $P \wedge Q \vee R$ en vez de $(P \wedge Q) \vee R$.
- $P \rightarrow Q \vee R$ en vez de $P \rightarrow (Q \vee R)$.
- $Q \rightarrow R \wedge S \leftrightarrow \neg T$ en vez de $\big[Q \rightarrow (R \wedge S)\big] \leftrightarrow \neg T$. ■

En este texto, se tratará de ser lo más específico posible y, en la mayoría de los casos, se utilizarán los paréntesis, aunque no sean necesarios.

Ejemplo 26. Para P : "31 es un número primo" y Q : "las gallinas ladran", escriba las proposiciones $P \wedge Q$, $\neg Q \vee P$ y $Q \rightarrow \neg P$; y determine sus valores de verdad.

Solución. Es claro que P es verdadera y Q es falsa. Es decir, $P \equiv \mathrm{V}$ y $Q \equiv \mathrm{F}$.

- $P \wedge Q$ se escribe como "31 es un número primo y las gallinas ladran" y su valor de verdad de $\mathrm{V} \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$.
- $\neg Q \vee P$ se escribe como "las gallinas no ladran o 31 es un número primo" y su valor de verdad de $\neg \mathrm{F} \vee \mathrm{V} \equiv \mathrm{V} \vee \mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$.
- $Q \rightarrow \neg P$ se escribe como "si las gallinas ladran, entonces 31 no es un número primo" y su valor de verdad de $\mathrm{F} \rightarrow \neg \mathrm{V} \equiv \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{V}$.

■

Ejemplo 27. Para P : "la Luna es de queso" y Q : "$2+1=3$", escriba las proposiciones $\neg P \vee \neg Q$, $Q \rightarrow \neg P$ y $P \leftrightarrow \neg Q$, y determine sus valores de verdad.

Solución. Claramente, P es F y Q es V.

- La proposición $\neg P \vee \neg Q$ se lee "la Luna no es de queso o $2+1 \neq 3$" y tiene como valor de verdad $\neg \mathrm{F} \vee \neg \mathrm{V} \equiv \mathrm{V} \vee \mathrm{F} \equiv \mathrm{V}$.
- La proposición $Q \rightarrow \neg P$, se lee "si $2+1=3$, entonces la Luna no es de queso"; tiene como valor de verdad $\mathrm{V} \rightarrow \neg \mathrm{F} \equiv \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$.

- La proposición $P \leftrightarrow \neg Q$, se lee "la Luna no es de queso si y solo si $2+1 \neq 3$"; tiene como valor de verdad $\mathrm{F} \leftrightarrow \neg \mathrm{V} \equiv \mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{V}$.

■

Ejemplo 28. Considere las proposiciones P, Q y R dadas por:

P : "20 es impar".
Q : "$2+3=6$".
R : "13 es un número primo".

- La proposición "Si 20 es impar, entonces $2+3=6$ y 13 es un número primo" se simboliza como $P \rightarrow (Q \wedge R)$.
- La proposición "Si $2+3=6$ y 13 es un número primo, entonces 20 es impar" se simboliza como $(Q \wedge R) \rightarrow P$.
- La proposición "$2+3=6$ y si 13 es un número primo, entonces 20 es impar" se simboliza como $Q \wedge (R \rightarrow P)$.
- La proposición "20 no es impar, pero además, no ocurre que $2+3=6$ o que 13 es un número primo" se simboliza como $\neg P \wedge \neg(Q \vee R)$.
- La proposición "20 es impar si 13 es un número primo o si $2+3 \neq 6$" se simboliza como $(R \vee \neg Q) \rightarrow P$.

■

Ejemplo 29. A partir de las siguientes proposiciones atómicas:

P : "hay elefantes en Marte".
Q : "el fuego es frío".
R : "$2+1=4$".

simbolice las siguientes proposiciones y determine su valor de verdad:

S : "Si hay elefantes en Marte y el fuego es frío, entonces $2+1=4$".
T : "Hay elefantes en Marte y, si el fuego es frío, entonces $2+1=4$".

Solución. Claramente, las proposiciones P, Q y R son falsas. La proposición S se simboliza como $(P \wedge Q) \rightarrow R$ y su valor de verdad es:

$$(\mathrm{F} \wedge \mathrm{F}) \rightarrow \mathrm{F} \;\equiv\; \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} \;\equiv\; \mathrm{V}$$

La proposición T se simboliza como $P \wedge (Q \rightarrow R)$ y su valor de verdad es

$$\mathrm{F} \wedge (\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F}) \;\equiv\; \mathrm{F} \wedge \mathrm{V} \;\equiv\; \mathrm{F}$$

es decir, S es verdadera mientras que T es falsa. ■

Para P y Q dos proposiciones, se define:

- La **recíproca** de $P \to Q$ es $Q \to P$.
- La **contrapositiva** de $P \to Q$ es $\neg Q \to \neg P$.

Ejemplo 30. Para la proposición T : "si $1+1=3$, entonces $5 \geq 4$", escriba su recíproca y su contrapositiva. Además, determine el valor de verdad de estas tres proposiciones.

Solución. Al considerar las proposiciones $P : 1+1=3$ y $Q : 5 \geq 4$, la proposición dada T se simboliza como $P \to Q$.
Como claramente P es F y Q es V, se tiene que:

- El valor de verdad de T es $\mathrm{F} \to \mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$.
- La recíproca de T es la proposición "si $5 \geq 4$, entonces $1+1=3$". Su valor de verdad es $\mathrm{V} \to \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$.
- La contrapositiva de T es la proposición "si $5 < 4$, entonces $1+1 \neq 3$". Su valor de verdad es $\mathrm{F} \to \mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$.

Finalmente, T y su contrapositiva son verdaderas; en cambio, la recíproca de T es falsa. ■

Ejercicios (sección 1.3)

1. **[N1]** Si se sabe que P, Q y R son proposiciones verdaderas y que S y T son falsas, determine el valor de verdad de las proposiciones:

   (a) $(\neg Q \wedge S) \vee (T \wedge \neg P)$

   (b) $(\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg R \vee S \vee \neg T)$

   (c) $\neg(P \wedge S) \to (S \vee \neg Q)$

   (d) $\big[P \to (R \to T)\big] \leftrightarrow \big[(\neg P \wedge S) \to (Q \to \neg T)\big]$

   (e) $\big[(\neg T \vee \neg P) \leftrightarrow [T \to (R \vee S)]\big] \leftrightarrow \big[(P \wedge Q \wedge \neg T) \to (\neg Q \to \neg S)\big]$

2. **[N1]** Para P : "el fuego es frío" y Q : "las vacas vuelan", en cada caso escriba las proposiciones y determine sus valores de verdad.

   (a) $\neg P \vee Q$ (b) $Q \to \neg P$ (c) $P \vee (\neg Q \to P)$