

SCIENCES SUP

Exercices & Problèmes

Licence • Écoles d'ingénieurs

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

- ▶ **Rappels de cours**
- ▶ **Méthodes**
- ▶ **Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés**

*Yves Leroyer
Patrice Tesson*

DUNOD

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

- ▶ **Rappels de cours**
- ▶ **Méthodes**
- ▶ **Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés**

Consultez nos parutions sur dunod.com

The screenshot shows the Dunod website interface. At the top, there's a navigation bar with the Dunod logo and links to 'Dunod l'éditeur', 'édition de livres', 'Microsoft Press', 'ETSF', 'Éditions', and 'Intelligence'. Below this is a search bar and a 'Recherche' button. The main content area is divided into several sections:

- Interviews:** Features interviews with Gilles Verrier and Thierry de Montfort.
- Événements:** Promotes the 'Bacchus 2008' event.
- En librairie ce mois-ci:** Highlights new arrivals.
- Sciences et techniques:** Includes books like 'Bacchus 2008' and 'Python'.
- Informatic:** Features 'Python' and '150 petites expériences de psychologie du sport'.
- Gestion et Management:** Includes 'Profession dirigeant'.
- Sciences Humaines:** Features '150 petites expériences de psychologie du sport'.
- LES DICTIONNAIRES DES METIERS:** A section for professional dictionaries.
- LES NEWSLETTERS:** A section for newsletters.

The footer contains links to 'Bibliothèque des métiers', 'newsletters', 'Microsoft Press', 'editions', and 'support'. The page is designed with a clean, professional layout, using a mix of text and images to showcase the publisher's offerings.

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

- ▶ Rappels de cours
- ▶ Méthodes
- ▶ Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés

Yves Leroyer

Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique
et de Radiocommunications de Bordeaux (ENSEIRB)

Patrice Tesson

Professeur agrégé à l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique
et de Radiocommunications de Bordeaux (ENSEIRB)

DUNOD

Illustration de couverture : *digitalvision*[®]

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2009
ISBN 978-2-10-053937-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	viii
NOTATIONS	ix
CHAPITRE 1 • OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE	1
Rappels de cours	1
1.1 Rappels d'analyse 1.2 Les fonctions utilisées en physique 1.3 Les Séries de Fourier 1.4 Les fonctions définies par des intégrales	
Énoncés des exercices	9
Énoncés des problèmes	13
Du mal à démarrer ?	15
Corrigés des exercices	17
Corrigés des problèmes	34
CHAPITRE 2 • TRANSFORMATION DE FOURIER	41
Rappels de cours	41
Énoncés des exercices	43
Énoncés des problèmes	45
Du mal à démarrer ?	49
Corrigés des exercices	50
Corrigés des problèmes	58
CHAPITRE 3 • TRANSFORMATION DE LAPLACE	66
Rappels de cours	66
Énoncés des exercices	68
Énoncés des problèmes	70
Du mal à démarrer ?	73
Corrigés des exercices	75
Corrigés des problèmes	84

Table des matières

CHAPITRE 4 • INTÉGRALES COMPLEXES ; THÉORÈME DES RÉSIDUS	95
Rappels de cours	95
Énoncés des problèmes	97
Du mal à démarrer ?	102
Corrigés des problèmes	103
 CHAPITRE 5 • DISTRIBUTIONS	 124
Rappels de cours	124
Énoncés des exercices	126
Énoncés des problèmes	128
Du mal à démarrer ?	131
Corrigés des exercices	132
Corrigés des problèmes	139
 CHAPITRE 6 • FILTRES ET CAUSALITÉ	 148
Rappels de cours	148
Énoncés des problèmes	149
Du mal à démarrer ?	153
Corrigés des problèmes	154
 CHAPITRE 7 • FONCTIONS DE BESSEL	 165
Rappels de cours	165
Énoncés des exercices	166
Énoncés des problèmes	169
Du mal à démarrer ?	176
Corrigés des exercices	177
Corrigés des problèmes	185
 CHAPITRE 8 • FONCTIONS ORTHOGONALES	 196
Rappels de cours	196
Énoncés des problèmes	197
Du mal à démarrer ?	204

Corrigés des problèmes	205
CHAPITRE 9 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	221
Rappels de cours	221
9.1 Les équations différentielles linéaires 9.2 Équations aux dérivées partielles	
Énoncés des problèmes	224
Du mal à démarrer ?	229
Corrigés des problèmes	230
BIBLIOGRAPHIE	248
INDEX	249

AVANT-PROPOS

Ce livre est un recueil d'exercices et de problèmes dans les grands secteurs des mathématiques pour l'ingénieur. Il s'adresse aux étudiants de troisième année de Licence de physique et d'EEA ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs. Il est le fruit d'un enseignement de mathématiques pour l'ingénieur dispensé en première année de l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique et de Radiocommunication de Bordeaux (ENSEIRB).

Nous avons pris le parti de privilégier l'exposé des méthodes de calcul et de recherche des solutions en laissant parfois le soin au lecteur d'établir par lui-même la justification mathématique de telle ou telle étape (convergence uniforme d'intégrales ou de séries, permutation d'intégrales...). Dans la plupart des chapitres, des exercices permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul. Les problèmes sont plus structurés, plus approfondis et surtout orientés vers les applications en physique de l'ingénieur. Certains peuvent constituer des « mini-projets » et être poursuivis par des calculs sur ordinateur (il est fait référence dans quelques problèmes à des prolongements sous Maple).

Le chapitre 1 rappelle et présente des notions qui seront utilisées dans la suite de l'ouvrage. La distribution de Dirac δ est exposée selon l'approche « phénoménologique » usuelle pour les physiciens qui permet une utilisation simple et extensive. L'étude plus rigoureuse des distributions fait l'objet du chapitre 5 (Distributions). Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux transformations intégrales de Fourier et de Laplace et à leurs applications en physique pour l'ingénieur, avec notamment au chapitre 3 plusieurs problèmes sur l'étude des lignes de transmission. Le chapitre 4 est consacré à l'étude des fonctions d'une variable complexe avec une orientation particulière vers le calcul d'intégrales. Ces notions sur les fonctions analytiques introduites au chapitre 4 et sur les distributions étudiées au chapitre 5 trouvent un prolongement au chapitre 6 où elles sont appliquées à la description du principe de causalité en physique et à la modélisation des filtres linéaires : relations de Kramers-Kronig, filtres à phase minimale, relations de Bayard-Bode, théorème de Paley-Wiener. Les fonctions de Bessel, chapitre 7, et les polynômes orthogonaux, chapitre 8, sont étudiés en vue de leur application à la résolution d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles (chapitre 9).

Cet ouvrage ne prétend pas à l'exhaustivité et certains domaines des mathématiques pour la physique n'y sont pas traités : la théorie des groupes dont les applications sont d'un niveau technique plus avancé, le calcul matriciel qui pour l'ingénieur ressort maintenant davantage du calcul sur ordinateur avec des outils comme Matlab, le calcul variationnel, dont le champ d'application est plus restreint.

La plupart des exercices et problèmes originaux de cet ouvrage sont l'œuvre d'une longue collaboration au sein de laquelle nous tenons à remercier plus particulièrement Bernard Morand, Michel Daumens, Michel Hontebeyrie et Pierre Minnaert.

NOTATIONS

Espaces

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	Entiers naturels, entiers relatifs	
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Nombres réels, nombres complexes	
$\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2$	Fonctions sommables, de carré sommable	5
$\mathcal{L}_{loc}^1$	Fonctions localement sommables	5
$\mathcal{S}$	Fonctions à décroissance rapide	124
$\mathcal{S}'$	Distributions tempérées	124

Fonctions

u	Fonction échelon de Heaviside	4
$\ln, \log$	Logarithme népérien, logarithme complexe	
Π_T	Fonction « porte »	6
Λ_T	Fonction « triangle »	6
sign	Fonction « signe »	6
sinc	Fonction sinus cardinal	6
Γ, B	Fonctions eulériennes	8
J_n, N_n, H_n	Fonctions de Bessel, Neumann, Hankel	165
I_n, K_n	Fonctions de Bessel modifiées	165

Distributions

$\langle T, \phi \rangle$	Action d'une distribution T sur une fonction test ϕ	124
δ	Dirac (distribution de, impulsion de)	6, 124
III	Peigne de Dirac	124
$\text{Pf } \frac{1}{x}$	Pseudo-fonction $\frac{1}{x}$	124
$[f]^x$	Distribution régulière associée à la fonction f	124

Transformations

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	Transformation de Fourier directe, inverse	41
$\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$	Transformation de Laplace directe, inverse	66

Divers

$\bar{z}$	Conjugué complexe de z	
fonction de classe C^k	Fonction k fois continuellement dérivable	4
fonction de classe $\mathcal{L}$	Fonction localement sommable et de classe exponentielle	66
$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$	Constante d'Euler = 0,577...	
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Coefficient du binôme	

OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE

1

RAPPELS DE COURS

1.1 RAPPELS D'ANALYSE

a) Intégrales généralisées

Définitions

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \text{ si } f \text{ non bornée en } x = a$$

Si ces limites existent, on dit que l'intégrale correspondante converge (ou est convergente), sinon elle diverge (ou est divergente).

Exemple

l'intégrale de Riemann (dans les deux cas ci-dessous on a $a > 0$) :

- à l'infini $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge sinon
- en zéro $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge sinon.

On en déduit un *critère de convergence* très utile :

- si pour $x \sim \infty$ on a : $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ alors l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge sinon ;
- si pour $x \sim 0$ on a : $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ alors l'intégrale $\int_0^a f(x)dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge sinon.

Par extension on définit (définition au sens standard)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R' \rightarrow \infty} \int_{-R'}^c f(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R f(x)dx \text{ pour } c \text{ borné quelconque.}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon'}^b f(x)dx \text{ si } f \text{ non bornée en } x = c \in]a, b[$$

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

On utilise souvent une définition alternative de ces intégrales généralisées dite au sens de la *partie principale* (ou valeur principale) de Cauchy

$$\begin{aligned}\text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \\ \text{PP} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right\} \text{ si } f \text{ non bornée en } x = c \in]a, b[\end{aligned}$$

Si l'intégrale converge au sens standard elle converge aussi en partie principale et les deux définitions donnent la même valeur de l'intégrale. Une intégrale peut converger en PP sans converger au sens standard.

b) Séries

Séries numériques

On appelle somme partielle de rang N d'une série numérique de terme général u_n la somme :

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

La série converge et a pour somme S si la suite S_N a une limite bornée : $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ et on note :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Une *condition nécessaire* de convergence est que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; la convergence de la série de terme général $|u_n|$ entraîne celle de la série de terme général u_n qui est alors qualifiée d'*absolument convergente*.

Exemples

1. soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (fonction ζ de Riemann) ; cette fonction est définie (ie la série converge) pour $x > 1$;
2. la *série géométrique* de raison q : $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ est convergente pour $|q| < 1$ et a pour somme $\frac{1}{1-q}$.

- Critères de convergence pour une série à termes positifs ($u_n \geq 0$) :

♦ critère de d'Alembert : soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $L < 1$ la série converge ; si $L > 1$ la série diverge ;