Sous la direction de Jean-Pierre Ramis et André Warusfel
Xavier Buff • Josselin Garnier • Emmanuel Halberstadt • François Moulin
Monique Ramis • Jacques Sauloy

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence 1

5e édition

DUNOD

Jean-Pierre Ramis, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, membre de l'Institut (Académie des Sciences), membre de l'Institut Universitaire de France, membre de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, professeur émérite à l'Institut de Mathématique de Toulouse (Université Paul Sabatier), a été directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques Avancées de Strasbourg et de l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

André Warusfel, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand à Paris et inspecteur général de Mathématiques.

Xavier Buff, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, ancien directeur de l'Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques de Toulouse.

Josselin Garnier, ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, professeur à l'École Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées.

Emmanuel Halberstadt a été Maître de conférences à l'Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, ancien chargé de cours d'agrégation aux Écoles Normales Supérieures d'Ulm et de Cachan.

François Moulin, ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, professeur de chaires supérieures au Lycée sainte-Geneviève (spéciales MP*).

Monique Ramis, ancienne élève de l'École Normale Supérieure de Sèvres, a été professeur de chaires supérieures (à Paris, Strasbourg, Toulouse).

Jacques Sauloy, ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud, a été maître de conférences à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

Illustration de couverture : © DNYS9 – istock.com

© Dunod, 2006, 2013, 2018, 2022, 2026
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-089847-3

Préface

Les mathématiques constituent l'ossature de la science moderne et sont une source intarissable de concepts nouveaux d'une efficacité incroyable pour la compréhension de la réalité matérielle qui nous entoure. Ainsi l'apprentissage des mathématiques est devenu indispensable pour la compréhension du monde par la science. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée. Essayer de justifier les mathématiques par leurs applications pratiques n'a guère de sens, tant ce processus de création est sous-tendu par la soif de connaître et non l'intérêt immédiat.

Les mathématiques restent l'un des domaines dans lequel la France excelle et ceci malgré la mutilation des programmes dans le secondaire et l'influence néfaste d'un pédagogisme dont l'effet principal est de compliquer les choses simples.

Vues de loin les mathématiques apparaissent comme la réunion de sujets distincts comme la géométrie, qui a pour objet la compréhension du concept d'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, science de l'infini et du continu, la théorie des nombres etc. Cette division ne rend pas justice à l'un des traits essentiels des mathématiques qui est leur unité profonde de sorte qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence. En ce sens les mathématiques ressemblent à un être biologique qui ne peut survivre que comme un tout et serait condamné à périr si on le découpait en morceaux en oubliant son unité fondamentale.

L'une des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques, c'est la possibilité donnée à tout étudiant de devenir son propre maître et en ce sens il n'y a pas d'autorité en mathématiques. Seules la preuve et la rigueur y font la loi. L'étudiant peut atteindre par le travail une maîtrise suffisante pour pouvoir s'il le faut tenir tête au maître. La rigueur, c'est être sûr de soi, et à l'âge où l'on construit sa personnalité, se confronter au monde mathématique est le moyen le plus sûr de construire sur un terrain solide. Il faut, si l'on veut avancer, respecter un équilibre entre les connaissances qui sont indispensables et le « savoir-faire » qui l'est autant. On apprend les maths en faisant des exercices, en apprenant à calculer sans l'aide de l'ordinateur, en se posant des questions et en ne lâchant pas prise facilement devant la difficulté. Seule la confrontation réelle à la difficulté a une valeur formatrice, en rupture avec ce pédagogisme qui complique les choses simples et mélange l'abstraction mathématique avec le jeu qui n'a vraiment rien à voir. Non, les mathématiques ne sont pas un jeu et l'on n'apprend pas les mathématiques en s'amusant.

L'ouvrage qui suit est un cours soigné et complet idéal pour apprendre toutes les Mathématiques qui sont indispensables au niveau de la Licence. Il regorge d'exercices (850) qui

incitent le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respecte parfaitement l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. Il s'agit d'un ouvrage de référence pour la Licence, non seulement pour les étudiants en mathématiques mais aussi pour tous ceux qui s'orientent vers d'autres disciplines scientifiques. Il insiste sur la rigueur et la précision et va au fond des notions fondamentales les plus importantes sans mollir devant la difficulté et en respectant constamment l'unité des mathématiques qui interdit tout cloisonnement artificiel. Il répond à une demande de tant de nos collègues d'un ouvrage qui les aide à « redresser la barre », mais sera aussi un atout merveilleux pour l'étudiant travaillant seul par la cohérence et la richesse de son contenu.
Il est l'œuvre d'une équipe qui rassemble des mathématiciens de tout premier plan ayant une véritable passion pour l'enseignement. Il était grand temps !

Alain Connes,
Médaille Fields 1982,
Professeur au Collège de France.

Table des matières

II Algèbre

III Géométrie

IV Analyse

V Probabilités, statistiques

Avant-propos

Ce livre est le premier d'une série de trois ouvrages de mathématiques pour la licence[1]. Il couvre les programmes de mathématiques des diverses filières scientifiques de première année. Il contient un cours complet, illustré d'exemples et d'applications, et des indications historiques. De plus, il propose au fil du texte de nombreux exercices corrigés qui permettront à l'étudiant de s'entraîner au fur et à mesure de son apprentissage. On trouvera aussi à la fin de chaque « module » des exercices supplémentaires[2] avec des indications de solutions. Une correction détaillée d'une grande partie de ces exercices est accessible sur le site de l'éditeur.

Dans cette nouvelle édition nous avons tenu compte de l'évolution récente des programmes de l'enseignement secondaire (importante pour certains thèmes) et des modifications des enseignements universitaires et, d'autre part, des remarques de nos lecteurs et de nos collègues enseignants.

Nos livres sont conçus comme une aide à l'enseignement oral dispensé par nos collègues dans les cours et travaux dirigés, en particulier par une construction « modulaire ». Les différents sujets apparaissent, pour chaque année d'enseignement, groupés dans un seul volume mais l'ordre de lecture n'est pas imposé, et chaque étudiant peut se concentrer sur tel ou tel aspect en fonction de son programme et de son travail personnel.

Ce livre peut être utilisé par un enseignant comme ouvrage de base pour son cours, dans l'esprit d'une pédagogie encore peu utilisée en France, mais qui a largement fait ses preuves ailleurs. Nous avons aussi pensé à l'étudiant travaillant seul, sans appui d'un corps professoral.

Dans les mathématiques d'aujourd'hui, un certain nombre de théories puissantes sont au premier plan. Leur maniement, au moins à un certain niveau, devra évidemment être acquis par l'étudiant à la fin de ses années de Licence. Mais celui-ci devra aussi avoir appris à calculer, sans s'appuyer exclusivement sur les ordinateurs et les logiciels, à « se débrouiller » devant un problème abstrait ou issu des applications. Nous avons donc, à cette fin, mis en place une approche adaptée. Nous insistons, dès la première année, sur les exigences de rigueur (définitions précises, démonstrations rigoureuses), mais les choses sont mises en place de façon progressive et pragmatique, et nous proposons des exemples riches, dont

[1] Dans ce livre, les deux autres ouvrages seront notés L2 (*Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 2*) et L3 (*Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 3*).

[2] Certains, plus difficiles, sont marqués d'une ou deux étoiles

l'étude met souvent en œuvre des approches multiples. Nous aidons progressivement le lecteur à acquérir le maniement d'un outillage abstrait puissant, sans jamais nous complaire dans l'abstraction pour elle-même et un formalisme sec et gratuit : le cœur des mathématiques n'est sans doute pas un corpus de théories, si profondes et efficaces soient-elles, mais un certain nombre de problèmes dans toute leur complexité, souvent issus d'une réflexion sur le monde qui nous entoure.

Historiquement les mathématiques se sont développées pendant des siècles en relation avec les autres sciences. Après une phase de « repliement sur elles-mêmes », leurs interactions se développent à nouveau vigoureusement (avec la physique, l'informatique, la mécanique, la chimie, la biologie…). Nous souhaitons, au niveau de l'enseignement des premières années d'université, accompagner ce mouvement et, en pratique, la mise en place ici ou là de filières scientifiques pluridisciplinaires avec une composante mathématique pure ou appliquée. Nous avons, par exemple, introduit de solides initiations aux probabilités et statistiques et à l'algorithmique dès ce volume de première année.

Malgré tout le soin apporté à cet ouvrage il est inévitable que quelques erreurs subsistent. Nous prions le lecteur, qui pourra les signaler à l'éditeur ou à l'un des auteurs pour correction lors d'un nouveau tirage, de nous en excuser.

Une correction détaillée des 530 énoncés supplémentaires est accessible sur le site `http://www.dunod.com` de l'éditeur à la page de ce livre. Ces corrigés sont au format pdf, ce qui permet facilement de faire une recherche sur un mot ou le numéro d'un exercice ou d'imprimer une solution.

Edmond Ramis à enseigné de longues années en classes préparatoires et écrit une série de livres pour ces classes. Ces livres ont fortement contribué à la formation de plusieurs générations d'étudiants, finissant par acquérir un nom commun : « le Ramis ». Plusieurs de ces étudiants sont maintenant enseignants-chercheurs ou chercheurs dans les universités. Au début des années 2000, André Warusfel a eu l'idée de prolonger l'œuvre d'Edmond Ramis par une série d'ouvrages pour l'enseignement universitaire. André nous a hélas quittés. Nous poursuivons l'édition de ces livres au plus près de l'esprit initial.

Jean-Pierre Ramis

Partie I

Notations et vocabulaire

Vers 1870 Cantor, avec Dedekind puis Peano et quelques autres, créa la théorie des ensembles. Elle fut d'abord mal accueillie et, plus tard, conduisit à une crise aussi violente que féconde. Aujourd'hui cette théorie (au moins à son niveau élémentaire), avec son langage et ses principales notations, est l'outil de base du mathématicien.
Après Cantor apparurent un certain nombre de problèmes : discussions entre Lebesgue, Borel et Baire sur l'axiome du choix, graves paradoxes de la théorie des ensembles découverts par Russell (*l'ensemble de tous les ensembles*). Toujours au début du XX^{e} siècle, Hilbert entreprit de donner des bases solides, totalement indiscutables (dans la ligne historique d'Aristote, Leibniz, Boole, Frege, Peano...). Il avait l'ambition de formaliser complètement *tout* le raisonnement mathématique. Mais malgré le génie de Hilbert, ce programme finit par un échec retentissant avec, en 1931, une stupéfiante découverte de Gödel (le théorème d'incomplétude, relié à des paradoxes classiques : *un crétois dit que tous les crétois sont menteurs*).
Toutefois, si la réponse de Hilbert était fausse, sa *question* était bonne ! En effet, elle conduisit, entre autres, à l'invention des ordinateurs et à un extraordinaire développement de la programmation et du calcul... initiés par des travaux de von Neumann et Turing (eux-mêmes fortement influencés par le résultat de Gödel). L'histoire n'est pas finie et tout cela se prolonge dans d'importantes recherches récentes en informatique théorique (comme par exemple les travaux de G.J. Chaïtin, en relation avec le concept physique de l'entropie).

Ce premier module n'est évidemment pas à lire en premier ! Mais il faut y revenir sans cesse, au moins au départ, pour préciser tel ou tel point, lever telle obscurité apparente, bref l'utiliser comme un dictionnaire de scrabble ou un manuel de grammaire. Certains passages (sur les cardinaux, ou les connecteurs logiques) peuvent paraître complexes à première vue. Cela correspond à de vraies difficultés et ne doit surtout pas décourager le lecteur. Il est conseillé de s'y replonger plusieurs fois, en fonction des besoins, et un jour son contenu sera devenu tout à fait abordable. Bonne lecture discursive !

Fondements I.1

Du paradis que Cantor a créé pour nous,
nul ne nous chassera (Hilbert).

La théorie des ensembles a été créée par Georg Cantor à la fin du XIX^{e} siècle pour résoudre des problèmes d'analyse réelle. Elle a suscité des résistances psychologiques (certains mathématiciens y voyaient de la métaphysique) et posé d'importantes difficultés logiques (la « crise des fondements », au début du XIX^{e} siècle). Cependant, elle a rapidement investi les autres parties des mathématiques ; en particulier, l'algèbre moderne, créée en Allemagne entre les deux guerres mondiales, est entièrement formulée dans le langage des ensembles.

Dans leur version moderne, toutes les mathématiques sont fondées sur la théorie des ensembles et *tout objet mathématique est un ensemble*. Ainsi, dans la théorie de Von Neumann, on définit l'entier naturel n comme un ensemble particulier à n éléments ; par exemple, $0 := \varnothing$ (voir la section 6.3).

Nous adopterons un point de vue plus naïf. Nos ensembles et nos applications contiennent (ou mettent en jeu) des éléments, qui sont des objets mathématiques plus ou moins élémentaires et dont on ne précise pas nécessairement la nature. Toutes ces « entités » sont cependant soumises à des *axiomes* que nous rendrons explicites, autant du moins que ce point de vue non formel le permet. Il ne s'agit pas à proprement parler de *fondations* des mathématiques, mais plutôt de la mise en place de l'outillage de base qui interviendra dans *toutes les structures* et *toutes les théories* qui seront exposées dans cet ouvrage. Ainsi, l'exposition n'est pas strictement linéaire : des exemples seront tirés des modules ultérieurs, certaines définitions (lois de composition, nombres entiers, relations d'ordre) apparaîtront à plusieurs reprises si des points de vue différents le justifient. Notons que la section 6 (cardinaux) peut être omise en première lecture

Enfin, nous ne formaliserons pas la logique. Nous admettrons une connaissance intuitive de la notion de vrai et de faux, de l'égalité et même des entiers naturels. Des règles de raisonnement seront décrites *à la fin* de ce module, alors que nous aurons déjà suffisamment de matière pour les illustrer.

Une théorie exposée de manière purement formelle et sans exemples serait bien indigeste ! Et par ailleurs, nous savons bien que dans le secondaire ont été rencontrés de nombreux ensembles, en particulier les ensembles de nombres : $\mathbb{N}$ (entiers naturels), $\mathbb{N}^*$ (entiers naturels non nuls), $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs), $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels), $\mathbb{R}$ (nombres réels), $\mathbb{R}_+$ (nombres réels positifs ou nuls), $\mathbb{R}_+^*$ (nombres réels strictement positifs), $\mathbb{C}$ (nombres complexes), etc. Tous ces ensembles seront redéfinis formellement[1] dans les modules correspondants de ce cours. Cependant, le lecteur est invité à profiter de la connaissance intuitive qu'il en a déjà pour illustrer les définitions et constructions qui vont suivre.

1 Ensembles

Le lecteur qui ne désire pas s'initier à l'axiomatique des ensembles peut aborder la lecture de ce module à la page 7 ; s'il est familier avec les définitions de base, il peut même commencer par le théorème 1 de la page 14.

1.1 Appartenance, éléments

Les ensembles sont formés d'éléments. Ce que sont ces derniers n'est pas précisé. On introduit donc une relation particulière entre un élément x et un ensemble E, la *relation d'appartenance*. Cette relation s'écrit $x \in E$, ce qui se lit « x appartient à E », « x est élément de E », « E contient x ». Notons cependant que cette dernière formulation est ambiguë, à cause de l'inclusion (définition 2 de la page 7). La négation de la relation d'appartenance s'écrit : $x \notin E$, ce qui signifie que $x \in E$ est faux, ou encore que $\neg(x \in E)$ est vrai (en logique, le symbole $\neg$ signifie « non »). On lit : « x n'appartient pas à E », etc.

Les ensembles les plus célèbres sont $\mathbb{N}$ (dont les éléments sont appelés *entiers naturels*), $\mathbb{Z}$ (dont les éléments sont appelés *entiers relatifs*), $\mathbb{Q}$ (dont les éléments sont appelés *nombres rationnels*), $\mathbb{R}$ (dont les éléments sont appelés *nombres réels*) et $\mathbb{C}$ (dont les éléments sont appelés *nombres complexes*).

Axiome 1. L'axiome fondamental est l'*axiome d'extensionalité* pour les ensembles, qui dit qu'un ensemble est totalement caractérisé par ses éléments :

$$\big(\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x \in F\big) \quad \Longrightarrow \quad E = F. \tag{1}$$

Lire : « deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux ».

Dans la phrase entre guillemets, l'usage de l'article défini « les » (mêmes éléments) dit qu'il s'agit de *tous* les éléments : c'est pourquoi la formule (1) comporte un quantificateur $\forall x$, qu'il faut lire « quel que soit x », ou encore « pour tout x ».

Remarquons que l'implication réciproque va de soi, pour des raisons de logique pure. L'usage mathématique veut en effet que, si l'on a une égalité $E = F$, alors toute propriété vérifiée par E est

[1] À noter que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sera même construit deux fois : une première fois dans ce module (*entiers de Von Neumann*, voir la section 6.3) et une deuxième fois dans le module suivant. C'est cette dernière construction qui doit ici être regardée comme « officielle ».

vérifiée par F (« substitutivité de l'égalité »). C'est même ainsi que Leibniz définissait l'égalité ! Pour en revenir à nos ensembles, si l'on a $E = F$ et $x \in E$, on en déduit que $x \in F$. Pratiquement, on pourra prouver l'égalité de deux ensembles *par équivalence*.

Exercice 1.
Déterminer l'intersection des droites $D : y = 2x + 1$ et $D' : y = 3x - 2$.
Solution. C'est l'ensemble des points (x, y) qui appartiennent à D et à D', c'est-à-dire qui satisfont le système d'équations $(y = 2x + 1\ ,\ y = 3x - 2)$. Les méthodes de résolution du secondaire (par équivalence, justement) permettent de déduire que (x, y) est solution de ce système si, et seulement si, $x = 3$, $y = 7$. Comme nous allons le voir, il y a un ensemble dont le seul élément est le point $P = (3, 7)$, c'est le singleton $\{P\}$. On a donc : $M \in D \cap D' \Leftrightarrow M \in \{P\}$, d'où $D \cap D' = \{P\}$.

La plupart des *axiomes* qui vont apparaître dans ce module mettront en jeu une certaine propriété $P(x)$ d'un élément indéterminé x (P s'appelle un *prédicat*[2]) ; un axiome dira alors que les éléments x tels que $P(x)$ est vrai forment un ensemble, autrement dit, qu'il existe un ensemble E tel que $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow P(x)$. Cela se lit : « quel que soit x, $x \in E$ si, et seulement si, $P(x)$ ». L'axiome d'extensionalité permettra alors de déduire que E est *unique*. En effet, si F est un (autre) ensemble tel que $\forall x\ ,\ x \in F \Leftrightarrow P(x)$, les règles usuelles concernant l'équivalence logique entraînent : $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x \in F$, donc $E = F$. Après quelques exemples simples, ce procédé sera systématisé en 1.2.

1.1.1 Construction d'ensembles finis

Nous allons commencer par les ensembles « finis » dans un sens intuitif, terme qui sera précisé à la section 6.

Axiome et définition 2. Il existe un ensemble qui n'admet aucun élément.

$$\exists E\ :\ \forall x\ ,\ x \notin E. \tag{2}$$

On le note $\varnothing$ et on l'appelle *ensemble vide*.

L'existence d'*un* (sous-entendu : « au moins ») ensemble qui n'a aucun élément (« un », article indéfini, exprime l'existence, quantificateur $\exists$) est le contenu de cet axiome. Mais, d'après l'axiome d'extensionalité, l'ensemble qui n'a aucun élément est unique. C'est pourquoi, dans la deuxième partie de la phrase, on dit *le* (note), qui sous-entend l'unicité. La formule (2) peut donc être renforcée ainsi :

$$\exists !E\ :\ \forall x\ ,\ x \notin E.$$

Le symbole $\exists !$ signifie « il existe un unique ».

Axiome et définition 3. Soit a un objet mathématique. L'*axiome du singleton* dit qu'il existe un ensemble dont le seul élément est a. On le note $\{a\}$, lire « singleton a ».

Notant $E = \{a\}$, on a donc : $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x = a$. D'après l'axiome d'extensionalité, un tel ensemble est unique. Tout objet mathématique est donc élément d'un ensemble, et nous appellerons donc *élément* un tel objet. Naturellement, $\{a\} = \{b\}$ équivaut logiquement à $a = b$.

Axiome et définition 4. Soient a, b deux éléments (non nécessairement distincts). L'*axiome de la paire* dit qu'il existe un ensemble dont les seuls éléments sont a et b. On le note $\{a, b\}$. Si $a \neq b$, on l'appelle « paire formée de a et b ».

[2] La notion de prédicat et son usage seront abordés de manière plus détaillée à la section 7.2

D'après l'axiome d'extensionalité, l'ensemble $\{a, b\}$ est unique. L'axiome de la paire implique d'ailleurs celui du singleton : lorsque $a = b$, on trouve $\{a, a\} = \{a\}$. On démontre de même que $\{a, b\} = \{b, a\}$ par de la logique pure ! Pour tout x :

$$x \in \{a, b\} \iff (x = a \text{ ou } x = b) \iff (x = b \text{ ou } x = a) \iff x \in \{b, a\},$$

et l'on applique l'axiome d'extensionalité. On prendra donc garde à ne pas confondre la paire $\{a, b\}$ et le couple (a, b) (ces derniers apparaîtront à la page 10) : on n'a $(a, b) = (b, a)$ que si $a = b$.

Exercice 2.
Montrer que les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$ et $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sont deux à deux distincts.
Solution. Seul le premier n'a aucun élément, il est donc différent de chacun des trois autres ; par ailleurs, puisque $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ (on vient de le voir), les singletons correspondants sont différents. Le dernier ensemble est une paire parce que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, il n'est donc égal à aucun des trois premiers.

1.1.2 Définition en extension

Chaque fois que l'on se donne des objets $a_1, \ldots, a_n$, on dispose d'une version plus générale des axiomes précédents.

Axiome et définition 5. Il existe un ensemble dont les seuls éléments sont $a_1, \ldots, a_n$ (d'après l'axiome d'extensionalité, il est unique). Cet ensemble est noté $\{a_1, \ldots, a_n\}$. On dit que l'on a défini cet ensemble « en extension », c'est-à-dire en énumérant ses éléments.

Exercice 3.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait l'égalité $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{a\}$, puis $\{a_1, \ldots, a_n\} = \varnothing$.
Solution. La première égalité a lieu si, et seulement si, les objets $a_1, \ldots, a_n$ sont tous égaux à a. La seconde est en principe impossible. Il existe cependant une convention (en fait, un abus de langage) selon laquelle, lorsque $n = 0$ (aucun objet !), la notation $\{a_1, \ldots, a_n\}$ désigne l'ensemble vide.

Pour $n = 1, 2$, on retrouve les axiomes précédents. Au delà, on trouve les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, etc. La notation générale $a_1, \ldots, a_n$ est légèrement abusive car elle sous-entend que l'on sait interpréter les $\ldots$ intermédiaires. Dans la pratique, on s'autorise des « définitions en extension incomplètes » comme $\{0, 2, \ldots, 2n\}$ parce que l'on devine aisément la *loi de formation* des éléments énumérés : ici, les entiers de la forme $2k$, où l'entier k varie de 0 à n. Par abus courant, la même notation s'emploie pour énumérer des ensembles infinis, comme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou l'ensemble $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ des entiers naturels pairs. Cela peut être dangereux (ambiguïté sur la loi de formation) et cela cache en réalité des axiomes plus puissants. En fait, pour anticiper, on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ensemble $\{u_0, u_1, \ldots\}$ est l'ensemble image de cette suite, c'est-à-dire l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4.
Reconnaître l'ensemble $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.
Solution. Il s'agit bien sûr de l'ensemble $\mathbb{Z}$. On peut le décrire à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les formules $u_{2p} = -p$ et $u_{2p+1} = p + 1$.

1.2 Définition en compréhension

Dans des situations très répandues, on a un prédicat $P(x)$ (*i.e.* une propriété dépendant de l'élément indéterminé x) et l'on se demande s'il existe un ensemble E tel que $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow P(x)$. Si c'est le cas, E est unique (axiome d'extensionalité).

Définition 1. Si un tel ensemble existe, on le note $\{x \mid P(x)\}$, ce qui se lit « l'ensemble des x tels que $P(x)$ ». On dit alors que la propriété P est *collectivisante*.

Exemples. Comme on l'a vu, les propriétés $x \neq x$, $x = a$, $(x = a$ ou $x = b)$ (a et b étant fixés) sont collectivisantes. Pour un ensemble E donné, la propriété $x \in E$ est évidemment collectivisante, et l'on a l'égalité $E = \{x \mid x \in E\}$.
Toutes ces précautions sont nécessaires parce que l'on ne peut pas déclarer tous les prédicats collectivisants :

Exercice 5.
L'un des plus vieux paradoxes de la théorie des ensembles concerne « l'ensemble des éléments qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes », c'est-à-dire l'ensemble $E := \{x \mid x \notin x\}$. Ainsi, $\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow x \notin x$. Appliquer cette assertion à $x := E$.
Solution. On tombe sur la célèbre contradiction :

$$E \in E \Longleftrightarrow E \notin E.$$

L'existence d'un tel ensemble E entraînerait une contradiction. Selon les principes de la logique mathématique, cette existence est donc fausse, l'ensemble E n'existe pas et la propriété $P(x) := (x \notin x)$ n'est donc pas collectivisante.

Il nous faudra donc expressément déclarer par des axiomes que certains prédicats sont collectivisants et que certains ensembles existent bel et bien, comme on l'a fait pour les définitions en extension. Cependant, dans l'immense majorité des cas, cela sera facilité par l'axiome suivant, appelé *axiome de séparation* :

Axiome et définition 6. Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété des éléments de E. Alors la propriété « $P(x)$ et $x \in E$ » est collectivisante et l'on note l'ensemble associé $\{x \in E \mid P(x)\}$, ce qui se lit « l'ensemble des x éléments de E tels que $P(x)$ ».

Il n'existe donc pas d'ensemble de tous les ensembles : en effet, si un tel ensemble existait, selon l'axiome de séparation, toute propriété serait collectivisante.

Exercice 6.
Les ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ et $\{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 = 0\}$ existent-ils ?
Solution. Oui, d'après l'axiome de séparation ! Mais ils sont évidemment vides (donc égaux). Ce sont leurs éléments qui n'existent pas…

1.2.1 Inclusion, parties

Définition 2. On dit que l'ensemble F est *inclus* dans l'ensemble E, ce que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont éléments de E :

$$F \subset E \iff \big(\forall x\ ,\ x \in F \Rightarrow x \in E\big).$$

On dit aussi que F est une *partie* ou un *sous-ensemble* de E.

On dit également que E contient F (mais c'est ambigu à cause de la relation $x \in E$ qui se dit aussi « E contient x »). L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble. Tout ensemble est sous-ensemble de lui même. L'ensemble $\{x \in E \mid P(x)\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ont la propriété P) est un sous-ensemble de E.

Exercice 7.
À quelle condition a-t-on $\{a\} \subset E$? $\{a, b\} \subset E$? $\{a\} \subset \{b\}$?
Solution. L'inclusion $\{a\} \subset E$ (resp. $\{a, b\} \subset E$) est équivalente à l'appartenance $a \in E$ (resp. aux appartenances $a \in E$ et $b \in E$).
L'inclusion $\{a\} \subset \{b\}$ est équivalente à l'égalité $a = b$.

En anticipant un peu sur les définitions ultérieures, on voit que la relation d'inclusion est réflexive : $E \subset E$, transitive : $(E \subset F$ et $F \subset G) \Rightarrow E \subset G$ et antisymétrique : $(E \subset F$ et $F \subset E) \Rightarrow E = F$; les deux premières propriétés sont immédiates, la troisième est une simple traduction de l'axiome d'extensionalité. L'inclusion est donc une relation d'ordre (définition 16 de la page 29).

Axiome et définition 7. Soit E un ensemble. La relation $x \subset E$ est collectivisante et définit *l'ensemble des parties de* E, noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc : $\mathcal{P}(E) := \{x \mid x \subset E\}$.

Exemples. Le seul sous-ensemble de $\varnothing$ est $\varnothing$, d'où l'égalité $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
On vérifie de même que $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$ et que $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
Enfin, $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\varnothing)\big) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

1.3 Constructeurs

1.3.1 Constructeurs élémentaires

Pour construire la réunion de deux ensembles quelconques, un nouvel axiome est requis.

Axiome et définition 8. Soient E et F deux ensembles. Il existe alors un ensemble G tel que :

$$\forall x\ ,\ x \in G \Longleftrightarrow (x \in E \textit{ ou } x \in F).$$

Cet ensemble (unique d'après l'axiome d'extensionalité) est appelé *réunion* ou *union* de E et de F et noté $E \cup F$. Ainsi, $E \cup F := \{x \mid x \in E \textit{ ou } x \in F\}$.

Rappelons que le « ou » des mathématiciens n'est pas exclusif : l'affirmation $x \in E \textit{ ou } x \in F$, n'exclut nullement que l'on ait $x \in E \textit{ et } x \in F$. Ainsi, $E \cup F$ contient en particulier les éléments communs à E et à F.

Définition 3. Soient E et F deux ensembles. L'ensemble des éléments de E qui sont dans F existe (axiome de séparation) et est unique (axiome d'extensionalité). On l'appelle *intersection* de E et de F et on le note $E \cap F$:

$$\forall x\ ,\ x \in E \cap F \Longleftrightarrow (x \in E \textit{ et } x \in F).$$

Ainsi, $E \cap F := \{x \mid x \in E \textit{ et } x \in F\}$.
On dit que E et F sont *disjoints* si leur intersection est vide.

On a bien sûr $E \cap F = F \cap E$.

Définition 4. Soient E et F deux ensembles. L'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F existe (axiome de séparation) et est unique (axiome d'extensionalité). On l'appelle *différence* de E et de F et on le note $E \setminus F$:

$$\forall x\ ,\ x \in E \setminus F \iff (x \in E \text{ et } x \notin F).$$

Ainsi, $E \setminus F := \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin F\}$.

Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé *complémentaire de F dans E* et noté $\complement_E F$. Remarquons d'ailleurs que l'on ne peut parler de complémentaire de l'ensemble F « dans l'absolu », mais seulement relativement à un ensemble englobant E.

Les opérations de réunion et d'intersection vérifient de nombreuses règles de nature algébrique, qui sont toutes très faciles à vérifier une fois écrites :

Dans ces égalités, E, F et G désignent trois ensembles quelconques.

$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$	(associativité de la réunion)
$E \cup F = F \cup E$	(commutativité de la réunion)
$\varnothing \cup E = E \cup \varnothing = E$	(l'ensemble vide est neutre pour la réunion)
$E \cup E = E$	(tout ensemble est idempotent pour la réunion)
$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$	(associativité de l'intersection)
$E \cap F = F \cap E$	(commutativité de l'intersection)
$\varnothing \cap E = E \cap \varnothing = \varnothing$	(l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)
$E \cap E = E$	(tout ensemble est idempotent pour l'intersection)
$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$	(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)
$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$	(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)
$E \subset F \iff E \cap F = E$	
$E \subset F \iff E \cup F = F.$	

À titre d'exemple, démontrons les deux dernières règles, en commençant par les implications directes (ce qui signifie, de gauche à droite). Supposons donc l'inclusion $E \subset F$. En ce qui concerne la première égalité à démontrer, on a *a priori* l'inclusion $(E \cap F) \subset E$. Par ailleurs, on a à la fois $E \subset E$ (toujours vrai) et $E \subset F$ (c'est l'hypothèse), donc $E \subset (E \cap F)$ (par définition de l'intersection). De la double inclusion $(E \cap F) \subset E$ et $E \subset (E \cap F)$, on déduit enfin la première égalité désirée : $(E \cap F) = E$. L'autre égalité

se démontre également par double inclusion : l'inclusion $F \subset (E \cup F)$ est toujours vraie, l'inclusion réciproque $(E \cup F) \subset F$ vient (par définition de la réunion) de ce que $E \subset F$ (c'est l'hypothèse) et $F \subset F$ (toujours vrai).

Démontrons maintenant les implications réciproques (ce qui signifie, de droite à gauche). Supposons d'abord $(E \cap F) = E$. Alors tout élément de E est élément de $E \cap F$ (ces ensembles ont mêmes éléments puisqu'ils sont égaux) donc de F : autrement dit, $E \subset F$, comme espéré.

Supposons maintenant que $(E \cup F) = F$. Alors tout élément de E est élément de $E \cup F$ (évidemment) donc de F (qui est égal au précédent), et l'on a encore $E \subset F$.

Exercice 8.

À quelle condition a-t-on $E \cup F = E \cap F$?

Solution. Puisque $(E \cap F) \subset E \subset (E \cup F)$ et $(E \cap F) \subset F \subset (E \cup F)$, l'égalité ci-dessus entraîne $E = F$; la réciproque est immédiate.

L'union, l'intersection et la différence de deux parties d'un ensemble E sont encore des parties de E. Anticipant un peu sur la section 4, on peut donc les considérer comme des lois de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$. Outre les règles algébriques énoncées plus haut, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni des lois $\cup$ et $\cap$ vérifie les propriétés suivantes :

F et G désignent des parties de l'ensemble E.

$E \cap F = F \cap E = F$	(l'ensemble E est neutre pour l'intersection)
$E \cup F = F \cup E = E$	(l'ensemble E est absorbant pour la réunion)
$\complement_E(\complement_E F) = F$	(involutivité du passage au complémentaire)
$\complement_E(F \cup G) = (\complement_E F) \cap (\complement_E G)$	(le passage au complémentaire est un morphisme $\cup \to \cap$)
$\complement_E(F \cap G) = (\complement_E F) \cup (\complement_E G)$	(le passage au complémentaire est un morphisme $\cap \to \cup$)

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de *lois de Morgan*. Les deux premières lois sont immédiates d'après les règles précédentes. La troisième loi découle de l'équivalence : $\forall x \in E\ ,\ x \notin F \Leftrightarrow x \in \complement_E F$. La démonstration des lois de Morgan repose sur des règles logiques : soient P et Q deux assertions ; alors la négation de « P et Q » est « non P ou non Q », et la négation de « P ou Q » est « non P et non Q ». On applique ici ces règles à l'assertion $P := (x \in F)$ et à l'assertion $Q := (x \in G)$.

1.3.2 Produits cartésiens

On suppose que l'on sait former à partir de deux objets a et b un *couple* (a, b) de manière à satisfaire la règle suivante :

$$\forall a\ ,\ \forall b\ ,\ \forall c\ ,\ \forall d\ ,\ (a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ et } b = d.$$

L'exercice I.1.1 de la page 57 suggère une *construction* d'un tel objet, due au mathématicien polonais Kuratowski. Les éléments a et b sont respectivement appelés *première* et *seconde composante* (ou encore *coordonnée*) du couple (a, b). Si $x = (a, b)$, on écrit parfois $a = p_1(x)$ et $b = p_2(x)$.

Axiome et définition 9. Soient E et F deux ensembles. Il existe un ensemble G dont les éléments sont les couples (a, b) formés d'un élément $a \in E$ et d'un élément $b \in F$:

$$G := \{x \mid \exists a \in E \text{ et } \exists b \in F \ : \ x = (a, b)\}.$$

D'après l'axiome d'extensionalité, un tel ensemble est unique. On le note $E \times F$ et on l'appelle *produit cartésien* des ensembles E et F. De manière équivalente :

$$E \times F := \{(a, b) \mid a \in E \text{ et } b \in F\}.$$

Plus généralement, à partir de n éléments $a_1, \ldots, a_n$, on peut former le n*-uplet* (ou encore n*-uple*) $x = (a_1, \ldots, a_n)$, dont les n composantes (ou coordonnées) sont $a_1 = p_1(x)$,..., $a_n = p_n(x)$. Pour $n = 3, 4, 5, \ldots$, on parle de *triplets, quadruplets, quintuplets,* etc. On a la règle :

$$\forall a_1 \ , \ \ldots \ , \ \forall a_n \ , \ \forall b_1 \ , \ \ldots \ , \ \forall b_n \ ,$$
$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_1 = b_1 \text{ et } \ldots \text{ et } a_n = b_n.$$

L'axiome ci-dessus se généralise ainsi : les n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ formés d'éléments $a_1 \in E_1, \ldots, a_n \in E_n$ forment un ensemble, le *produit cartésien* $E_1 \times \cdots \times E_n$. Si l'un des E_i est vide, on ne peut former aucun n-uplet car il n'y a aucune possibilité pour sa $i^{ème}$ composante. Si tous les E_i sont non vides, en choisissant un élément a_i dans chacun des E_i, on forme un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ qui est élément de $E_1 \times \cdots \times E_n$. On en conclut que le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est vide si, et seulement si, l'un des ensembles E_i est vide.

L'application stricte des règles entraîne que $\big(x, (y, z)\big) \neq \big((x, y), z\big)$ (ces deux couples n'ont pas pas la même première projection). Cependant, on les identifie fréquemment à (x, y, z). De même, on identifiera les ensembles produits $E \times (F \times G)$ et $(E \times F) \times G$ à $E \times F \times G$. Cette convention se généralise naturellement à des produits plus compliqués. On pose souvent $E^n = E \times \cdots \times E$ (n facteurs). Avec les identifications précédentes, cela revient à poser $E^1 = E$, puis, par récurrence, $E^{n+1} = E \times E^n$ (ou $E^n \times E$, au choix). La *diagonale* de E^n est l'ensemble $\{x \in E^n \mid p_1(x) = \cdots = p_n(x)\}$. On peut également le décrire comme $\{(x, \ldots, x) \mid x \in E\}$, où le uplet $(x, \ldots, x)$ a n composantes.

2 Applications

Nous abordons ici l'étude des applications, qui ne sont autres que les fonctions, mais avec un nom savant et une théorie plus précise. Cependant, comme pour les ensembles, nous ne partirons pas d'une définition formelle.

2.1 Applications et graphes

Une *application* d'un ensemble E dans un ensemble F est (naïvement) un « procédé » (non précisé) qui associe à chaque élément $x \in E$ un élément $f(x) \in F$. Une telle application est notée $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$

L'élément $f(x) \in F$ est appelé *image* de l'élément $x \in E$ par l'application f.

L'ensemble E est appelé *ensemble de départ* (ou encore *source*) de l'application f ; l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée* (ou encore *but*) de f. Il y a un *axiome d'extensionalité* pour les applications :

Axiome 10. Deux applications f et g de E dans F sont égales si, et seulement si, elles attribuent la même image à tout élément de E :

$$f = g \iff \forall x \in E\ ,\ f(x) = g(x).$$

En principe, lorsque l'on connaît l'application f, sa source et son but sont donc déterminés. Dans la pratique, on a tendance à identifier deux applications f et g de même source E dès qu'elles vérifient la relation $\forall x \in E\ :\ f(x) = g(x)$: par exemple, les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Cela peut poser problème, par exemple lorsque l'on discute de la surjectivité (*cf.* la définition 7 de la page 14) : l'application g est surjective, alors que l'application f ne l'est pas. On fait appel au bon sens du lecteur pour vérifier que ce qu'il écrit a bien un sens.

Exemples.

1. Pour tout ensemble E, l'application $x \mapsto x$ de E dans lui-même est appelée *application identité* de E et notée Id_E.
2. Les ensembles E et F étant quelconques (ce dernier non vide), on peut définir, pour tout $a \in F$, l'application $x \mapsto a$ de E dans F : c'est une *application constante*.
3. Si $E \subset F$, l'application $x \mapsto x$ de E dans F est appelée *application canonique* ou *injection canonique* de E dans F.
4. Si f est une application de E dans F et si $E' \subset E$, on peut définir l'application $x \mapsto f(x)$ de E' dans F. Elle est appelée *restriction* de f à E' et notée $f_{|E'}$.
5. Si $F' \subset F$ est tel que $\forall x \in E\ ,\ f(x) \in F'$, l'application $x \mapsto f(x)$ de E dans F' est appelée *corestriction* de f à F'.
6. Si $E = \varnothing$, on convient qu'il y a une et une seule application de E dans F, appelée *application vide*. Par l'abus mentionné plus haut, c'est la même quel que soit F.
7. Si $F = \varnothing$ et $E \neq \varnothing$, il n'y a aucune application de E dans F.
8. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, l'application $p_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ (sa $i^{ème}$ composante) de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans E_i est appelée $i^{ème}$ *projection* ou $i^{ème}$ *application coordonnée*.
9. Soient E, F_1, F_2 des ensembles et $f_1 : E \to F_1$ et $f_2 : E \to F_2$ des applications. On en déduit une application $x \mapsto \big(f_1(x), f_2(x)\big)$ de E dans $F_1 \times F_2$. Cette application peut être notée $< f_1, f_2 >$, voire (f_1, f_2), avec toutefois, dans ce cas, un risque de confusion avec le couple formé de f_1 et f_2.
   Plus généralement, on peut définir $< f_1, \ldots, f_n > : E \to F_1 \times \cdots \times F_n$.
10. Soient E_1, E_2, F_1, F_2 des ensembles et $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ des applications. On en déduit une application $(x_1, x_2) \mapsto \big(f_1(x_1), f_2(x_2)\big)$ de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \times F_2$. Cette application est notée $f_1 \times f_2$.
    Plus généralement, on peut définir $f_1 \times \cdots \times f_n : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_n$.

Définition 5. On appelle *graphe* de l'application $f : E \to F$ l'ensemble :

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}.$$

On peut également le décrire comme $\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in E\}$. En vertu de l'axiome d'extensionalité, deux applications de même source et de même but sont égales si, et seulement si, elles ont le même graphe. Certains ouvrages définissent d'ailleurs une application comme un triplet (E, Γ, F), où $\Gamma \subset (E \times F)$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in E \ , \ \exists\,! y \in F \ : \ (x, y) \in \Gamma,$$

autrement dit, tout $x \in E$ a une unique image $y \in F$.

Exemples.

1. Le graphe de Id_E est la diagonale de E^2.
2. Le graphe de l'application constante $x \mapsto a$ est $E \times \{a\}$.
3. Le graphe de la restriction $f' = f_{|E'}$ est $\Gamma_{f'} = \Gamma_f \cap (E' \times F)$.
4. Le graphe de l'application vide est l'ensemble vide.

2.2 Images et antécédents

Définition 6. Soit $f : E \to F$ une application. On appelle *antécédent* d'un élément $y \in F$ par l'application f tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. L'ensemble des éléments de F qui admettent un antécédent par f est une partie de F appelée *ensemble image* ou *image* de f et notée $\mathrm{Im}\, f$:

$$\mathrm{Im}\, f := \{y \in F \mid \exists x \in E \ : \ y = f(x)\}.$$

On écrit également $\mathrm{Im}\, f := \{f(x) \mid x \in E\}$. Il ne faut en principe pas confondre ensemble image et ensemble d'arrivée, tout particulièrement lorsque la question de la surjectivité est en jeu. Pour tout sous-ensemble A de E, l'image $\mathrm{Im}\, f_{|A}$ (pour cette notation, voir l'exemple 4 de la page précédente) de la restriction de f à A est l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent dans A. Ce sous-ensemble de F est appelé *image de A par f* et noté $f(A)$:

$$f(A) := \{y \in F \mid \exists x \in A \ : \ y = f(x)\}.$$

On écrit également $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Ces deux définitions sont liées : on vérifie sans peine que $\mathrm{Im}\, f = f(E)$ et que $f(A) = \mathrm{Im}\, f_{|A}$.

Exemples.

1. L'application Id_E a pour ensemble image E. Une application constante $x \mapsto a$ a pour ensemble image $\{a\}$. L'image de l'application vide est vide. L'image de l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}_+$.
2. Selon le module IV.2, l'image par une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires) ; si I est un segment, c'est-à-dire un intervalle fermé borné, $f(I)$ est lui-même un segment (théorème des bornes).

Un cas particulier intéressant est celui où $E = F$; si $f : E \to E$, on dit que $A \subset E$ est *stable par* f si $f(A) \subset A$. Dans ce cas, par restriction et corestriction on obtient une *application induite sur* A. Par exemple, $\{x\}$ est stable si, et seulement si, $f(x) = x$: on dit alors que x est un *point fixe de* f.
Voici quelques règles de calcul concernant l'image d'une partie de E par une application $f : E \to F$. Ici, A et B désignent des parties de E :

$$f(\varnothing) = \varnothing,$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$
$$f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A),$$
$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B).$$

À titre d'exemple, discutons la troisième règle. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$, donc $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Tentons le raisonnement réciproque. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors $y = f(a)$ pour un $a \in A$ et $y = f(b)$ pour un $b \in B$. Si f est injective (*cf.* définition 8 de la page ci-contre), on a nécessairement $a = b \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$, ce qui nous apporte une règle supplémentaire :

$$f \text{ injective } \Longrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Si l'on ne suppose pas f injective, cette égalité peut être fausse : prendre :

$$E = F = \mathbb{R}, \qquad f : x \mapsto x^2, \qquad A = \mathbb{R}_-^* \quad \text{et} \quad B = \mathbb{R}_+^*.$$

Alors $A \cap B = \varnothing$, donc $f(A \cap B) = \varnothing$, mais $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+^*$, donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+^*$.

Définition 7. L'application $f : E \to F$ est dite *surjective* si tout élément de F admet (au moins) un antécédent, autrement dit, si $\operatorname{Im} f = F$:

$$f \text{ surjective } \Longleftrightarrow \big(\forall y \in F \ , \ \exists x \in E \ : \ y = f(x)\big).$$

On parle alors d'application de E *sur* F, ou encore de *surjection*.

Exemples. L'application Id_E est surjective. Une application constante n'est surjective que si son ensemble d'arrivée est un singleton. Soit $f : E \to F$ une application quelconque et soit $F' := \operatorname{Im} f$. Alors la corestriction $f : E \to F'$ est surjective. Par exemple, l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective, alors que sa corestriction à $\mathbb{R}_+$ est surjective.

Théorème 1 (de Cantor).
Il n'existe aucune application surjective d'un ensemble E sur $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application quelconque. Considérons l'ensemble $F := \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. Puisque, pour $x \in E$, $f(x) \subset E$, la condition $x \notin f(x)$ a

un sens. L'axiome de séparation garantit l'existence de $F \subset E$. Nous allons montrer que l'élément F de $\mathcal{P}(E)$ n'est l'image par f d'aucun élément a de E, ce qui impliquera que f n'est pas surjective. Si l'on avait $f(a) = F$ pour un certain $a \in E$, de l'équivalence $\forall x \in E\ ,\ x \in F \Leftrightarrow x \notin f(x)$ (qui est la définition de F) on déduirait, en remplaçant x par a, l'équivalence : $a \in F \Leftrightarrow a \notin f(a)$, c'est-à-dire $a \in F \Leftrightarrow a \notin F$, ce qui est absurde. On ne peut donc avoir $f(a) = F$. ∎

Définition 8. On dit que l'application $f : E \to F$ est *injective* (ou que c'est une *injection*) si tout élément de F admet *au plus* un antécédent :

$$f \text{ injective } \iff \big(\forall x, x' \in E\ ,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\big).$$

On dit que $f : E \to F$ est *bijective* (ou que c'est une *bijection*) si elle est à la fois surjective et injective, autrement dit si tout élément de F admet *exactement* un antécédent :

$$f \text{ bijective } \iff \big(\forall y \in F\ ,\ \exists\,! x \in E\ :\ y = f(x)\big).$$

Rappelons que la notation $\exists\,! x$ signifie « il existe un unique x tel que … »

Exemples.

1. L'application Id_E est toujours bijective.
2. Soit $f : E \to F$ une application injective et soit $F' = \operatorname{Im} f$.
   Alors la corestriction $f : E \to F'$ est bijective.
3. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante (ou strictement décroissante), elle est injective.

Exercice 9.
Soient $E = \{a\}$ et $F = \{b, c\}$. Existe-t-il des surjections (resp. des injections, des bijections) de E dans F ?

Solution. Si $b \neq c$, il y a deux applications de E dans F (respectivement définies par $a \mapsto b$ et $a \mapsto c$), et elles sont toutes les deux injectives et non surjectives. Si $b = c$, il n'y a qu'une application (définie par $a \mapsto b$) et elle est bijective.

Définition 9. Supposons l'application $f : E \to F$ bijective. En associant à tout élément $y \in F$ son unique antécédent par f, on définit une application de F dans E. Cette application est appelée *application réciproque de l'application* f (ou simplement *réciproque de* f) et notée f^{-1}. Elle est caractérisée par la relation :

$$\forall x \in E\ ,\ \forall y \in F\ ,\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Il en résulte évidemment que f^{-1} est également bijective et que sa réciproque est $(f^{-1})^{-1} = f$. Pratiquement, on calcule $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; en principe, cette équation doit avoir une unique solution $x = f^{-1}(y)$.

Exemple. La fonction $x \mapsto \sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (« sinus hyperbolique ») est strictement croissante (sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$). Elle est donc injective. Comme ses limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$, l'intervalle $\operatorname{Im} f$ est $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective.

Pour calculer $x = f^{-1}(y)$, on résout l'équation $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ en prenant pour inconnue auxiliaire $X = e^x$. Celle-ci doit avoir pour valeur l'unique racine strictement positive de l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$, donc $X = y + \sqrt{y^2+1}$; l'application réciproque est donc $y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Définition 10. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
L'application $x \mapsto g\big(f(x)\big)$ de E dans G est appelée *composée* de f et g et notée $g \circ f$.

Si de plus $h : G \to H$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$: c'est l'application $x \mapsto h\big(g(f(x))\big)$ de E dans H. On prendra garde que, dans la composition $g \circ f$, c'est f qui « agit » en premier, bien que cela se lise « g rond f ». Il peut être utile de visualiser l'action à l'aide d'un diagramme : $\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g\big(f(x)\big). \end{array}$

Exemples.

1. Pour toute application $f : E \to F$, on a $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.
2. Si f est bijective, on a $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.
3. Si f ou g est constante, alors $g \circ f$ est constante.
4. On ne peut composer $f \circ f$ que si $E = F$.
5. On ne peut composer $f \circ g$ et $g \circ f$ que si la source de l'un est le but de l'autre et réciproquement. On ne peut se poser la question de l'égalité $f \circ g = g \circ f$ que si, en outre, ces deux ensembles sont égaux.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $g : x \mapsto x + 2\pi$. Alors $f \circ g = g \circ f$ si, et seulement si, l'application $x \mapsto f(x) - x$ est 2π-périodique.

Comme le montre le dernier exemple, on n'a pas, en général $f \circ g = g \circ f$, même si les deux applications ont pour source et but un même ensemble E.

La composée de deux applications injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) est une application injective (resp. surjective, resp. bijective). Dans le cas où f et g sont bijectives, on a :

$$\big(g \circ f\big)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Pour le montrer, on résout $(g \circ f)(x) = z$.
Cela équivaut à $g\big(f(x)\big) = z$, donc à $f(x) = g^{-1}(z)$, donc à $x = f^{-1}\big(g^{-1}(z)\big)$.

En fait, il y a de nombreuses règles de ce genre. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si f est bijective, alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si, et seulement si, g l'est.
2. Si g est bijective, alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si, et seulement si, f l'est.

3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Nous démontrerons seulement les deux dernières, et nous recommandons chaudement au lecteur de prouver les autres à titre d'exercice. Supposons $g \circ f$ injective. Alors on a les implications :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x',$$

d'où l'injectivité de f. Supposons maintenant $g \circ f$ surjective, et soit $z \in G$. Soit $x \in E$ un antécédent de z par $g \circ f$. Alors $f(x) \in F$ est un antécédent de z par g, qui est donc bien surjective.

Définition 11. On définit l'*image réciproque* $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par l'application $f : E \to F$ comme l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :

$$\forall B \subset F\ ,\ f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Il arrive parfois que l'on note $f^{-1}(y)$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ des antécédents d'un élément $y \in F$ par f. Avec cette notation, on voit que f surjective (resp. injective, resp. bijective) si, et seulement si, chaque $f^{-1}(y)$ est non vide (resp. vide ou un singleton, resp. un singleton).

Il y a un risque de confusion avec la notation de l'application réciproque (et certains ouvrages utilisent d'ailleurs des notations distinctes). Si f est bijective, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par $f : E \to F$ est égale à l'image $f^{-1}(B)$ de $B \subset F$ par $f^{-1} : F \to E$, et il n'y a pas de problème. Mais l'emploi de l'écriture f^{-1} ne signifie pas nécessairement que f est bijective. D'autre part, si f est bijective et si $x \in E$ est l'unique antécédent de y, il ne faut pas confondre l'image réciproque $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$, parfois notée $f^{-1}(y)$, et l'image de y par l'application réciproque $f^{-1}(y) = x$.

Voici quelques règles de calcul concernant l'image réciproque d'une partie de F par une application $f : E \to F$:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\varnothing) &= \varnothing,\\
f^{-1}(F) &= E,\\
f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),\\
f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),\\
f^{-1}(B \setminus A) &= f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A),\\
A \subset B &\Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).
\end{aligned}$$

Démontrons par exemple la cinquième règle. On procède par équivalences :
la relation $x \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$ équivaut à $x \in f^{-1}(B)$ et $x \notin f^{-1}(A)$, c'est-à-dire à $f(x) \in B$ et $f(x) \notin A$, donc à $f(x) \in B \setminus A$, d'où la conclusion.

2.2.1 Diagrammes

Lorsqu'il y a plusieurs ensembles et plusieurs applications entre ces ensembles, il peut être commode d'utiliser des *diagrammes* comme celui-ci :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ f\ } & F \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ E' & \xrightarrow{\ f'\ } & F' \end{array}$$

Il arrive fréquemment que l'on veuille exprimer la propriété suivante : si l'on part d'un élément x de l'un de ces ensembles et que l'on calcule ses images successives jusqu'à arriver dans un autre ensemble du diagramme, *le résultat obtenu ne dépend pas du chemin choisi*. On dit alors que *le diagramme est commutatif*. Dans le diagramme ci-dessus, on partirait de $x \in E$, et l'on irait jusqu'à F'. Si le chemin choisi est horizontal puis vertical, le résultat est $v\big(f(x)\big) \in F'$; si le chemin choisi est vertical puis horizontal, le résultat est $f'\big(u(x)\big) \in F'$. Dire que ce diagramme est commutatif signifie donc que $\forall x \in E\ ,\ f'\big(u(x)\big) = v\big(f(x)\big)$, c'est-à-dire que $f' \circ u = v \circ f$.

Exemple. La périodicité d'une fonction de variable réelle peut s'exprimer par un diagramme commutatif. Notons $T_{2\pi}$ la translation $x \mapsto x + 2\pi$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui-même est 2π-périodique si, et seulement si, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\ T_{2\pi}\ } & \mathbb{R} \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Exemple. Anticipons un peu sur la section 4. Supposons que l'on ait une loi de composition interne notée $*$ sur l'ensemble E et une loi de composition interne notée $\star$ sur l'ensemble F. Soit $f : E \to F$ une application.
Dire que f est un morphisme pour les lois $*$ et $\star$ équivaut à dire que le diagramme ci-contre est commutatif, où l'on a respectivement noté m_E et m_F les applications $(x, y) \mapsto x * y$ de $E \times E$ dans E et $(z, t) \mapsto z \star t$ de $F \times F$ dans F.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\ m_E\ } & E \\ \downarrow{\scriptstyle f\times f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ F \times F & \xrightarrow{\ m_F\ } & F \end{array}$$

Les deux diagrammes ci-dessous illustrent ainsi les propriétés correspondantes du logarithme et de l'exponentielle (et l'addition sur $\mathbb{R}$, resp. la multiplication sur $\mathbb{R}_+^*$ ont simplement été notées $+$, resp. $\times$).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\ \times\ } & \mathbb{R}_+^* \\ \downarrow{\scriptstyle \ln\times\ln} & & \downarrow{\scriptstyle \ln} \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\ +\ } & \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\ +\ } & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \exp\times\exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\ \times\ } & \mathbb{R}_+^* \end{array}$$

2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F

Axiome 11. Les applications de l'ensemble E dans l'ensemble F forment un ensemble, noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Exemples.

1. L'ensemble $\mathcal{F}(\varnothing, F)$ est le singleton dont l'unique élément est l'application vide.
2. L'ensemble $\mathcal{F}(\{a\}, F)$ est en bijection naturelle avec F par l'application $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{F}(\{a\}, F)$ dans F. En effet, connaître une application f de $\{a\}$ dans F revient à connaître l'image $f(a) \in F$.

3. Si $a \neq b$, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a,b\},F)$ est en bijection naturelle avec F^2 par l'application $f \mapsto \big(f(a),f(b)\big)$ de $\mathcal{F}(\{a,b\},F)$ dans F^2 (connaître une application f de $\{a,b\}$ dans F revient à connaître $f(a),f(b) \in F$).
4. L'ensemble $\mathcal{F}(E,\varnothing)$ est vide si $E \neq \varnothing$ (et un singleton si $E = \varnothing$).
5. L'ensemble $\mathcal{F}(E,\{a\})$ est le singleton dont l'unique élément est l'application constante de valeur a.
6. L'ensemble $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{P}(E)$; en effet, connaître une application f de E dans $\{0,1\}$ revient à connaître le sous-ensemble $A \subset E$ des antécédents de 1, car alors $B = \complement_E A$ est le sous-ensemble des antécédents de 0. Nous retrouverons ce raisonnement en 3.4, lors de l'étude des fonctions caractéristiques.
7. La composition des applications induit une application $(f,g) \mapsto g \circ f$ de $\mathcal{F}(E,F) \times \mathcal{F}(F,G)$ dans $\mathcal{F}(E,G)$.
8. L'application $(f,g) \mapsto < f,g >$ de $\mathcal{F}(E,F) \times \mathcal{F}(E,G)$ dans $\mathcal{F}(E,F \times G)$ est une bijection.
9. Soit $A \subset E$. L'application $f \mapsto f_{|A}$ va de $\mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(A,F)$.

   Si de plus $B \subset E$, on obtient ainsi une application $f \mapsto (f_{|A}, f_{|B})$ de $\mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(A,F) \times \mathcal{F}(B,F)$. Si $A \cup B = E$, cette application est injective ; si $A \cap B = \varnothing$, elle est surjective ; si B est le complémentaire de A dans E, elle est donc bijective. La preuve de ces affirmations est laissée au lecteur.

On verra dans le module II.1 (théorème 24 page 78) que si E et F sont finis de cardinaux respectifs $n,p \geqslant 1$, alors $\mathcal{F}(E,F)$ est fini de cardinal p^n. Cela explique que l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ soit parfois noté F^E. Les propriétés élémentaires des puissances :

$$(pp')^n = p^n p'^n,$$
$$p^{n+n'} = p^n p^{n'},$$
$$(p^n)^m = p^{nm}$$

peuvent alors être *interprétées* en termes de bijections. Par exemple, la première et la seconde de ces égalités correspondent respectivement à l'avant-dernière et à la dernière des bijections ci-dessus ; et la troisième à une bijection de $\mathcal{F}(E,\mathcal{F}(F,G))$ dans $\mathcal{F}(E \times F,G)$, qu'on laissera le lecteur expliciter et démontrer. L'analogue des propriétés élémentaires des puissances (rappelées ci-dessus) pour les cardinaux généraux (finis ou infinis) fait l'objet de l'exercice I.1.27.

3 Suites et familles

3.1 Suites d'éléments d'un ensemble

Une notion fondamentale introduite et étudiée dans le secondaire est celle de *suite de nombres réels* : $u_0, u_1, \ldots \in \mathbb{R}$. Chacun des termes de la suite est affecté d'un indice :

l'indice du terme général u_n est n. Avant d'en donner une définition formelle, quelques remarques s'imposent :

- Pour distinguer une suite de ses termes, on notera en général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou encore, pour alléger la notation, tout simplement (u_n). On pourra donc dire au choix « la suite (u_n) » ou « la suite de terme général u_n ».
- Une suite ne commence pas nécessairement au terme d'indice 0. On peut considérer la suite $u_1, u_2, \ldots$, que l'on notera donc au choix $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 1}$. On peut considérer plus généralement une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ commençant à l'indice $n_0 \in \mathbb{N}$.
- Les termes de la suite ne sont pas nécessairement des réels : on peut s'intéresser à des suites de complexes, de points du plan, de fonctions ...

Dans tous les cas, le processus consiste à associer à chaque entier $n \in \mathbb{N}$ (voire, dans les cas particuliers, $n \in \mathbb{N}^*$, etc) un élément u_n d'un ensemble : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou le plan, etc. On reconnaît une application ! Seule la notation diffère : on écrit u_n au lieu de $u(n)$.

Définition 12. On appelle *suite d'éléments de l'ensemble* E une application u de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}^*$ dans E. L'image $u(n)$ est notée u_n et appelée *terme* de la suite et n est son *indice* ; on dit encore que le terme u_n est *indexé* par n. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ des suites indexées par $\mathbb{N}$ est alors noté $E^{\mathbb{N}}$. De même, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, E)$ des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ est noté $E^{\mathbb{N}^*}$, etc.

Comme observé plus haut, on admet en fait d'autres ensembles de départ, de la forme $\{n_0, n_0+1, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, n_0 - 1\}$. Il arrive au contraire que l'on ne considère que des termes indexés par les indices $0, \ldots, n$, resp. $1, \ldots, n$: on parle alors d'une *suite finie*, notée $(u_0, \ldots, u_n)$, resp. $(u_1, \ldots, u_n)$.

Soit $J \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. La restriction à J de l'application $n \mapsto u_n$ peut être considérée comme une *suite extraite*, également appelée *sous-suite*. Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite de réels, en se restreignant à l'ensemble J des indices pairs $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, on obtient une suite extraite $(u_n)_{n\in 2\mathbb{N}}$, que l'on notera plutôt $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Pratiquement, pour définir une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit une suite strictement croissante d'indices : $n_0 < n_1 < \cdots$, et l'on considère la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Un exemple détaillé est traité dans l'exercice I.1.0 à la fin de ce module.

3.2 Familles d'éléments d'un ensemble

Nous allons dans cette section étendre la notion de suite au cas où les indices parcourent un ensemble encore plus général.

Définition 13. Une *famille d'éléments de l'ensemble* E *indexée par l'ensemble* I est une application de I dans E. On note sous la forme $\underline{x} := (x_i)_{i\in I}$ une telle famille, l'image de l'*indice* $i \in I$ étant l'élément $x_i \in E$. L'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$ de ces familles est alors noté E^I.

Ce changement de notation est une opération psychologique : on met en avant les *valeurs* $x_i \in E$, le rôle des *indices* $i \in I$ étant de les repérer.

Exemples.

1. En prenant $I := \mathbb{N}$ ou $I := \mathbb{N}^*$, on retrouve la notion de suite :
$$(x_n)_{n\geqslant 0} := (x_0, x_1, x_2, \ldots) \quad \text{ou} \quad (x_n)_{n\geqslant 1} := (x_1, x_2, \ldots).$$
2. En prenant $I := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ou $I := \{1, 2, \ldots, n\}$ on retrouve la notion de suite finie $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
3. Soit $J \subset I$ un sous-ensemble d'indices. Par restriction à J de l'application $i \mapsto x_i$, on obtient une famille $(x_i)_{i\in J}$ indexée par J : on dit que c'est une *famille extraite*. Si $I = \mathbb{N}$ et $J \subset \mathbb{N}$, on reconnaît la notion de suite extraite ou sous-suite.
4. Soit $\varphi : K \to I$ une application entre les ensembles d'indices K et I. Par composition de φ avec l'application $i \mapsto x_i$, on définit une famille $(x_{\varphi(k)})_{k\in K} \in E^K$. Dans le cas où φ est injective, c'est une bijection de K sur un sous-ensemble J de I, et cette construction est équivalente à la précédente. Par exemple, prenant $K = I = \mathbb{N}$ et $\varphi(n) = 2n$, on voit que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite de réels, on retrouve la suite extraite $(u_n)_{n\in 2\mathbb{N}}$, que l'on notera plutôt $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Si l'ensemble I des indices est un produit cartésien : $I := J \times K$, il est d'usage d'employer la « biindexation » $(x_{j,k})_{j\in J,k\in K} \in E^{J\times K}$. C'est le cas de la famille des coefficients d'une matrice (module II.4).
6. Si I est l'ensemble vide (ce qui peut arriver), on parle de *famille vide*.

Malgré son apparente lourdeur, la notion de famille d'éléments indexée par un ensemble d'indices est d'une extrême commodité. Ainsi, lorsque l'on veut opérer sur tous les éléments d'un ensemble quelconque E, il est fréquent que l'on préfère les considérer comme les termes x_i d'une famille. Il suffit pour cela de prendre $I = E$ et de poser $x_i = i$, autrement dit de prendre la famille qui correspond à l'application Id_E. On dit que c'est *la famille canoniquement associée à l'ensemble* E. L'usage est de la noter $(x_i)_{i\in I}$, comme n'importe quelle famille, mais en gardant à l'esprit que chaque élément de E y apparaît une fois et une seule. Par exemple, en algèbre linéaire, on considérera parfois les bases comme des ensembles de vecteurs, parfois comme des familles de vecteurs : dans ce dernier cas, on aura l'usage de notations comme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, etc.

3.3 Familles d'ensembles

Nous appellerons *famille d'ensembles indexée par l'ensemble* I la donnée, pour chaque indice $i \in I$, d'un ensemble E_i. Ce n'est pas réellement une définition car nous n'attribuons aucune signification précise à la manière dont sont « donnés » les ensembles E_i. Une telle famille est notée $(E_i)_{i\in I}$.

Axiome et définition 12. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Il existe un ensemble G tel que :
$$\forall x\ ,\ x \in G \iff \big(\exists i \in I\ :\ x \in E_i\big).$$
Cet ensemble est unique (axiome d'extensionalité).
On l'appelle *réunion* de la famille $(E_i)_{i\in I}$, et on le note $\bigcup_{i\in I} E_i$.

On a donc :

$$\bigcup_{i\in I} E_i := \{x \mid \exists i \in I \ : \ x \in E_i\}.$$

Par exemple, la réunion d'une famille vide d'ensembles est vide (ainsi d'ailleurs que la réunion d'une famille d'ensembles vides).

Nous avions postulé que les éléments x_i appartenaient tous à un même ensemble E donné au départ. En réalité, il est possible de définir des familles $(x_i)_{i\in I}$, chaque x_i étant pris dans un ensemble E_i *qui dépend de* i. En vertu de l'axiome ci-dessus, cette définition n'est pas vraiment plus générale : on peut en effet considérer $(x_i)_{i\in I}$ comme une famille d'éléments de l'ensemble $E := \bigcup_{i\in I} E_i$. Pour la même raison, toute famille d'ensembles peut être considérée comme une famille de parties d'un certain ensemble E, *i.e.* comme une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles et que I n'est pas vide, on déduit de l'axiome de séparation (appliqué à l'intérieur de l'un quelconque des E_i) qu'il existe un ensemble G tel que :

$$\forall x \ , \ x \in G \iff \big(\forall i \in I \ , \ x \in E_i\big).$$

Cet ensemble est unique (axiome d'extensionalité). On l'appelle *intersection* de la famille $(E_i)_{i\in I}$, et on le note $\bigcap_{i\in I} E_i$:

$$\bigcap_{i\in I} E_i := \{x \mid \forall i \in I \ , \ x \in E_i\}.$$

En revanche, on ne sait pas définir l'intersection d'une famille vide d'ensembles. La formule ci-dessus déterminerait dans ce cas un ensemble qui contient tous les x, sans aucune condition.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles de réunion $E = \bigcup_{i\in I} E_i$. Le sous-ensemble de E^I formé des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que chaque x_i appartient à l'ensemble E_i est appelé *produit cartésien* ou simplement *produit* de la famille $(E_i)_{i\in I}$, et noté $\prod_{i\in I} E_i$.

$$\prod_{i\in I} E_i := \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I \ , \ x_i \in E_i\}.$$

Pour chaque indice $j \in I$, on dispose alors d'une application $j^{ème}$ *projection* de $\prod_{i\in I} E_i$ sur E_j, qui, à l'élément $(x_i)_{i\in I}$, associe sa $j^{ème}$ *composante* ou $j^{ème}$ *coordonnée* x_j. Le lecteur vérifiera sans peine que, lorsque I est fini, on retrouve les notions déjà rencontrées. Par exemple, si $I = \{1, \ldots, n\}$:

$$\bigcup_{i\in I} E_i = E_1 \cup \ldots \cup E_n, \quad \bigcap_{i\in I} E_i = E_1 \cap \ldots \cap E_n, \quad \prod_{i\in I} E_i = E_1 \times \ldots \times E_n.$$

Il est bien évident que, si l'un des E_i est vide, alors le produit $\prod_{i\in I} E_i$ l'est également. Pour démontrer la réciproque dans le cas d'un produit fini, on avait supposé les E_i non vides et « choisi » un élément dans chacun d'eux pour former une famille $(x_i)_{i\in I}$ particulière qui soit un élément du produit. Au début du vingtième siècle, la possibilité de « choisir » une infinité de tels éléments simultanément et de manière arbitraire a été mise en doute par de nombreux mathématiciens. La résolution moderne de ce conflit, qui frise la métaphysique, a été d'introduire un axiome *ad hoc*. Malgré son allure

fumeuse, cet axiome comporte pas mal de conséquences intéressantes, comme nous le rappellerons à la section 6.2.

Axiome 13 (Axiome du choix). Si les E_i sont non vides, alors $\prod_{i\in I} E_i$ l'est également.

3.4 Familles de parties d'un ensemble

Beaucoup des règles de calcul que nous avons énoncées dans le cas de deux ensembles (ou d'un nombre fini d'ensembles) s'étendent ici. Il ne serait pas raisonnable d'énoncer toutes ces généralisations. En voici quelques exemples. Pour formuler l'associativité de la réunion et de l'intersection généralisées, on considère une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles et l'on suppose que l'ensemble I de ses indices est lui-même une réunion d'ensembles : $I = \bigcup_{j\in J} I_j$.

On a alors :

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I_j} E_i\right), \qquad \bigcap_{i\in I} E_i = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I_j} E_i\right).$$

Supposons maintenant que les E_i sont des parties d'un ensemble E :

$$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement_E E_i, \qquad \complement_E\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement_E E_i.$$

Supposons en outre que les F_j ($j \in J$) sont des sous-ensembles d'un ensemble F et que f est une application de E dans F :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(E_i), \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(E_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} F_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(F_j), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} F_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(F_j).$$

On prendra garde que la deuxième de ces règles comporte une inclusion et non une égalité. Mentionnons enfin que la bijection $(f, g) \mapsto < f, g >$ de $\mathcal{F}(E, F) \times \mathcal{F}(E, G)$ sur $\mathcal{F}(E, F \times G)$ rencontrée antérieurement se généralise en une bijection de $\prod_{j\in J} \mathcal{F}(E, F_j)$ sur $\mathcal{F}(E, \prod_{j\in J} F_j)$. Le lecteur courageux démontrera (sans peine) toutes ces règles et en inventera bien d'autres.

3.4.1 Partitions et recouvrements

On définit un *recouvrement* d'un ensemble E comme une famille $(E_i)_{i\in I}$ de parties de E telle que $\bigcup_{i\in I} E_i = E$. Cette notion interviendra surtout en topologie. On définit une *partition* d'un ensemble E comme un recouvrement de E par des ensembles non vides et deux à deux disjoints. On a donc :

$$\bigcup_{i\in I} E_i = E, \qquad \forall i \in I\ ,\ E_i \neq \varnothing, \qquad \forall i \neq j \in I\ ,\ E_i \cap E_j = \varnothing.$$

3.4.2 Parties et applications caractéristiques

On fixe un ensemble E. On se propose ici de « coder » les parties de E à l'aide d'applications. À toute partie $A \subset E$, on associe sa *fonction caractéristique* χ_A (en tant que partie de E) de la manière suivante. C'est une application $\chi_A : E \to \{0,1\}$ définie par les relations :

$$\forall x \in E\ ,\ \chi_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A, \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

Théorème 2. L'application $A \mapsto \chi_A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)$ est bijective.

Démonstration. Soit $f : E \to \{0,1\}$ un élément de $\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)$. Soit $A := f^{-1}(1) \subset E$. Il est alors clair que $\chi_A = f$, et, plus précisément, que A est l'unique antécédent de f par l'application en question ; cette dernière est donc bijective. ∎

Ainsi, si $E = \{1,\dots,n\}$, se donner une partie de E revient à se donner n entiers $x_1,\dots,x_n \in \{0,1\}$, autrement dit, en langage informatique, un « vecteur de bits ». C'est la base de la représentation des ensembles dans le langage de programmation Pascal. Ce théorème permet de donner une interprétation intéressante du théorème 1 de la page 14. Puisque l'on a une bijection de $\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)$ sur $\mathcal{P}(E)$, le théorème de Cantor équivaut à la non existence d'une surjection de E sur $\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)$. On peut démontrer cette non existence à l'aide du *procédé diagonal de Cantor*. Soit φ une application quelconque de E dans $\mathcal{F}\big(E,\{0,1\}\big)$. Ainsi, pour tout $a \in E$, $\varphi(a)$ est une application de E dans $\{0,1\}$. On peut alors définir une application f de E dans $\{0,1\}$ comme suit :

$$\forall a \in E\ ,\ f(a) := \begin{cases} 1 \text{ si } \varphi(a)(a) = 0 \\ 0 \text{ si } \varphi(a)(a) = 1 \end{cases}$$

Par construction, $f(a) \neq \varphi(a)(a)$. *A fortiori*, $f \neq \varphi(a)$. Cela étant vrai quel que soit $a \in E$, f n'est pas dans l'image de φ qui n'est donc pas surjective. Le lecteur est encouragé à réfléchir à cette démonstration, afin d'y reconnaître une simple traduction de la démonstration du théorème 1 de la page 14 en termes de fonctions caractéristiques. Nous verrons à la section suivante que l'usage des fonctions caractéristiques permet de ramener le calcul ensembliste au calcul dans $\{0,1\}$.

4 Lois de composition

Les notions qui apparaissent ici seront étudiées en plus grand détail au module II.2, où apparaîtront également de nombreux exemples.

4.1 Vocabulaire général

On appelle *loi de composition interne* sur un ensemble E une application de $E \times E$ dans E. L'usage est de les noter en « forme infixe ». Cela signifie que l'on introduit un symbole distinct de ceux qui servent à dénoter les éléments de E, par exemple $+$, $\times$, $*$, $\star$ ou $\top$ et que l'on écrit l'image de $(a,b) \in E \times E$ dans E sous la forme $a+b$, $a \times b$, $a * b$, $a \star b$ ou $a \top b$ selon le cas. Dans certains cas, qui s'apparentent à la multiplication des nombres, on peut même omettre tout symbole d'opération et écrire $a.b$ ou même ab au lieu de $a \times b$. Lorsque la loi est notée $+$, on parle de notation *additive* et les composés d'éléments sont

appelés *sommes*. Dans les autres cas, on parle de notation *multiplicative* et les composés sont plutôt appelés *produits*.

Les exemples les plus célèbres de lois de composition interne sont l'addition et la multiplication sur les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; mais l'on peut également citer la réunion et l'intersection sur $\mathcal{P}(E)$.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\star$. On dit qu'une partie A de E est *stable pour la loi* $\star$ si l'image de $A \times A$ est incluse dans A :

$$\forall (a,b) \in A \times A \ , \ a \star b \in A.$$

Dans ce cas, l'application induite de $A \times A$ dans A est une loi de composition interne sur A, appelée *loi induite* sur A ; en général, on la note de la même manière que la loi sur E, donc ici $\star$. Par exemple, chacune des inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ définit une partie stable pour l'addition et pour la multiplication. De même, si $E' \subset E$, l'ensemble $\mathcal{P}(E')$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$ qui est stable pour la réunion et l'intersection.

Avec les mêmes notations, soient A et B deux parties de E.
On définit alors l'ensemble $A \star B \subset E$ comme l'image de $A \times B \subset E \times E$ par la loi $\star$:

$$A \star B := \{a \star b \mid a \in A \ , \ b \in B\}.$$

Cela permet d'*étendre* la loi $\star$ à $\mathcal{P}(E)$.

Soient E et F deux ensembles respectivement munis des lois de composition $*$ et $\star$. On peut munir le produit $E \times F$ d'une loi de composition $\top$ en posant : $(a_1, b_1) \top (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \star b_2)$. La loi $\top$ est alors appelée *loi produit des lois* $*$ *et* $\star$. Cette construction se généralise au produit cartésien d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles. Supposons chacun des E_i muni d'une loi de composition, et que toutes ces lois sont notées $\star$ (cela se produit fréquemment et ne cause en général pas de confusion). Le produit de deux éléments $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$ est alors l'élément $(x_i \star y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$, dans lequel chaque composante $x_i \star y_i$ a bien sûr été calculée avec la loi $\star$ de E_i.

Par exemple, si E est muni de la loi $\star$ (maintenant unique !), le produit E^I est muni de la loi produit que nous noterons encore $\star$ et qui est définie par la formule : $(x_i)_{i \in I} \star (y_i)_{i \in I} = (x_i \star y_i)_{i \in I}$. Rappelons que nous avons, à la section 3, identifié les ensembles E^I et $\mathcal{F}(I, E)$. À partir de la loi $\star$ sur E nous avons donc également défini une loi sur $\mathcal{F}(I, E)$. Celle-ci est ainsi définie : soient f et g deux applications de I dans E ; alors $f \star g$ est l'application $i \mapsto f(i) \star g(i)$ de I dans E.

4.1.1 Propriétés spéciales des lois de composition

On dit que la loi $\star$ sur l'ensemble E est *associative* si l'on a :

$$\forall a, b, c \in E \ , \ a \star (b \star c) = (a \star b) \star c.$$

On peut alors écrire plus simplement $a \star b \star c$. Cette convention se généralise au produit de n éléments quelconques. Par exemple, le produit de n éléments tous égaux à a est souvent noté a^n (qui se lit « a puissance n », et l'on dit alors que n est l'*exposant*). Toutes les lois que nous avons mentionnées (addition et multiplication de nombres, réunion et intersection

de parties) sont associatives. Les puissances d'un élément et, plus généralement, les produits de familles d'éléments obéissent à de nombreuses lois algébriques qui seront étudiées au module II.2.

Exemple. Lorsque la loi n'est pas supposée associative, notons c_n le nombre de produits *a priori* distincts que l'on peut former en utilisant $n+1$ fois le seul élément a. Pour $n=0$, il n'y a que a, donc $c_0=1$. Pour $n=1$, il n'y a que $a\star a$, donc $c_1=1$. Pour $n=2$, il y a $a\star(a\star a)$ et $(a\star a)\star a$ donc $c_2=2$. Les c_n sont les *nombres de Catalan* (exercice I.1.13 de la page 58).

On dit que la loi $\star$ est *commutative* si l'on a :

$$\forall a,b\in E\ ,\ a\star b=b\star a.$$

Toutes les lois que nous avons mentionnées (addition et multiplication de nombres, réunion et intersection de parties) sont commutatives.

On dit que $e\in E$ est *neutre à gauche* ou *un élément neutre à gauche* pour la loi $\star$ si l'on a $e\star a=a$ quel que soit $a\in E$. On définit de même *neutre à droite* par $a\star e=a$. On appelle *neutre* ou *élément neutre* tout élément neutre à gauche et à droite. Toutes les lois que nous avons mentionnées (addition et multiplication de nombres, réunion et intersection de parties) admettent un élément neutre ; nous laissons au lecteur le soin de préciser dans chaque cas lequel.

Exemple. S'il y a un élément neutre à gauche e et un élément neutre à droite e', ils sont égaux : on a $e\star e'=e'$ et $e\star e'=e$, donc $e=e'$. En particulier, *s'il y a un élément neutre, il est unique*.

Supposons que la loi $\star$ sur E admette un élément neutre. On dit alors que $a\in E$ est *inversible à gauche* s'il admet un *inverse à gauche*, c'est-à-dire un élément a' tel que $a'\star a=e$. On dit que a est *inversible à droite* s'il s'il admet un *inverse à droite* (ou symétrique), c'est-à-dire un élément a'' tel que $a\star a''=e$. On dit que a est inversible s'il admet un *inverse*, c'est-à-dire un élément qui est son inverse à gauche et à droite.

Il est fréquent de noter *additivement*, autrement dit par le symbole $+$ une loi de composition commutative. Dans ce cas, le symétrique d'un élément a (s'il existe) est presque toujours appelé *opposé* (et non inverse) de a et généralement noté $-a$. L'appelation *inverse* est en principe réservée au cas d'une loi notée *multiplicativement*, autrement dit, par le symbole $\times$, le symbole $.$ ou avec symbole omis.

Exemple. Supposons la loi associative. Si a admet un inverse a' à gauche et un inverse a'' à droite, ils sont égaux : les deux manières de calculer $a'\star a\star a''$ donnent $a'=a''$. Il en découle que *si la loi est associative, l'inverse d'un élément, s'il existe, est unique*.

Une notion moins fondamentale est celle d'élément *simplifiable à gauche* : c'est un élément a tel que $a\star x=a\star y\Rightarrow x=y$.
De même, a est *simplifiable à droite* si $x\star a=y\star a\Rightarrow x=y$.
On dit que a est *simplifiable* (ou régulier) s'il est simplifiable à gauche et à droite.
Exemple. Si la loi est associative et munie d'un élément neutre, tout élément inversible à gauche (resp. à droite) est simplifiable à gauche (resp. à droite). En effet, avec les notations antérieures, si $a\star x=a\star y$, en composant à gauche par a', on trouve (grâce à l'associati-

vité) $(a' \star a) \star x = (a' \star a) \star y$, c'est-à-dire (puisque $a' \star a = e$) $x = y$. Le calcul du côté droit est similaire.

Remarquons cependant que tous les éléments de $\mathbb{N}$ (resp. les éléments non nuls de $\mathbb{Z}$) sont simplifiables pour l'addition (resp. pour la multiplication), mais qu'aucun n'est inversible, à l'exception de 0 (resp. de ± 1). Pour l'addition dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (resp. pour la multiplication dans $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), tous les éléments sont inversibles (resp. tous les éléments non nuls).
Voici encore deux notions d'usage moins fréquent. On dit que a est *idempotent* si $a \star a = a$. Par exemple, tout neutre est idempotent (et, dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ munis de l'addition, ce sont les seuls, alors que pour la multiplication il y a en plus 0). On dit que a est *absorbant à gauche* (resp. *absorbant à droite*) si l'on a $a \star b = a$ quel que soit b (resp. $b \star a = a$). Par exemple, 0 est absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4.1.2 Morphismes

Nous allons considérer simultanément deux ensembles munis de lois de composition interne, afin d'exprimer les liens possibles entre les « structures » ainsi définies.
Nous noterons $(E, \star)$ et $(F, \top)$ ces deux structures.

Définition 14. Un *morphisme* de $(E, \star)$ dans $(F, \top)$ est une application f de E dans F telle que :

$$\forall a, b \in E \ : \ f(a \star b) = f(a) \top f(b).$$

Un morphisme bijectif est appelé *isomorphisme*. S'il existe un isomorphisme de $(E, \star)$ dans $(F, \top)$, on dit que $(E, \star)$ et $(F, \top)$ sont *isomorphes*. Un morphisme de $(E, \star)$ dans lui-même (avec la même loi !) est appelé *endomorphisme*. Un isomorphisme de $(E, \star)$ dans lui-même (avec la même loi !) est appelé *automorphisme*.

Les vérifications (faciles) des faits suivants sont laissées en exercice au lecteur. Le composé de deux morphismes est un morphisme. L'identité, le composé de deux isomorphismes, l'application réciproque d'un isomorphisme sont des isomorphismes. La relation « être isomorphe » est donc une relation d'équivalence (au sens de la section 5).

Exemples.

1. L'application exponentielle est un morphisme de $\mathbb{R}$ muni de l'addition dans $\mathbb{R}_+^*$ muni de la multiplication.
2. L'application logarithme népérien est un morphisme de $\mathbb{R}_+^*$ muni de la multiplication dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition.
3. Fixons le réel strictement positif a. L'application $n \mapsto a^n$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$ muni de l'addition dans $\mathbb{R}_+^*$ muni de la multiplication.
4. Fixons un entier naturel non nul n. L'application $a \mapsto a^n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ muni de la multiplication.
5. L'application $A \mapsto \complement_E A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même est un isomorphisme de $\big(\mathcal{P}(E), \cap\big)$ dans $\big(\mathcal{P}(E), \cup\big)$ et également un isomorphisme de $\big(\mathcal{P}(E), \cup\big)$ dans $\big(\mathcal{P}(E), \cap\big)$ (lois de Morgan). Ce n'est cependant pas un automorphisme car la loi n'est pas la même au départ et à l'arrivée.

Si $(E,\star)$ et $(F,\top)$ sont isomorphes, alors l'une de ces deux lois est associative (resp. commutative) si, et seulement si, l'autre l'est. De même, les isomorphismes transforment neutres (à gauche ou à droite) en neutres (à gauche ou à droite), inverses (à gauche ou à droite) en inverses (à gauche ou à droite), simplifiables (à gauche ou à droite) en simplifiables (à gauche ou à droite), absorbants en absorbants, idempotents en idempotents.

4.2 Application au calcul ensembliste

Nous avons rencontré en 3.4 la bijection $A \mapsto \chi_A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$. Nous allons voir que, quitte à munir $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ de quelques lois de composition très naturelles, cette bijection est, en bien des sens, un isomorphisme. On commence pour cela par munir $\{0,1\}$ de diverses opérations, notées $\cup$, $\cap$ et $\oplus$. Par les constructions générales qui précèdent, ces opérations s'étendent automatiquement à $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$. Pour définir des lois sur $\{0,1\}$, nous écrirons leurs tables :

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

(3)

On vérifie alors que la bijection mentionnée plus haut est un isomorphisme de $\big(\mathcal{P}(E),\cup\big)$ sur $(\mathcal{F}(E,\{0,1\}),\cup)$, de $\big(\mathcal{P}(E),\cap\big)$ sur $(\mathcal{F}(E,\{0,1\}),\cap)$, de $\big(\mathcal{P}(E),\oplus\big)$ sur $(\mathcal{F}(E,\{0,1\}),\oplus)$. La loi $\oplus$ sur $\mathcal{P}(E)$ est la *différence symétrique* définie par : $A\oplus B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. On vérifiera au module II.2 que $\big(\mathcal{P}(E),\oplus\big)$ est un groupe (et même un anneau, avec la loi $\cap$) et au module II.3 que c'est un espace vectoriel sur le corps à deux éléments. Mentionnons une autre application du calcul dans $\{0,1\}$: la démonstration de la formule du crible au module II.2.

5 Relations

Nous avons manipulé, depuis le début de ce module, des propriétés $P(x)$ mettant en jeu un seul objet inconnu x sur lequel portait la discussion (des « prédicats »); par exemple $x\in E$, $(x=a$ ou $x=b)$, etc. On peut tout aussi bien considérer des propriétés $R(x,y)$ mettant en jeu *deux* objets inconnus x et y, par exemple $x<y$, $x\in y$, $x\subset y$, $x\equiv y \pmod 9$, etc. voire des propriétés $R(x_1,\dots,x_n)$ mettant en jeu *plusieurs* objets inconnus $x_1,\dots,x_n$, par exemple « les entiers $x_1,\dots,x_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble » ou encore « les fonctions $f_1,\dots,f_n$ n'ont pas de zéro commun ».

Nous nous intéresserons principalement aux propriétés de la forme $R(x,y)$, que nous appellerons *relations binaires*. Des exemples de telles relations sont $x=y$, $x\in y$ et $x\subset y$. Cependant, de même que l'axiome de séparation concerne un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble, nous distinguerons les relations $R(x,y)$ qui n'ont de sens que lorsque x est élément d'un certain ensemble E et y est élément d'un certain ensemble F. Une relation entre éléments de E et éléments de F est appelée *correspondance entre E et F*. Comme exemple, nous avons la relation $y=f(x)$ lorsque f est une application de E dans F, mais aussi la relation $x=g(y)$ lorsque g est une application de F dans E et même la relation $\varphi(x,y)=0$ lorsque φ est une application de $E\times F$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple).

Définition 15. Le *graphe* de la correspondance $R(x,y)$ entre E et F est l'ensemble :

$$\Gamma_R \quad := \quad \{(x,y) \in E \times F \mid R(x,y)\}.$$

Par exemple, le graphe de la correspondance $y = f(x)$ est le graphe Γ_f de l'application f. Réciproquement, pour toute partie $G \subset E \times F$, on peut définir une correspondance entre E et F dont le graphe est G : il suffit de prendre pour $R(x,y)$ la relation $(x,y) \in G$.

5.1 Relations binaires sur un ensemble

Les relations binaires les plus utiles en mathématiques portent sur des éléments x, y d'un même ensemble E. On parle alors de *relation binaire sur* E. Si F est une partie de E, la *relation induite par* R *sur* F est simplement la relation $R(x,y)$ entre éléments de F. On peut d'ailleurs partir d'une relation binaire quelconque entre objets de même nature, par exemple $x \subset y$, et considérer la relation induite sur un ensemble, par exemple ici $\mathcal{P}(E)$.
Pour une relation binaire $R(x,y)$ sur un ensemble E, l'usage veut que l'on emploie très souvent une notation « infixe » $x \mathcal{R} y$ au lieu de $R(x,y)$, ce que nous ferons désormais. À titre d'exemple, nous connaissons les relations $x \leqslant y$ et $x < y$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, la relation $x \mid y$ (« x divise y ») sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou même sur l'anneau $K[X]$ des polynômes sur le corps K (module II.6), la relation $x \subset y$ sur $\mathcal{P}(E)$, etc.

Définition 16. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est *réflexive* si :

$$\forall x \in E \ , \ x \mathcal{R} x.$$

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est *transitive* si :

$$\forall x, y, z \in E \ , \ (x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est *symétrique* si :

$$\forall x, y \in E \ , \ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x.$$

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* si :

$$\forall x, y \in E \ , \ (x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y.$$

Une *relation d'équivalence* est une relation réflexive, transitive et symétrique.
Une *relation d'ordre* est une relation réflexive, transitive et antisymétrique.

Ces notions ont été définies pour des relations binaires sur un ensemble, mais elles s'étendent sans problème à des relations $R(x,y)$ quelconques. Il est par exemple évident que la relation $x = y$ est une relation d'équivalence et que la relation $x \subset y$ est une relation d'ordre, sans qu'il soit nécessaire de préciser un ensemble E de référence.

Exemples.

1. Les relations d'égalité (sur n'importe quel ensemble) et de congruence modulo a (sur $\mathbb{Z}$) sont des relations d'équivalence.
2. Les relations $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$, et $\mid$ (divisibilité) sur $\mathbb{N}$ sont des relations d'ordre.
3. La seule relation à la fois d'ordre et d'équivalence est l'égalité.

On vérifie immédiatement que la relation induite sur un ensemble E par une relation réflexive (resp. transitive, resp. symétrique, resp. antisymétrique, resp. d'équivalence, resp. d'ordre) est elle-même réflexive (resp. transitive, resp. symétrique, resp. antisymétrique, resp. d'équivalence, resp. d'ordre). Nous étudierons les relations d'équivalence et les relations d'ordre dans la suite de cette section.

5.1.1 Relations engendrées, clôtures

Puisqu'une relation binaire sur un ensemble E est essentiellement déterminée par son graphe, qui est une partie quelconque de $E \times E$, on peut appliquer à ces relations la plupart des notions définies sur $\mathcal{P}(E \times E)$. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations binaires sur un même ensemble E. Il peut arriver que l'une entraîne l'autre : $\forall x \in E\ ,\ x\ \mathcal{R}\ y \Rightarrow x\ \mathcal{R}'\ y$. On dit alors que $\mathcal{R}'$ est *plus faible* que $\mathcal{R}$, car elle contient moins d'information ; on dit également que $\mathcal{R}$ est *plus forte* que $\mathcal{R}'$. Par exemple la congruence modulo 2 dans $\mathbb{Z}$ est plus faible que la congruence modulo 4. Dire que $\mathcal{R}'$ est plus faible que $\mathcal{R}$ est équivalent à dire que $\Gamma_{\mathcal{R}} \subset \Gamma_{\mathcal{R}'}$. On pourra donc également dire que $\mathcal{R}'$ *contient* $\mathcal{R}$, ou que $\mathcal{R}$ *est contenue dans* $\mathcal{R}'$. La plus faible de toutes les relations binaires est celle dont le graphe est le plus grand, donc celle telle que $\Gamma_{\mathcal{R}} = E \times E$, autrement dit, $x\ \mathcal{R}\ y$ est vérifié quels que soient x et y ; ainsi, affirmer que $x\ \mathcal{R}\ y$ n'apporte aucune information sur x et y. La plus forte est celle dont le graphe est vide, autrement dit, $x\ \mathcal{R}\ y$ n'est jamais vérifié.

Si l'on se donne une famille $(\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ de relations binaires sur un ensemble E, on peut définir une relation en prenant pour son graphe $\bigcap_{i\in I} \Gamma_{\mathcal{R}_i}$. Cette relation, appelée *intersection des* $\mathcal{R}_i$ et notée $\bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ est la plus faible des relations plus fortes que toutes les $\mathcal{R}_i$. Elle est définie en termes logiques par l'équivalence :

$$x\ \mathcal{R}\ y \iff \forall i \in I\ ,\ x\ \mathcal{R}_i\ y.$$

Par exemple, dans $\mathbb{Z}$, l'intersection de toutes les relations $x \equiv y \pmod{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est l'égalité : en effet, le seul entier $x - y$ divisible par tous les entiers naturels non nuls n est 0. Une intersection de relations réflexives (resp. transitives, resp. symétriques, resp. antisymétriques, resp. d'équivalence, resp. d'ordre) est elle-même réflexive (resp. transitive, resp. symétrique, resp. antisymétrique, resp. d'équivalence, resp. d'ordre). Par ailleurs, comme on l'a vu, toute relation est contenue dans une relation qui est à la fois réflexive, transitive et symétrique (c'est la relation dont le graphe est $E \times E$). On peut de même définir une relation de graphe $\bigcup_{i\in I} \Gamma_{\mathcal{R}_i}$. Cette relation, appelée *réunion des* $\mathcal{R}_i$ et notée $\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ est moins utile.

Définition 17. L'intersection de toutes les relations transitives (resp. réflexives transitives) qui contiennent une relation $\mathcal{R}$ donnée est appelée *clôture transitive de* $\mathcal{R}$ (resp. *clôture réflexive transitive de* $\mathcal{R}$). L'intersection de toutes les relations d'équivalence qui contiennent une relation $\mathcal{R}$ donnée est appelée *relation d'équivalence engendrée par la relation* $\mathcal{R}$.

Exercice 10.

Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation dont le graphe est $G = \{(a, b), (b, c)\}$.

Déterminer sa clôture transitive et sa clôture réflexive transitive.

Solution. Elles ont pour graphes respectifs :

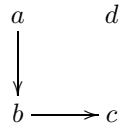
$$\{(a, b), (b, c), (a, c)\} \quad \text{et} \quad \{(a, b), (b, c), (a, c), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

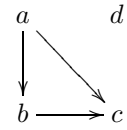
La relation d'équivalence engendrée par $\mathcal{R}$ a pour graphe :

$$\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

On ne peut parler de relation d'ordre engendrée par une relation $\mathcal{R}$, car $\mathcal{R}$ n'est peut-être contenue dans aucune relation d'ordre. Considérons par exemple, sur l'ensemble à trois éléments distincts $E = \{a, b, c\}$, la relation de graphe $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$. Toute relation d'ordre $\mathcal{R}'$ qui la contient vérifierait $a \mathcal{R}' b$ et $b \mathcal{R}' c$, donc $a \mathcal{R}' c$ (transitivité) ; et $c \mathcal{R}' a$, donc $a = c$ (antisymétrie), ce qui contredit l'hypothèse.

La notion de clôture transitive est importante en mathématiques discrètes et en informatique théorique à cause de son interprétation en termes de « graphe », ici entendu dans le sens de « représentation par sommets et arêtes ». Reprenons l'exemple de $E = \{a, b, c, d\}$ et de la relation $\mathcal{R}$ dont le graphe est $G = \{(a, b), (b, c)\}$. Nous interprétons a, b, c, d comme des points, les sommets du graphe ; et $(a, b), (b, c)$ comme des arêtes reliant a à b et b à c (mais pas dans le sens contraire : il s'agit d'arêtes *orientées*). Le dessin de gauche montre le graphe correspondant. Si l'on suit le chemin formé des arêtes (a, b) et (b, c) on constate que l'on peut aller de a à c, on dit que c est accessible à partir de a. Le dessin de droite est le graphe qui correspond à la clôture transitive de $\mathcal{R}$.





5.2 Relations d'équivalence

Rappelons qu'une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Exemples.

1. Sur tout ensemble E, l'égalité est une relation d'équivalence, et c'est la plus forte (elle est contenue dans toutes les autres). La relation d'équivalence la plus faible est celle dont le graphe est $E \times E$, c'est-à-dire celle qui est satisfaite par tous les couples $(x, y) \in E \times E$.
2. La relation $x \equiv y \pmod{a}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{Z}$).
   La relation $x \equiv y \pmod{2\pi}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.
3. Plus généralement, soit G un groupe commutatif (module II.2) et soit H un sous-groupe de G. La relation de congruence modulo H est une relation d'équivalence. Cela s'applique en particulier au cas où G est un anneau et H un idéal (module II.2) et au cas où G est un espace vectoriel et H un sous–espace vectoriel (module II.3).
4. Dans l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions numériques sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, tel que $0 \in I$, on définit la relation $f \mathcal{R} g$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé) par la formule : $f = g + \mathrm{o}(x^n)$ (module IV.8), c'est une relation d'équivalence. De même, si l'on écrit $f \sim g$ pour $f = g + \mathrm{o}(g)$, on obtient une autre relation d'équivalence.
5. Dans l'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on pose $(a, b) \sim (c, d)$ si, et seulement si, $a+d = b+c$. C'est une relation d'équivalence, qui servira, au module II.1, à *construire* l'ensemble $\mathbb{Z}$. De même, la relation d'équivalence définie par $(a, b) \sim (c, d)$ si, et seulement si, $ad = bc$ dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, servira, au module II.2, à *construire* l'ensemble $\mathbb{Q}$.
6. En géométrie euclidienne plane, on dit improprement que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont « égaux » si l'on peut déplacer l'un pour le faire coïncider avec l'autre. On obtient ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des triangles.

Définition 18. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. On appelle *classe d'équivalence de* $x \in E$ et l'on note $\mathrm{Cl}(x)$ l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$\mathrm{Cl}(x) := \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}.$$

La relation $\mathcal{R}$ étant réflexive, $x \in \mathrm{Cl}(x)$.

Proposition 3.
(i) Deux éléments de E sont équivalents si, et seulement s'ils ont la même classe :

$$\forall x, y \in E\ ,\ x \mathcal{R} y \iff \mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y).$$

(ii) Les classes d'équivalence forment une partition de E. Autrement dit : elles sont non vides, leur réunion est E et elles sont deux à deux disjointes.

Démonstration. Supposons $x \mathcal{R} y$. Soit $z \in \mathrm{Cl}(x)$. Alors $x \mathcal{R} z$ (par définition de $\mathrm{Cl}(x)$), donc $y \mathcal{R} z$ (par symétrie et transitivité de $\mathcal{R}$). On a ainsi démontré que $\mathrm{Cl}(x) \subset \mathrm{Cl}(y)$. L'inclusion réciproque se démontre de la même manière, et l'on a bien $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$. Supposons réciproquement que $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$. Comme on l'a remarqué, $y \in \mathrm{Cl}(y)$, donc $y \in \mathrm{Cl}(x)$ (par hypothèse), donc $x \mathcal{R} y$ par définition de $\mathrm{Cl}(x)$. Cela achève la preuve de l'équivalence (i).
Pour tout x de E, on a $x \in \mathrm{Cl}(x)$ (qui est donc non vide). La réunion des classes d'équivalence contient donc tous les éléments de E, c'est donc bien E. Soient $\mathrm{Cl}(x)$ et $\mathrm{Cl}(y)$ deux classes d'équivalence. Si elles ne sont pas disjointes, il existe $z \in \mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y)$, donc tel que $x \mathcal{R} z$ et $y \mathcal{R} z$ $\big($par définition de $\mathrm{Cl}(x)$ et $\mathrm{Cl}(y)\big)$. Par symétrie et transitivité de $\mathcal{R}$, on a $x \mathcal{R} y$, donc $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$, ce qui achève la preuve de (ii). ∎

Réciproquement, soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition de E. En posant que $x \mathcal{R} y$ lorsque x et y appartiennent au même sous-ensemble E_i, on définit une relation d'équivalence pour laquelle les classes d'équivalence sont les E_i.

Exemple. Si $f : E \to F$ est une application, la relation définie par : $x \mathcal{R} y$ si, et seulement si, $f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence. La classe de $x \in E$ est $\mathrm{Cl}(x) = f^{-1}\big(f(x)\big)$. Réciproquement, toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ peut s'obtenir de cette manière : on définit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ en posant $f(x) = \mathrm{Cl}(x)$, et l'on a bien $x \mathcal{R} y$ si, et seulement si, $f(x) = f(y)$.

Définition 19. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. On appelle *ensemble de représentants* pour la relation $\mathcal{R}$ une partie A de E dont l'intersection avec chaque classe d'équivalente contient un unique élément. De manière équivalente, chaque élément de E est équivalent à un unique élément de A :

$$\forall x \in E\ ,\ \exists! y \in A\ :\ x \mathcal{R} y.$$

Un ensemble de représentants s'obtient donc en choisissant dans chaque classe un élément particulier, que l'on considérera comme le *représentant* de la classe. Les exemples suivants montrent que cette notion d'aspect barbare est naturelle et utile.

Exemples.

1. L'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ est un ensemble de représentants pour la relation de congruence modulo 9 dans $\mathbb{Z}$ (module II.1).
2. Les intervalles $[0,2\pi[$ et $]-\pi,\pi]$ sont des ensembles de représentants pour la relation de congruence modulo 2π dans $\mathbb{R}$.
3. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, la relation d'équivalence $(a,b)\sim(c,d)$ si, et seulement si, $ad=bc$ (qui sert à construire $\mathbb{Q}$, module II.2) admet pour ensemble de représentants l'ensemble formé de $(0,1)$ et des couples $(p,q)\in(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}^*$ tels que p et q sont premiers entre eux (« forme irréductible d'une fraction »).

5.3 Relations d'ordre

Rappelons qu'une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation réflexive, transitive et antisymétrique. On dit aussi que l'on a un *ordre* sur E. La plupart des relations d'ordre sont notées $\leqslant$ ou $\preceq$ (exceptions notables : l'inclusion et la divisibilité). On dit alors que $(E,\leqslant)$ (ou, par abus, E lui-même) est un *ensemble ordonné*. Lorsque $x\leqslant y$, on dit que y *majore* x, ou que x *minore* y. Les éléments x et y sont *comparables* si l'on a $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$. L'ordre est dit *total* si deux éléments quelconques de E sont comparables.

Il est parfois commode de raisonner sur l'*ordre strict* associé à $\leqslant$, que nous noterons alors $<$. On le définit en posant $x<y$ si, et seulement si, $(x\leqslant y$ et $x\neq y)$. On dit que y *majore strictement* x, ou que x *minore strictement* y. Cette relation est transitive et antiréflexive (c'est-à-dire que l'on n'a jamais $x<x$). Réciproquement, si la relation $<$ est transitive et antiréflexive, on définit une relation d'ordre en posant $x\leqslant y$ si, et seulement si, $(x<y$ ou $x=y)$ (c'est un exercice amusant, laissé au lecteur).

Exemples.

1. La relation $\leqslant$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total. La relation induite sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ l'est donc également. L'ordre strict associé est la relation d'inégalité stricte $<$.
2. La relation $\leqslant$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions numériques sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. Ce n'est pas un ordre total : par exemple les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto 0$ ne sont pas comparables.

   Ici, $f<g$ signifie : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x)\leqslant g(x)$ et $\exists x\in\mathbb{R}\ :\ f(x)<g(x)$. Il ne faut donc pas commettre l'erreur d'en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x)<g(x)$.
3. La relation $\subset$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une relation d'ordre. Ce n'est pas un ordre total car $\{0\}$ et $\{1\}$, par exemple, ne sont pas comparables (aucun des deux n'est inclus dans l'autre).
4. La relation $|$ (divisibilité) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. Ce n'est pas un ordre total car 2 et 3, par exemple, ne sont pas comparables (aucun des deux ne divise l'autre).
5. La relation $|$ (divisibilité) sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique : les éléments a et $-a$ se divisent mutuellement.

6. Soient $(E_1, \leqslant), \dots, (E_n, \leqslant)$ des ensembles ordonnés.
   L'*ordre produit* sur $E := E_1 \times \cdots \times E_n$ est défini par : $(x_1, \dots, x_n) \preceq (y_1, \dots, y_n)$ si, et seulement si, $x_1 \leqslant y_1, \dots, x_n \leqslant y_n$. Ce n'est en général pas un ordre total. Par exemple, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(0,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas comparables pour l'ordre produit.
   L'*ordre lexicographique* sur E est défini par : $(x_1, \dots, x_n) \preceq (y_1, \dots, y_n)$ si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ ou bien, i étant le plus petit indice tel que $x_i \neq y_i$, on a $x_i < y_i$. On démontre (*cf.* l'exercice I.1.23 de la page 59) que, si les E_i sont totalement ordonnés, c'est un ordre total. Par exemple, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de l'ordre lexicographique, $(0,1) \preceq (1,0)$. Si $A = \{a, b, c\}$ est muni de l'ordre alphabétique (tel que $a \leqslant b \leqslant c$), l'ordre lexicographique sur $A \times A$ est donné par les relations :
   $$(a,a) \leqslant (a,b) \leqslant (a,c) \leqslant (b,a) \leqslant (b,b) \leqslant (b,c) \leqslant (c,a) \leqslant (c,b) \leqslant (c,c).$$

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit qu'un élément de E est *maximal* s'il n'est strictement majoré par aucun élément de E, et qu'il est *minimal* s'il n'est strictement minoré par aucun élément de E ; autrement dit :

$$x \text{ maximal} \iff \big(\forall y \in E\ ,\ x \leqslant y \Rightarrow x = y\big),$$
$$x \text{ minimal} \iff \big(\forall y \in E\ ,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y\big).$$

On dit qu'un élément de E est *maximum*, ou que c'est le *plus grand élément*, s'il majore tous les éléments de E, et qu'il est *minimum*, ou que c'est le *plus petit élément*, s'il minore tous les éléments de E ; autrement dit :

$$x \text{ maximum} \iff \big(\forall y \in E\ ,\ y \leqslant x\big),$$
$$x \text{ minimum} \iff \big(\forall y \in E\ ,\ x \leqslant y\big).$$

S'il y a un maximum, il est unique et c'est l'unique élément maximal ; on le note alors $\max E$. De même, s'il y a un minimum, il est unique et c'est l'unique élément minimal ; on le note alors $\min E$. De plus, dans un ensemble totalement ordonné, maximal entraîne maximum (et minimal entraîne minimum). Cependant, dans un ensemble non totalement ordonné, ce n'est pas le cas. Par exemple, dans l'ensemble des parties non vides de $\{0,1\}$, ordonné par l'inclusion, les parties $\{0\}$ et $\{1\}$ sont toutes deux minimales et il n'y a pas de minimum.

Soit maintenant $A \subset E$ une partie de E. On dit qu'un élément $M \in E$ est un *majorant* de A (ou qu'il *majore* A) s'il majore tous les éléments de A : $\forall a \in A\ ,\ a \leqslant M$. On dit de même qu'un élément $m \in E$ est un *minorant* de A (ou qu'il *minore* A) s'il *minore* tous les éléments de A : $\forall a \in A\ ,\ m \leqslant a$. On dit encore que la partie A est *majorée* ou *minorée*. Une partie majorée et minorée est dite bornée. Ces définitions s'étendent directement à des familles d'éléments de E : par exemple, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est majorée s'il existe un réel M qui majore tous les u_n.

Définition 20. Soient E un ensemble ordonné et $A \subset E$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, cet élément est appelé *borne supérieure de* A et noté $\sup A$. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, cet élément est appelé *borne inférieure de* A et noté $\inf A$.