

TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES DE

MATHÉMATIQUES

LICENCE 2

Myriam Maumy-Bertrand

est maître de conférences à l'université de Strasbourg, intervenante à l'IPAG de Strasbourg et interrogatrice pour différents concours administratifs.

Frédéric Bertrand

est un ancien élève de l'ENS Lyon et est maître de conférences à l'université de Strasbourg. Il intervient à l'IPAG de Strasbourg dans la préparation des concours administratifs et à des concours de recrutement de l'enseignement supérieur.

Daniel Fredon

est maître de conférences de mathématiques appliquées.

Yacoubou Idi Rabba

est agrégé de Mathématiques dans la section étranger de l'université de Strasbourg.

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Illustration de couverture : © delabo - Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2018

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075591-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

<i>Avant-propos</i>	v
1 Rappels et compléments d'algèbre	1
Fiche 1 Relations binaire, d'équivalence et d'ordre. Congruences	2
Fiche 2 Groupe. Groupe symétrique	3
Fiche 3 Anneau. Corps	7
Fiche 4 Déterminant et comatrice	10
Fiche 5 Opérations matricielles par blocs	15
QCM	20
Vrai ou faux?	26
Exercices	28
2 Algèbre linéaire	39
Fiche 1 Diagonalisation des endomorphismes	40
Fiche 2 Trigonalisation et décompositions des endomorphismes	43
Fiche 3 Espaces préhilbertiens	46
Fiche 4 Orthogonalité	48
Fiche 5 Groupe orthogonal	51
Fiche 6 Matrices symétriques réelles	53
QCM	55
Vrai ou faux?	66
Exercices	69
3 Fonction d'une variable réelle	79
Fiche 1 Formules de Taylor	80
Fiche 2 Intégrales généralisées	80
Fiche 3 Équations différentielles linéaires du second ordre	83
Fiche 4 Systèmes différentiels	85
Fiche 5 Suites de fonctions	87
Fiche 6 Séries de fonctions	89
Fiche 7 Séries entières	90
Fiche 8 Séries de Fourier	92
QCM	95
Vrai ou faux?	105
Exercices	107
4 Fonction d'une variable vectorielle	117
Fiche 1 Topologie de $\mathbb{R}^n$	118
Fiche 2 Fonctions de plusieurs variables	119
Fiche 3 Calcul différentiel	120
Fiche 4 Optimisation d'une fonction de plusieurs variables	123
Fiche 5 Fonctions définies par une intégrale	124
Fiche 6 Intégrales multiples	125

Fiche 7	Intégrales curvilignes	126
Fiche 8	Calcul vectoriel et distances.....	128
Fiche 9	Coniques.....	129
Fiche 10	Courbes paramétrées	132
Fiche 11	Courbes en coordonnées polaires	134
Fiche 12	Longueur des arcs. Courbure	135
QCM.....		137
Vrai ou faux?		140
Exercices		142
5	Probabilités II	157
Fiche 1	Compléments sur les intégrales	158
Fiche 2	Variables aléatoires continues	159
Fiche 3	Loi normale ou de Laplace-Gauss.....	164
Fiche 4	Lois dérivées de la loi normale.....	166
Fiche 5	Lois continues.....	170
Fiche 6	Simulation d'une expérience aléatoire	174
Fiche 7	Convergences. Théorèmes limites. Approximations	175
Fiche 8	Vecteurs aléatoires. Vecteurs gaussiens	178
QCM.....		180
Vrai ou faux?		187
Exercices		191
6	Statistique	202
Fiche 1	Vocabulaire de la statistique	203
Fiche 2	Statistique descriptive univariée. Représentations graphiques	204
Fiche 3	Diverses caractéristiques	206
Fiche 4	Statistique descriptive bivariée	208
Fiche 5	Échantillonnage. Modèles statistiques	209
Fiche 6	Estimateur et propriétés d'un estimateur	210
Fiche 7	Méthode du maximum de vraisemblance.....	212
Fiche 8	Estimation par intervalle de confiance	214
Fiche 9	Tests d'hypothèse	215
Fiche 10	Tests du χ^2	217
Fiche 11	Régression linéaire par MCO	219
QCM.....		222
Vrai ou faux?		230
Exercices		232
<i>Tables</i>		241
<i>Index</i>		246

Avant-propos

« -Deux ans ! dit Dantès, vous croyez que je pourrais apprendre toutes ces choses en deux ans ?

- Dans leur application, non ; dans leurs principes, oui : apprendre n'est pas savoir ; il y a les sachants et les savants : c'est la mémoire qui fait les uns, c'est la philosophie qui fait les autres, dit l'abbé Faria. »

D'après Le Comte de Monte-Cristo, A. Dumas, 1844.

Chères étudiantes, chers étudiants,

Ce texte peut vous paraître démodé mais il est en fait complètement d'actualité. Vous êtes des Dantès en herbe ! Vous avez la lourde tâche d'apprendre cette année et l'année prochaine les principes fondamentaux des mathématiques (en algèbre, en analyse, en géométrie, en probabilités et en statistique).

À l'issue de ces deux ans de licence de mathématiques ou de licence mathématiques/informatique (comme celle de Strasbourg), vous serez des « sachants » comme le dit l'abbé Faria, mais pour devenir des « savants » c'est la lecture quotidienne de cet ouvrage qui vous le permettra.

Il est certain qu'il existe des différences de programme entre les Universités mais les deux premières années de licence (L1 et L2) ont suffisamment de points communs pour proposer des livres utiles à vous, étudiants !

Votre temps est compté : deux ans ! Pour aller vite, il faut la taille mince et le prix léger. Il faut aussi une organisation en fiches courtes pour vous permettre de ne retenir que les sujets du moment, semestre après semestre.

Il faut avoir fait des choix cohérents et organisés de ce qui est le plus couramment enseigné lors des deux premières années des licences de mathématiques, mathématiques/informatique, mais aussi de sciences physiques.

Il faut un index détaillé pour effacer rapidement un malencontreux trou de mémoire.

Dans cet ouvrage, il y a donc l'essentiel, sauf votre propre travail.

Bon courage !

Les auteurs.

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir.

fbertran@math.unistra.fr

mmaumy@math.unistra.fr

rabba@math.unistra.fr

daniel.fredon@laposte.net

Comment utiliser



6 chapitres
et leurs mots-clés

Des rappels de cours sous forme de fiches

Propriétés

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et, dans une telle base, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i ; \quad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \langle y | e_i \rangle ; \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2}$$

où X et Y sont les matrices colonnes des composantes de x et de y dans $\mathcal{B}$.

Orientation

Orientation de E

Une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ étant choisie, on dit que :

- $\mathcal{B}$ est une **base directe** si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$.
- $\mathcal{B}$ est une **base indirecte** si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$.

Orientation d'un hyperplan

Un **hyperplan** H est orienté par le choix d'un vecteur normal $\vec{n}$.

Une **base** $\mathcal{B}$ de H est dite **directe** si, et seulement si, $\{\mathcal{B}, \vec{n}\}$ est une base directe de E .

Fiche 4

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux

Définitions

Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\langle x | y \rangle = 0$; on note $x \perp y$.

Une **famille de vecteurs** $(x_i)_{i \in I}$ est **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Une **famille de vecteurs** $(x_i)_{i \in I}$ est **orthonormale** si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous unitaires (c'est-à-dire de norme égale à 1).

Propriété

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème de Pythagore

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale finie, on a :

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2.$$

Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définitions

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels (sev) d'un espace préhilbertien E . On dit que les **deux sev** F et G sont **orthogonaux**, et on note $F \perp G$, quand :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad \langle x | y \rangle = 0.$$

Par conséquent, $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit ainsi l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, mais deux plans ne peuvent pas être orthogonaux.

L'orthogonal de F est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F^\perp = \{x \in E ; \forall y \in F \quad \langle x | y \rangle = 0\}.$$

Propriétés

$$E^\perp = \{0\}; \quad \{0\}^\perp = E; \quad F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp.$$
$$F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp; \quad F \subset (F^\perp)^\perp; \quad F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Supplémentaire orthogonal

Définition

Dans un espace préhilbertien E , deux **sous-espaces vectoriels** F et G sont dits **supplémentaires orthogonaux** dans E quand :

$$E = F \oplus G^\perp \quad \text{et} \quad F \perp G.$$

On note souvent cette situation : $E = F \oplus G$.

Propriété

Si deux espaces sous-vectoriels F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E , alors on a :

$$F = G^\perp, \quad G = F^\perp,$$

d'où :

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Projecteur orthogonal, symétrie vectorielle orthogonale

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un **projecteur orthogonal** quand $p^2 = p$ et $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$.
 $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont alors supplémentaires orthogonaux.

Dans ce cas, la **symétrie vectorielle** associée $s = 2p - \text{Id}_E$ est une symétrie **orthogonale** par rapport à $\text{Im } p$, qui est aussi l'ensemble des vecteurs invariants de s .

Cas d'un espace euclidien

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E . Il existe une famille libre orthogonale $(y_1, \dots, y_n)$ telle que $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$.

Dans le **procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**, cette famille se construit par récurrence en posant :

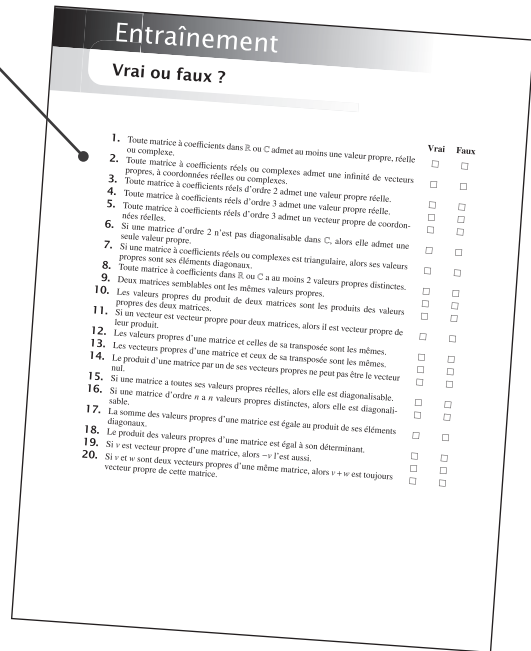
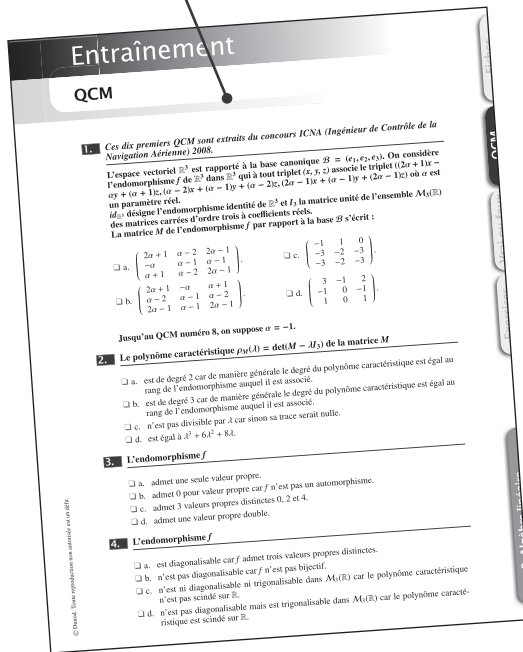
$$y_1 = x_1 \quad \text{puis} \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki} y_i \quad \text{avec} \quad A_{ki} = \frac{\langle y_i | x_k \rangle}{\langle y_i | y_i \rangle}.$$

Les dénominateurs ci-dessus ne s'annulent jamais.

cet ouvrage ?

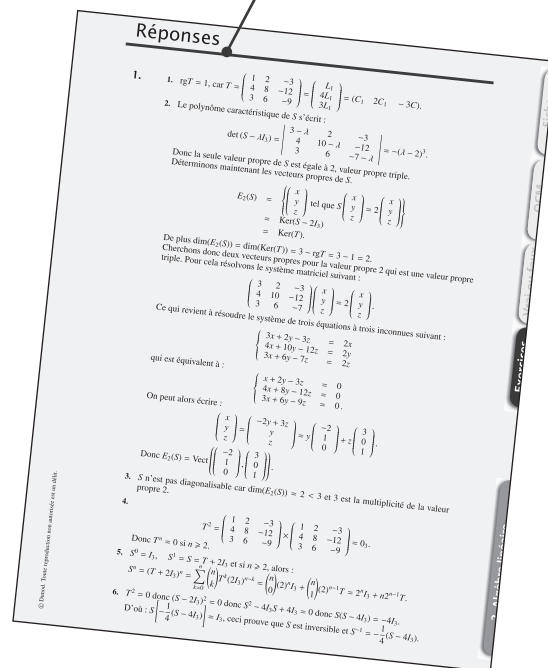
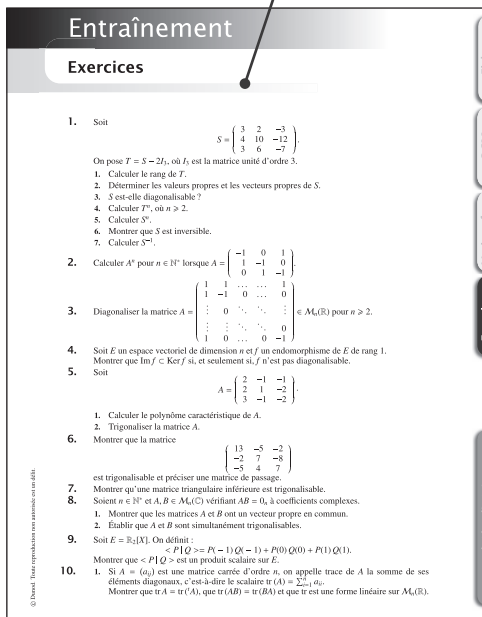
Des QCM
pour s'auto-évaluer

Des questions Vrai ou Faux



Des exercices pour s'entraîner

Toutes les réponses commentées



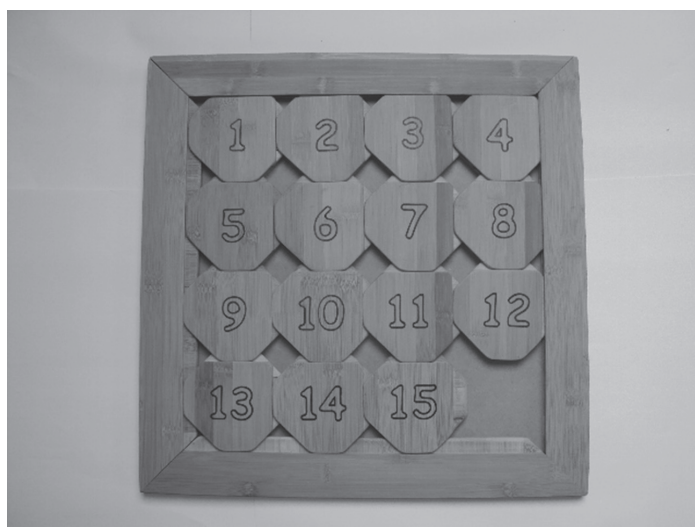
Rappels et compléments d'algèbre

1

MOTS-CLÉS

- Relations binaires ■ Relations d'équivalence ■ Classe d'équivalence ■ Congruences dans $\mathbb{Z}$ ■ Relations d'ordre ■ Relation d'ordre total ■ Ordre partiel ■ Minorant et majorant ■ Borne inférieure et borne supérieure ■ Plus petit élément et plus grand élément ■ Groupes
- Groupe symétrique ■ Permutations ■ Cycle d'ordre p ■ Transposition ■ Signature
- Anneaux ■ Éléments nilpotents ■ Corps ■ Morphismes ■ Noyau et image ■ Matrice
- Forme multilinéaire ■ Déterminant ■ Comatrice ■ Inversion de matrice ■ Matrices par blocs
- Opérations matricielles par blocs

Dans ce chapitre, les notions de relations, de congruences, de groupes, d'anneaux et de corps sont abordées d'un point de vue théorique comme vous les avez traitées dans votre cours. Nous avons donc fait l'effort d'inclure quelques exemples pour illustrer ces notions afin qu'elles vous soient familières. Nous vous conseillons en première lecture de manipuler les notions suivantes : le groupe symétrique (en particulier savoir décomposer une permutation en produit de cycles disjoints ou en produit de transpositions et savoir calculer sa signature), le déterminant, la comatrice et les opérations matricielles par blocs qui sont plus concrètes mais incontournables. Ensuite, vous pourrez alors vous tourner vers les autres notions de ce chapitre qui sont, rappelons-le, plus théoriques.



Le syndrome de la case vide

Relations binaire, d'équivalence et d'ordre. Congruences

Relations binaires

Définition

Soit E un ensemble. Choisir une partie Γ de $E \times E$, c'est définir une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E . Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x et y sont en relation, et on note $x\mathcal{R}y$.

Remarque : $E \times E$ désigne le produit cartésien de E par lui-même, voir par exemple la Fiche 2 dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod.

Propriétés

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E , est :

réflexive si elle vérifie : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$;

symétrique si elle vérifie : $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;

antisymétrique si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y.$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \implies \text{non } (y\mathcal{R}x).$$

transitive si elle vérifie :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Relation et classe d'équivalence

Définitions

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur un ensemble E , est une **relation d'équivalence** si elle est, à la fois, réflexive, symétrique et transitive.

Si $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x , modulo $\mathcal{R}$, l'ensemble des y de E tels que $x\mathcal{R}y$.

Classes d'équivalence et partition

L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ constitue une **partition** de E .

Remarque : la notion de partition a été introduite dans la Fiche 2, dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod.

Si on se donne une partition de E , la relation « x et y appartiennent au même élément de la partition » est une relation d'équivalence sur E .

Soit F un ensemble. Si f est une application de E dans F , la relation binaire $x\mathcal{R}x'$ définie par $f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence dans E . Les classes d'équivalence sont les images réciproques $f^{-1}(\{y\})$ des parties à un élément de F .

Congruences dans $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire dans $\mathbb{Z}$, définie par a et b ont le même reste dans la division par n , ou encore écrit mathématiquement par $n/(a - b)$ se note :

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Il faut lire : **a congru à b modulo n** . C'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Notation : on écrit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour désigner l'ensemble des classes ainsi formées par regroupement :

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} ; a \equiv b \pmod{n}\}.$$

Relations d'ordre

Définitions

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie dans un ensemble E , est une **relation d'ordre** si elle est, à la fois, réflexive, antisymétrique et transitive.

Notation : on la note $<$.

Une relation d'ordre $<$ dans E est dite **relation d'ordre total** si deux éléments quelconques x et y de E sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $x < y$ ou $y < x$. Dans le cas contraire, on dit que **l'ordre est partiel**.

$\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.
 $\subset$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathcal{P}(E)$. Par exemple :
 $\{3\} \not\subset \{2\}$ et $\{2\} \not\subset \{3\}$ bien que $\{2\} \in \mathcal{P}(\{2,3\})$ et $\{3\} \in \mathcal{P}(\{2,3\})$.

Éléments particuliers

Soit A une partie d'un ensemble ordonné E .

S'il existe un élément a de E tel que, pour tout $x \in A$, on a $x < a$, on dit que a est un **majorant** de A et que A est une **partie majorée** de E .

De même, un élément b de E est un **minorant** de A si $b < x$ pour tout x de A . On dit alors que A est une **partie minorée** de E .

Une **partie bornée** de E est une partie qui est à la fois majorée et minorée.

Un élément a de E est appelé **plus grand élément** de A si $a \in A$ et si a est un majorant de A . Si un tel élément existe, il est unique.

De même, un élément b de E est le **plus petit élément** de A si $b \in A$ et si b est un minorant de A .

On appelle **borne supérieure** d'une partie majorée A , le plus petit des majorants de A , et **borne inférieure** d'une partie minorée A le plus grand des minorants de A .

Si ces bornes existent, elles sont uniques.

Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, pour démontrer que a est la borne supérieure de A , on démontre souvent :
 que c'est un majorant, soit $x \leq a$ pour tout $x \in A$;
 que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que
 $a - \varepsilon < x$.

Fiche 2

Groupe. Groupe symétrique

Remarque : cette fiche est déjà connue (voir la Fiche 5 dans Mathématiques Licence 1, Exercices et méthodes, Dunod). On va ici l'illustrer à l'aide de quelques exemples.

Loi de composition interne

Définitions

Une **loi de composition interne** sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E . À un couple (x, y) , on associe un élément, noté $x * y$, ou $x + y$, ou xy , ..., appelé **composé** de x et de y .

Propriétés

Une loi de composition interne $*$ sur E est **associative** si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

Une loi de composition interne $*$ sur E est **commutative** si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x * y = y * x.$$

Elle admet un **élément neutre** e si :

$$\exists e \in E \quad \forall x \in E \quad x * e = e * x = x.$$

Remarque : si l'élément neutre existe, il est unique.

L'addition dans $\mathbb{Z}$ est associative, commutative, admet 0 comme élément neutre.

Un élément x est **inversible** (ou **symétrisable**) dans E , s'il existe $x' \in E$ (dit **inverse**, ou **symétrique**, de x) tel que :

$$x * x' = x' * x = e.$$

Si $*$ et $\top$ sont deux lois de composition interne de E , on dit que $*$ est **distributive** par rapport à $\top$, si l'on a toujours :

$$x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \quad \text{et} \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

La multiplication dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est distributive par rapport à l'addition.

Groupe

Définitions

Un ensemble non vide G , muni d'une loi $*$, est un **groupe** si :

la loi $*$ est associative ;

il existe un élément neutre noté e pour la loi $*$;

tout élément de G possède un symétrique dans G .

Remarque : si, de plus, la loi $*$ est commutative, le **groupe** est dit **commutatif**, ou **abélien**. Généralement, un groupe abélien est noté additivement, c'est-à-dire avec la loi $+$ et dans ce cas, le symétrique x' de x est alors noté $-x$, qui se dit l'**opposé** de x . Dans le cas général, la loi d'un groupe est notée $*$ ou même sans symbole et le symétrique s'appelle l'**inverse** et est noté x^{-1} .

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\{-1, +1\}, \times)$, $(\{1\}, \times)$, $(\{0\}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, $(M_n(\mathbb{R}), +)$ sont des groupes mais $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe car par exemple le symétrique de 2 qui vaut $\frac{1}{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.