OPTIMUM

1re et 2e année

Toute l'analyse

Maths appliquées



- Cours et méthode
- Astuces et pièges à connaître
- Exercices et problèmes d'entraînement
- QCM d'évaluation et extraits d'annales

Hédi **Joulak**

ellipses

OPTIMUM

Collection dirigée par Fabien Fichaux

Toute l'analyse

Maths appliquées

ECG

Hédi Joulak

Professeur à La Prépa Autrement et au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

Du même auteur

S'entraîner en mathématiques en prépa – ECE 1&2, 2020

Dans la collection « Optimum »

Toute l'algèbre, Maths appliquées, ECG, 1re et 2e année, 2022

Toute la probabilité, Maths appliquées, ECG, 1re et 2e année, 2022

500 exercices de mathématiques en ECS, 1re année, 2e édition, 2019

Mathématiques, Toute l'algèbre en prépa, ECE, 2016

Mathématiques, Toute la probabilité en prépa, ECE, 2016

Réussir l'épreuve de mathématiques en ECT, 2016

Réussir l'épreuve de mathématiques en ECS, 2014

Réussir l'épreuve de mathématiques en ECE, 2014

500 exercices de mathématiques en ECS, 1re année, 2014

Mathématiques en ECE, HEC – ESSEC – ESCP-EAP – EM Lyon – EDHEC – ÉCRICOME, 2014

500 exercices et problèmes mathématiques pour réussir en ECE, 1re année, 2013

Le grand livre des concours AST en mathématiques, Edhec et Passerelle, 2013

Mathématiques, Formulaire, MPSI/PCSI, 2013

Exercices et problèmes mathématiques en MPSI/PCSI, 1re année, 2013

Mathématiques, Formulaire, ECE/ECS, 2013

Mathématiques en ECS, HEC – ESSEC – ESCP-EAP – EM Lyon – EDHEC – ÉCRICOME, 2012

Mathématiques en ECE, HEC – ESSEC – ESCP-EAP – EM Lyon – EDHEC – ÉCRICOME, 2012

8 tests pour réussir les concours ACCES/SESAM, 2011

600 exercices pour être prêt aux tests, TAGE-MAGE®, TAGE 2®, ARPÈGE®, 2011

Se préparer aux tests en 50 fiches et 300 exercices, TAGE-MAGE®, TAGE 2®, ARPÈGE®, 2011 (coll. « Bloc Optimum »)

Les tests ARPEGE®, TAGE 2® et TAGE-MAGE®, 2010

ISBN 9782340-074002
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Thalès : « *Le temps met tout en lumière.* »

Ce manuel a pour ambition d'être le manuel de référence pour les candidats aux concours d'entrée aux écoles de commerce (par voie directe ou par voie parallèle). Un manuel doit pouvoir apporter toutes les connaissances nécessaires à chaque étudiant.

Un manuel doit pouvoir répondre à toutes les questions que se pose un étudiant.
Un manuel doit se vouloir rassurant et proposer des paliers de vérification des savoirs.
Un manuel doit exposer les rédactions-types sur les questions récurrentes afin que le préparationnaire concentre ses efforts sur l'essentiel.
Un manuel doit poser des alertes sur les pièges dans lesquels il ne faut pas se laisser glisser.
Un manuel se doit d'être évolutif à travers des exercices d'application directe pour affirmer ses connaissances, des mini-problèmes pour se préparer aux interrogations et aux devoirs écrits, et des annales de concours pour se mettre en situation du jour J.

Ce manuel, vous l'avez entre les mains.

L'Auteur

Table des matières

1	**Applications**	**7**
2	**Limites et comparaisons**	**15**
3	**Fonctions**	**45**
4	**Suites**	**139**
5	**Séries**	**233**
6	**Intégrales définies**	**301**
7	**Intégrales impropres**	**399**
8	**Fonctions à 2 variables**	**477**

Chapitre 1

Applications

L'essentiel du cours

Généralités

Définition

Une application f est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément x du premier (appelé ensemble de départ) est associé à un unique élément $y = f(x)$ du second (ensemble d'arrivée).

L'élément x est appelé antécédent de y ; l'élément $y = f(x)$ est appelé image de x.

Il y a une différence - dont on peut se passer en première lecture - entre la notion d'application et celle de fonction. L'application nous précise que tout élément de l'ensemble de départ a une image (et une seule) alors que l'on n'impose rien pour l'ensemble de départ d'une fonction ; ainsi, on pourra parler de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ mais pour l'application, il nous faudra considérer f sur $\mathbb{R}_+$.

Restriction d'une application

On considère une application $f : E \longrightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle restriction de f à A l'application, notée $f_{|A}$, définie sur A par :

$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$$

La restriction (unique pour un sous-ensemble donné) est donnée pour faire apparaître une propriété intéressante sur la nouvelle application. Ainsi, l'application $f : x \mapsto x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ alors que sa restriction à $\mathbb{R}_+$, $f_{|\mathbb{R}_+}$, l'est.

Prolongement d'une application

On considère une application $f : E \longrightarrow F$ et B un ensemble tel que $E \subset B$.
On appelle prolongement de f à B toute application $\widetilde{f}$ définie sur B par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \widetilde{f}(x)$$

Le conseil du prof :
Pour une application f et un ensemble B donnés, le prolongement n'est pas unique (sauf exception).Ainsi, l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ admet une infinité de prolongements $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ a \quad si \quad x = 0 \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$ (le prolongement donné avec $a = 1$ sera le seul prolongement continu sur $\mathbb{R}$ de f).

La composition

⋆ On considère les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
On définit la composée de f et de g, et on note $g \circ f$, l'application :

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

⋆ La composée est associative : pour $f : E \longrightarrow F$, $g : F :\longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Le conseil du prof :
Pour calculer la composée $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ on remplace dans l'expression de $g(x)$ la variable x par l'expression de $f(x)$.
Ainsi, si $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 + 2x$, on a :

$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^3 + 2(x^2 + 1).$$

Injection, surjection, bijection

Définitions

On considère une application $f : E \longrightarrow F$.

$\star$ On dira que f est injective si : $\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

$\star$ On dira que f est surjective si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.

$\star$ On dira que f est bijective si : $\forall y \in F,\ \exists\,!\ x \in E,\ y = f(x)$
(c'est-à-dire injective et surjective).

Dans le cas où f est bijective, on notera f^{-1} son application réciproque et on a l'équivalence : $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$ (ce qui donne $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$).
On a aussi $f^{-1} : F \longrightarrow E$.

On peut traduire la notion d'injectivité par : tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E.
Pour la surjectivité : tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E.
Et pour la bijectivité : tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E.

Le conseil du prof :
Lorsque l'on nous demande de montrer qu'une application est bijective et que l'on exige l'application réciproque f^{-1}, on pensera directement à la résolution de l'équation $y = f(x)$ pour avoir les deux dans un même élan.

Composée de deux bijections

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections.
Alors, la composée $g \circ f$ est aussi bijective et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Les basiques

★☆☆ Exercice 1 : composée, injectivité et surjectivité

Soit $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ deux applications.

1. Montrez que : f et g injectives $\Longrightarrow g \circ f$ injective.
2. Montrez que : f et g surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ surjective.
3. Montrez que : $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
4. Montrez que : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.

1. On suppose que f et g sont injectives, montrons que $g \circ f$ l'est aussi.
   On suppose que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in A$.
   Cela s'écrit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$; comme g est injective et que $f(x_1), f(x_2) \in B$, on a : $f(x_1) = f(x_2)$.
   À présent, comme f est injective et que $x_1, x_2 \in A$, on a : $x_1 = x_2$.
   En résumé, $g \circ f$ est bien injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives, montrons que $g \circ f$ l'est aussi.
   Comme $g : B \longrightarrow C$ est surjective, on a :

   $$\forall z \in C,\ \exists y \in B,\ z = g(y)$$

   Comme $y \in B$ et que $f : A \longrightarrow B$ est surjective, on a :

   $$\exists x \in A,\ y = f(x)$$

   En résumé, on a montré que :

   $$\forall z \in C,\ \exists x \in A,\ z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

   c'est-à-dire : $g \circ f : A \longrightarrow C$ est surjective.
3. On suppose que $g \circ f : A \longrightarrow C$ est surjective c'est-à-dire :

   $$\forall y \in C,\ \exists x \in A,\ y = (g \circ f)(x)$$

Ainsi, on peut écrire que :

$$\forall y \in C,\ \exists x \in A,\ y = g(f(x))$$

Or $f(x) \in B$ (vu que $f : A \longrightarrow B$) et en le notant z, on a ainsi :

$$\forall y \in C,\ \exists z \in B,\ y = g(z)$$

soit g surjective.

4. Supposons que $g \circ f$ soit surjective et supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in A$.
En composant cette dernière égalité par g, on a :

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

Comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x_1 = x_2$ et donc f est injective.

★★☆ Exercice 2 : bijections réciproques

Montrez que les applications suivantes sont bijectives et déterminez leur application réciproque f^{-1} :

1. $f :]1;+\infty[\longrightarrow]3;+\infty[,\ x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-1}$.
2. $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\},\ x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ (on pourra calculer $f \circ f$).

1. On résout l'équation, pour $x > 1$ et $y > 3$, $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{3x+1}{x-1} \\ &\iff y(x-1) = 3x+1 \\ &\iff x(y-3) = y+1 \\ &\iff x = \frac{y+1}{y-3} \end{aligned}$$

La résolution donnant une unique solution nous indique que f est bijective et que $f^{-1} :]3;+\infty[\longrightarrow]1;+\infty[$ est définie par :

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-3}$$

2. On calcule $f \circ f(x)$ ce qui nous donne pour $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \\ &= \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x} \\ &= \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$

On a donc montré que $f \circ f = Id$ ce qui nous permet de conclure que f est bijective et $f^{-1} = f$.

Chapitre 2

Limites et comparaisons

L'essentiel du cours

Notion de base

Les différentes configurations

Soit f une application définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$.

$\star$ On dit que f admet l pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

$\star$ On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A$$

(resp. $f(x) \leq A$)

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

$\star$ On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq M \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$$

(resp. $x \leq M \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$)

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$).

$\star$ On dit que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq M \Longrightarrow f(x) \geq A$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour la dernière configuration, si la limite est en $-\infty$ on change $x \geq M$ en $x \leq M$ et si la limite vaut $-\infty$ on change $f(x) \geq A$ en $f(x) \leq A$.

Limites à gauche et à droite

⋆ On dit que f admet l pour limite à gauche de a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \eta \leq x \leq a \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

⋆ On dit que f admet l pour limite à droite de a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a \leq x \leq a + \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

Le conseil du prof :
De manière générale, on a l'équivalence :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

Si de plus f est définie en a alors ces limites sont égales à $f(a)$.

La propriété d'unicité

Si f admet une limite en a alors elle est nécessairement unique.

Opérations sur les limites

Pour les limites finies

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des applications, $a \in I \cup \{\pm\infty\}$ et $l, l', \alpha \in \mathbb{R}$.

⋆ La limite est compatible avec la combinaison linéaire :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l' \end{cases} \Longrightarrow \alpha f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha l + l'$$

⋆ La limite est compatible avec le produit :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \end{cases} \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} ll'$$

⋆ La limite est compatible avec le quotient :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{l}{l'}$$

Pour les limites infinies

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des applications, $a \in I \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}$.

⋆ Pour la somme :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty) \end{cases} \Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty)$$

Par contre, il y a une forme indéterminée si les limites infinies de f et g sont opposées.

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \end{cases} \Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty)$$

⋆ Pour le produit :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \end{cases} \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$$

(en respectant la règle des signes)

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$$

(en respectant la règle des signes).
Par contre, il y a une forme indéterminée si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

⋆ Pour l'inverse :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0, \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^+ \text{ (resp. } 0^-) \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } 0^+)$$

Pour la composition de limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ (avec $f(I) \subset J$) deux applications. Pour a, b, l des valeurs finies ou infinies on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \\ g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} l \end{cases} \Longrightarrow g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

Limites et inégalités

Du strict au large

Si au voisinage de a (fini ou infini) $f(x) > g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Théorème d'encadrement

Si au voisinage de a (fini ou infini), on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alors on en déduit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$$

Théorème de comparaison

$$\star \begin{cases} \text{Au voisinage de } a,\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \end{cases} \Longrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{Au voisinage de } a,\ f(x) \leq g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \end{array} \right. \quad \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty.$$

Fonctions négligeables

Définition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que $\forall x \in I - \{a\},\ g(x) \neq 0$ (a peut être infini).
On dira que f est négligeable devant g au voisinage de a si :

$$\exists \varepsilon : I \to \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x) g(x)$$

où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
On notera alors $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ ou plus simplement $f \underset{a}{=} o(g)$ (notation de Landau).

Le conseil du prof :
Cette définition nous permet d'affirmer que : $x^k \times o(x) = o(x^{k+1})$ *et pour* $k \geq 1$, $\dfrac{o(x^k)}{x} = o(x^{k-1})$.

Négligeabilité et limite

Avec les notations précédentes, on a l'équivalence :

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Le conseil du prof :
Ainsi, dire que $f \underset{a}{=} o(1)$ *signifie que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Négligeabilités classiques

$\star\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \iff \alpha < \beta$ et $x^\alpha \underset{0^+}{=} o(x^\beta) \iff \alpha > \beta$.
$\star\ \forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ (\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$.
$\star\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta > 0,\ x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$.

Le conseil du prof :
On en déduit alors les croissances comparées suivantes :
$\dfrac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$; $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$; $\dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; $x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Attention aux fausses croissances comparées comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2}$ *où il faut changer la variable et poser* $X = x^2$ *; on a alors* $\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$.

Fonctions équivalentes

Définition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que $\forall x \in I - \{a\},\ f(x),\ g(x) \neq 0$ (a peut être infini).
On dira que f est équivalente à g au voisinage de a si :

$$\exists \varepsilon : I \to \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$$

où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
On notera alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Équivalence et limite

Avec les notations précédentes, on a l'équivalence :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Le conseil du prof :
Avec ces caractérisations, on peut alors donner un lien entre la négligeabilité et l'équivalence de fonctions :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(g) \iff g - f \underset{a}{=} o(f)$$

Équivalence et opérations

⋆ Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.

⋆ Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall n \geq 1,\ f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

⋆ Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$ ($f, g \neq 0$ au voisinage de a).

Le conseil du prof :
L'équivalent de fonction n'est pas compatible avec l'addition comme nous le montre l'exemple suivant : $e^x + e^{2x} \underset{x\to-\infty}{\sim} e^x$ *et* $-e^x + e^{3x} \underset{x\to-\infty}{\sim} -e^x$ *mais pour autant on a* $(e^x + e^{2x}) + (-e^x + e^{3x}) \underset{x\to-\infty}{\nsim} 0$ *(la somme est équivalente à* e^{2x}*).*
De même, les équivalents ne sont pas compatibles avec les fonctions exponentielle et logarithme.

Équivalents classiques

⋆ Un polynôme est équivalent au voisinage de $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

⋆ Un polynôme est équivalent au voisinage de 0 à son terme de plus bas degré.

⋆ $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

⋆ $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

⋆ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

Les conseils du prof :

⋆ *On en déduit alors les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

⋆ *Les équivalents sont, très souvent, utilisés pour calculer une limite. Si l'on a* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

Une question ? des réponses !

Comment calculer la limite d'une fonction ?

À l'aide d'une factorisation

L'idée de la factorisation est de lever une forme indéterminée. Cette méthode est souvent liée à l'utilisation des croissances comparées car on a tendance à factoriser par le terme « fort » de l'expression.

À l'aide d'un encadrement ou d'une comparaison

Voir cours.

À l'aide des limites à gauche et à droite

La méthode est intéressante dans le cas où l'expression de $f(x)$ est différente à gauche et à droite de a (avec présence de valeurs absolues par exemple).
On a alors :

$$f \text{ admet une limite } l \text{ en } a \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

À l'aide du théorème de la limite monotone

Il y a plusieurs cas à distinguer :
⋆ *Soit f une fonction croissante sur $[a;b[$ (où b est fini ou infini) alors :*

$$f \text{ majorée sur } [a;b[\Longrightarrow \lim_{x \to b} f(x) \text{ existe}$$

$$f \text{ non majorée sur } [a;b[\Longrightarrow \lim_{x \to b} f(x) = +\infty$$

⋆ *Soit f une fonction décroissante sur $[a;b[$ (où b est fini ou infini) alors :*

$$f \text{ minorée sur } [a;b[\Longrightarrow \lim_{x \to b} f(x) \text{ existe}$$

$$f \text{ non minorée sur } [a;b[\Longrightarrow \lim_{x \to b} f(x) = -\infty$$

À l'aide de l'expression conjuguée

Les ingrédients pour utiliser cette méthode sont simples : (au moins) une racine et une différence.
On rappelle le principe :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Par exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

À l'aide d'un équivalent

On rappelle les équivalents classiques :

$$e^x-1\underset{x\to0}{\sim}x,\quad \ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}x,\quad \ln(u)\underset{u\to1}{\sim}u-1,\quad (1+x)^\alpha-1\underset{x\to0}{\sim}\alpha x,$$

$$\textit{polynôme}\underset{x\to\infty}{\sim}\textit{terme de + haut degré}$$

L'équivalent est compatible avec le produit et le quotient mais incompatible avec la somme.
On a le résultat :

$$\begin{cases} f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x) \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=l \end{cases}\Longrightarrow\lim_{x\to a}f(x)=l$$

À l'aide de croissances comparées

Les croissances comparées relatives aux fonctions logarithmes, puissances, exponentielles se résument en :

$$\frac{e^x}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,\quad xe^x\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0,\quad x\ln x\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0,\quad \frac{x}{\ln x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

Ceci se traduit par : l'exponentielle l'emporte sur les puissances (on peut remplacer x par tout x^α) et les puissances l'emportent sur le logarithme (et donc l'exponentielle sur le logarithme).

À l'aide d'un développement limité

On rappelle les développements limités à l'ordre 2 en 0 classiques :

$\star$ $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + +o(x^2)$.
$\star$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.
$\star$ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.
$\star$ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Cette méthode est le dernier recours et souvent la bouée de sauvetage des équivalents quand ces derniers ont été mis en défaut par une somme ou une différence.

10 questions pour se tester

Q1 : Peut-on affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} = 0$ par croissances comparées ?

Q2 : Que vaut $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$?

Q3 : Si l'on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ alors peut-on affirmer que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$?

Q4 : Si l'on a $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors peut-on affirmer que $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$?

Q5 : Si l'on a $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors peut-on affirmer que $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{=} o\Big(\dfrac{g_1}{g_2}\Big)$?

Q6 : Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x$?

Q7 : Si l'on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ alors peut-on affirmer que l'on a $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \leq 2$?

Q8 : Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x\ln x)$?

Q9 : Que vaut $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$?

Q10 : Si l'on a le développement limité en 0 : $f(x) = x - 3x^2 + o(x^2)$, que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$?

R1 *: Non ! On doit passer par un changement de variable :* $X = \sqrt{x}$ *(*$x \to +\infty \Longrightarrow X \to +\infty$*).*
On a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$ *par croissances comparées.*
R2 *: On n'a pas de forme indéterminée (on a la forme* $\frac{-\infty}{0^+}$*) et on trouve que :* $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.
R3 *: Non ! Si l'on considère* $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ *et* $a = +\infty$ *; on n'a pas* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ *alors que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
R4 *: On a :* $\dfrac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \dfrac{f_1}{g_1} \times \dfrac{f_2}{g_2} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$ *grâce aux négligeabilités supposées, donc* $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$
R5 *: On a :* $\dfrac{\dfrac{f_1}{f_2}}{\dfrac{g_1}{g_2}} = \dfrac{f_1}{g_1} \times \dfrac{g_2}{f_2}$ *et on arrive à la forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$ *donc on ne peut conclure sur sa limite (quand* $x \to a$*).*
R6 *: Avec la puissance* x*, on opte pour la transformation :* $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = exp\Big(x\ln\big(1+\dfrac{1}{x}\big)\Big)$.
On a : $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} = 1$ *d'où :* $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = exp\Big(x\ln\big(1+\dfrac{1}{x}\big)\Big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e$.
R7 *: Non ! On ne connaît rien sur la monotonie de* f *donc on pourrait imaginer que* f *décroisse vers 2.*
R8 *: On a* $x^2 - xlnx = x^2\Big(1 - \dfrac{\ln x}{x}\Big)$ *; comme* $\dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par croissances comparées, on trouve que :* $x^2 - x\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *par produit.*
R9 *: Avec la puissance* x*, on opte pour la transformation :* $x^x = e^{x\ln x}$.
Par croissances comparées on a $x\ln x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$ *puis, par continuité de l'exponentielle, il vient :* $x^x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 1$.
R10 *: On a :* $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x - 3x^2 + o(x^2)}{x} = 1 - 3x + o(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$.

Les basiques

★☆☆ Exercice 1 : calcul de limites en 0

Calculez, lorsque x tend vers 0, les limites des expressions suivantes :

1. $\dfrac{(2x^2+3x^3)(2x+5)}{5x^2+x^4}$
2. $\dfrac{(x-x^2)\ln(1+\frac{x}{3})}{x\ln(1-\frac{2x}{3})}$
3. $\dfrac{(1-e^x)\ln(1-x^2)}{x^2+x^3}$

1. On a le calcul par équivalent :

$$\frac{(2x^2+3x^3)(2x+5)}{5x^2+x^4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^2\times 5}{5x^2} = 2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$$

2. On a le calcul par équivalent :

$$\frac{(x-x^2)\ln(1+\frac{x}{3})}{x\ln(1-\frac{2x}{3})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\times\frac{x}{3}}{x\times\left(-\frac{2x}{3}\right)} = -\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

3. On a le calcul par équivalent :

$$\frac{(1-e^x)\ln(1-x^2)}{x^2+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x\times(-x^2)}{x^2} = x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

★☆☆ Exercice 2 : savoir maîtriser les ordres de grandeur

Pour les fonctions f et g suivantes, précisez celle qui est négligeable devant l'autre ou s'il n'y a pas de négligeabilité.

1. $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $g(x) = x \ln x$ en $+\infty$.
2. $f(x) = x^x$ et $g(x) = e^x$ en $+\infty$.
3. $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $g(x) = x^n + 2x + 6$ en $+\infty$.
4. $f(x) = x$ et $g(x) = x \ln x$ en 0.

1. On a :
$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x \ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x^{n-1}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
par croissances comparées.
On en déduit alors que :
$$g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$$

2. La puissance x nous invite à transformer la forme de f :
$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$
On a :
$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{e^x}{e^{x \ln x}} = e^{x - x \ln x} = e^{x(1 - \ln x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
par produit et composée de limites.
On en déduit alors que :
$$g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$$

3. On a :
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^n}{x^n + 2x + 6} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^n} = 1$$
Ainsi, on a :
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$
ce qui nous permet de conclure que :
$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$$
et il n'y a donc pas de négligeabilité entre les deux fonctions.

4. On a :
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$
par quotient de limite.
On en déduit alors que :
$$f(x) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$$

★★☆ Exercice 3 : calculs de limites en $+\infty$

Calculez, lorsque x tend vers $+\infty$, les limites des expressions suivantes :

1. $\dfrac{(2x^2+x^4)(2+x)}{x+5x^5}$
2. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
3. $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$

1. On a le calcul par équivalent :

$$\frac{(2x^2+x^4)(2+x)}{x+5x^5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^4\times x}{5x^5} = \frac{1}{5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{5}$$

2. Tout d'abord, on écrit :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = exp\Big(x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)\Big)$$

On se focalise sur ce qui se trouve dans l'exponentielle :

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{x} = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, par composition, on a :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e$$

3. Tout d'abord, on écrit :

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = exp\Big(x\ln\big(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\big)\Big)$$

On se focalise sur ce qui se trouve dans l'exponentielle :

$$x\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-1\right) = \frac{2x^2}{x^2-x+1}$$

Comme cette dernière quantité tend vers 2 en $+\infty$, on a par composition :

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^2$$

★★☆ **Exercice 4 : calculs de limites en** 0

Calculez, lorsque x tend vers 0, les limites des expressions suivantes :

1. $\dfrac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}$
2. $\dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{4}}-1}{\ln(1+x^2+x^3)}$
3. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}$

1. Comme on ne peut faire de somme d'équivalents, on sépare les fractions :

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3} &= \frac{2(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+\frac{x}{4}})}{3(\sqrt{1+\frac{x}{3}}-1)}\\ &= \frac{2}{3}\Big(\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+\frac{x}{3}}-1}-\frac{\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1}{\sqrt{1+\frac{x}{3}}-1}\Big)\\ &= \frac{2}{3}(A(x)-B(x))\end{aligned}$$

Par contre, on a le droit de faire une somme de limites :

$$A(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{6}} = 2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$$

$$B(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x}{8}}{\frac{x}{6}} = \frac{3}{4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$$

On en déduit alors par somme que :

$$\frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{3}\Big(2-\frac{3}{4}\Big) = \frac{5}{6}$$

2. On a par équivalent :

$$\frac{\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{4}}-1}{\ln(1+x^2+x^3)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{12}}{x^2+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{12}}{x^2} = -\frac{1}{12} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{12}$$

3. Avec l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)} &= \frac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{2\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)} \\ &= \frac{1-x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

★★☆ Exercice 5 : calculs de limites en $+\infty$

Calculez, lorsque x tend vers $+\infty$, les limites des expressions suivantes :

1. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}$
2. $x^2(e^{1/x}-e^{1/(x+1)})$
3. $\Big(\dfrac{x-1+\ln a}{x-1}\Big)^x$ où $a>0$

1. Par l'expression conjuguée :
$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2x}=\frac{-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}}$$
Et par factorisation :
$$\frac{-x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}})}=\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$$
2. On a le calcul :
$$\begin{aligned}x^2\Big(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\Big) &= x^2e^{\frac{1}{x}}(1-e^{\frac{1}{x+1}}e^{-\frac{1}{x}})\\ &= x^2e^{\frac{1}{x}}\Big(1-e^{-\frac{1}{x(x+1)}}\Big)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2\times\frac{1}{x(x+1)}\\ \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & \ 1\end{aligned}$$
3. Tout d'abord, on passe par l'exponentielle :
$$\Big(\frac{x-1+\ln a}{x-1}\Big)^x=exp\Big(x\ln\big(\frac{x-1+\ln a}{x-1}\big)\Big)$$
On se focalise sur l'intérieur :
$$x\ln\Big(\frac{x-1+\ln a}{x-1}\Big)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\Big(\frac{x-1+\ln a}{x-1}-1\Big)=\frac{x\ln a}{x-1}$$
Il nous faut donc écarter le cas où $a=1$ (cas donnant 1 avec la forme initiale).
On a alors :
$$x\ln\Big(\frac{x-1+\ln a}{x-1}\Big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ln a$$
Et par composition, il vient :
$$\Big(\frac{x-1+\ln a}{x-1}\Big)^x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}e^{\ln a}=a$$

★★☆ Exercice 6 : calculs de limites dépendant d'un paramètre

Étudiez suivant les valeurs de a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{a}{(x^2-1)^2}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{a}{x^3-1}\right)$

1. On a la simplification :

$$\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{a}{(x^2-1)^2}=\frac{(x+1)^2-a}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Déterminons le cas particulier où le numérateur est factorisable par $x-1$ c'est-à-dire quand il s'annule en $x=1$.
On trouve $a=4$.
⋆ Dans ce cas :

$$\frac{(x+1)^2-4}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)^2}$$

Et cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x\to 1^+$ (resp. $-\infty$ quand $x\to 1^-$).
Les autres cas s'articulent autour de $a=4$.
⋆ Si $a>4$, on a :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2-a}{(x-1)^2(x+1)^2}=-\infty$$

car $(x+1)^2-a\to 4-a<0$
⋆ Si $a>4$, on trouve de même :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2-a}{(x-1)^2(x+1)^2}=+\infty$$

2. Avec la même méthode, on trouve que :

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{a}{x^3-1}=\frac{x^2+(1-a)x+1-a}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

et le numérateur a 1 pour racine $\iff a=\dfrac{3}{2}$.
On trouve alors que :

⋆ Si $a = \dfrac{3}{2}$,

$$\frac{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{x + \frac{1}{2}}{(x+1)(x^2+x+1)} \to \frac{1}{4}$$

⋆ Si $a > \dfrac{3}{2}$, alors la quantité tend vers $-\infty$ en 1^+ ($+\infty$ en 1^-).

⋆ Si $a < \dfrac{3}{2}$, alors la quantité tend vers $+\infty$ en 1^+ ($-\infty$ en 1^-).

★★☆ Exercice 7 : recherche d'équivalents

Donnez un équivalent en $+\infty$ des expressions suivantes :

1. $\dfrac{-2x^3+5x-1}{3x^2-2x+5}$
2. $x\ln\left(\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-x-1}\right)$
3. $\ln(e^x+x^3+x)$
4. $\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x}-1}$
5. $x\sqrt[4]{1+\dfrac{3}{4x^2}}$
6. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^{3a}-2x^a-1}-x^a}$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$

1. On trouve que :
$$\frac{-2x^3+5x-1}{3x^2-2x+5}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-2x^3}{3x^2}=-\frac{2}{3}x$$

2. On a l'équivalent :
$$x\ln\left(\frac{x^2-2x+5}{x^2-x-1}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\left(\frac{x^2-2x+5}{x^2-x-1}-1\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-1$$

3. Comme on ne peut prendre d'équivalent composé avec le ln, on factorise :

   $\ln(e^x+x^3+x)=\ln(e^x(1+x^3e^{-x}+xe^{-x}))=x+\ln(1+x^3e^{-x}+xe^{-x})$

   On a alors le quotient :
$$\frac{\ln(e^x+x^3+x)}{x}=1+\frac{\ln(1+x^3e^{-x}+xe^{-x})}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$$
   donc on a :
$$\ln(e^x+x^3+x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x$$

4. On trouve que :
$$\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x}-1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-1$$

5. On trouve que :

$$x\sqrt[4]{1+\frac{3}{4x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\frac{3}{16x^2}=\frac{3}{16x}$$

6. Il nous faut tout d'abord factoriser :

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^{3a}(1-2x^{-2a}-x^{-3a})}-x^a}=\frac{x}{x^a(\sqrt[3]{1-2x^{-2a}-x^{-3a}}-1)}$$

Comme $a>0$, on alors l'équivalent :

$$\frac{x}{x^a(\sqrt[3]{1-2x^{-2a}-x^{-3a}}-1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^{1-a}}{\frac{1}{3}(-2x^{-2a}-x^{-3a})} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2}x^{1+a}$$

★★☆ Exercice 8 : compatibilité de l'équivalent avec ln et *exp* sous certaines conditions

1. Soit $f, g :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $c \in]a;b[$ ou $c \in \{a;b\}$ (a et b peuvent être infinis).
   Montrez que :
   $$e^{f(x)} \underset{x\to c}{\sim} e^{g(x)} \iff \lim_{x\to c}(f-g)(x) = 0$$
2. On suppose de plus que $f > 0$ au voisinage de c et $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$.
   Montrez que :
   $$f(x) \underset{x\to c}{\sim} g(x) \Longrightarrow \ln(f(x)) \underset{x\to c}{\sim} \ln(g(x))$$
3. Déterminez un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\ln(e^x - 1)$.

1. On a les équivalences :
   $$\begin{aligned} e^{f(x)} \underset{x\to c}{\sim} e^{g(x)} &\iff \lim_{x\to c} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1 \\ &\iff \lim_{x\to c} e^{f(x)-g(x)} = 1 \\ &\iff \lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = 0 \end{aligned}$$
   par continuité de la fonction ln.
2. On suppose que $f(x) \underset{x\to c}{\sim} g(x)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
   Comme $f > 0$ au voisinage de c et que $f(x) \underset{x\to c}{\sim} g(x)$ alors $g > 0$ au voisinage de c aussi (car le quotient tend vers 1 et donc est > 0).
   Grâce à cet équivalent et aux limites possibles de f, on en déduit aussi que $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$.

   Comme on connaît la limite de $\dfrac{f}{g}$, on écrit :
   $$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(g(x)) + \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}$$
   (on a $g(x) > 0$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$)

Par continuité du ln, on a : $\ln\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) \underset{x\to c}{\longrightarrow} 0$.
Que l'on ait $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$, on a : $\ln(g(x)) \underset{x\to c}{\longrightarrow} \infty$ et ainsi :

$$\frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} \underset{x\to c}{\longrightarrow} 0$$

Finalement, on a montré que :

$$\lim_{x\to c} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = 1$$

ce qui signifie que :

$$\ln(f(x)) \underset{x\to c}{\sim} \ln(g(x))$$

3. $\star$ Comme $e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$ et que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a grâce à 2. :

$$\ln(e^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$$

$\star$ Comme $e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - 1) = +\infty$ et que $e^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$, on a grâce à 2. :

$$\ln(e^x - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(e^x) = x$$

★★★ Exercice 9 : calculs de limites et partie entière

Calculez les limites suivantes où $E(x)$ est la partie entière de x :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{aE(bx)}{x}$, $a, b \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\big(E(x)\big)}{\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}E(\ln x)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} xE\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xE\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$

1. Pour $x > 0$, on a : $E(bx) \leq bx < E(bx) + 1$ d'où :

$$b - \frac{1}{x} < \frac{E(bx)}{x} \leq b$$

Par le théorème d'encadrement, $\dfrac{E(bx)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} b$ et ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{aE(bx)}{x} = ab$$

2. En composant par ln croissante, on obtient :

$$\frac{\ln(E(x))}{\sqrt{x}} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} < \frac{\ln(E(x)+1)}{\sqrt{x}}$$

Or, on a :

$$\frac{\ln(E(x)+1)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(E(x))}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{E(x)}\right)}{\sqrt{x}}$$

et alors, on a l'encadrement :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{E(x)}\right)}{\sqrt{x}} < \frac{\ln(E(x))}{\sqrt{x}} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

d'où par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(E(x))}{\sqrt{x}} = 0$$

3. On a l'encadrement :

$$\sqrt{x}E(\ln x) \leq \sqrt{x}\ln x < \sqrt{x}E(\ln x) + \sqrt{x}$$

d'où :

$$\sqrt{x}\ln x - \sqrt{x} < \sqrt{x}E(\ln x) \leq \sqrt{x}\ln x$$

Par encadrement (et avec les croissances comparées), on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}E(\ln x) = 0$$

4. $\star$ On a l'encadrement :

$$\frac{1}{x} - 1 < E\Big(\frac{1}{x}\Big) \leq \frac{1}{x}$$

Si $x > 0$, on a :

$$1 - x < xE\Big(\frac{1}{x}\Big) \leq 1$$

et par encadrement : $\lim\limits_{x\to 0^+} xE\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1$.
On trouve la même limite pour $x < 0$.
$\star$ Si $x > 1$, on a : $0 < \frac{1}{x} < 1$ et donc $E\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0$ et alors la limite est nulle.

Chapitre 3

Fonctions

L'essentiel du cours

Fonctions usuelles

Fonction valeur absolue

On appelle fonction valeur absolue, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Les conseils du prof :

⋆ *Par la définition même, on en déduit que* $|-x| = |x|$.

⋆ *Que ce soit en probabilité (pour l'étude d'une variable aléatoire), en analyse (pour l'étude d'une fonction) ou parfois en algèbre, la seule présence de la valeur absolue vous guide vers une nouvelle écriture de la quantité à étudier suivant le signe de ce qui se trouve à l'intérieur et nous amène ainsi à une distinction de cas.*

⋆ *La valeur* $|x-y|$ *représente la distance entre les réels* x *et* y.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (éventuellement $\neq 0$), $a \in \mathbb{R}$ on a :

⋆ Produit, puissance et quotient :

$$|xy| = |x||y|, \quad |x^a| = |x|^a, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

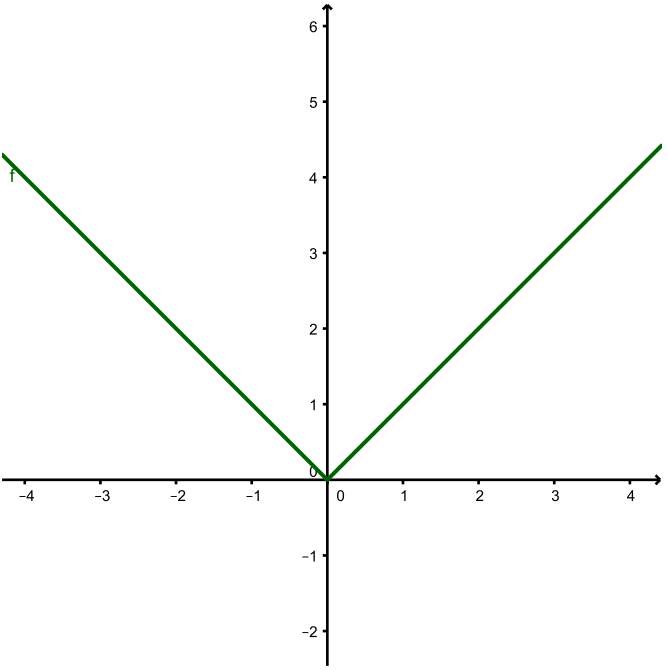
⋆ Inégalité triangulaire :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

⋆ Pour tout $a \geq 0$,

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \iff \big(x \geq a \ \text{ ou } \ x \leq -a\big)$$



Fonction valeur absolue

Fonction puissance

⋆ Pour $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a les propriétés algébriques :

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad x^{a+b} = x^a x^b,$$

$$(x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

⋆ Équations :

si n est pair et $y > 0$ alors l'équation $x^n = y$ a 2 solutions : $\sqrt[n]{y}$ ou $-\sqrt[n]{y}$;

si n est impair, l'équation $x^n = y$ a une unique solution : $\sqrt[n]{y}$.

$\sqrt[n]{y}$ s'écrit aussi $y^{1/n}$.
On a le cas particulier de la racine carrée :

$$\forall x \geq 0,\ \sqrt{x} = x^{1/2}$$

On a alors pour tout $x \geq 0$,

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad et \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

Le conseil du prof :
Sur la racine carrée, on pourra aussi retenir que :
$x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ et $x^2 \geq a \iff (x \geq \sqrt{a}$ ou $x \leq -\sqrt{a})$.

Fonction logarithme

⋆ Pour tous $x, y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$$

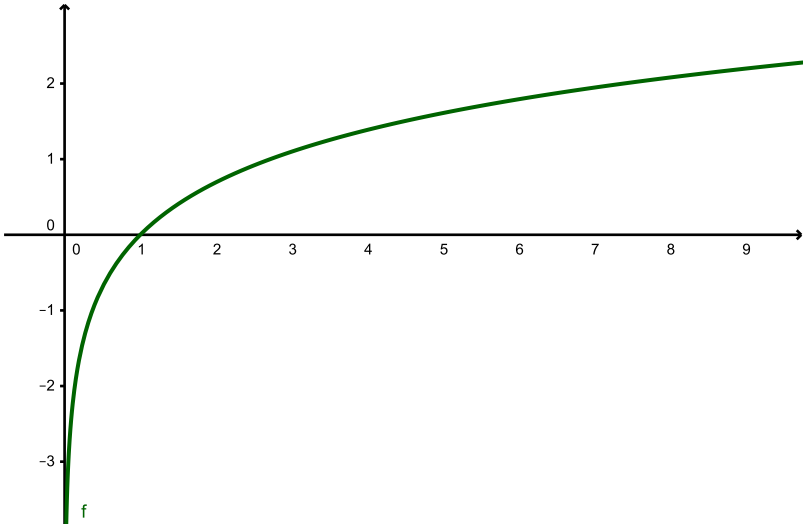
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

⋆ Équations et inéquations : pour tous $x, y > 0$, on a :

$$\ln x = \ln y \iff x = y$$

$$\ln x \leq \ln y \iff x \leq y$$

Le conseil du prof :
Lors de l'utilisation de ces propriétés, on n'oubliera pas de signaler sur sa copie la stricte positivité des termes mis en jeu. En effet, on peut imaginer la quantité $\ln(xy)$ avec x et $y < 0$ mais on ne pourrait alors l'égaler à $\ln x + \ln y$ (les termes n'étant pas définis).



Fonction logarithme

Fonction exponentielle

⋆ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad (e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

⋆ Équations et inéquations : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x = e^y \iff x = y$$

$$e^x \leq e^y \iff x \leq y$$

Les conseils du prof :

⋆ *On a le lien entre l'exponentielle et le logarithme :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x \text{ et } \forall x > 0,\ e^{\ln x} = x.$$

On dit que les fonctions ln *et exp sont réciproques l'une de l'autre ; les courbes représentatives de* ln *et exp sont symétriques par rapport à la droite* $y = x$.

⋆ *On a l'écriture pour* $a > 0$ *:* $a^x = e^{x \ln a}$.