MATEMÁTICAS DE LA FIABILIDAD

FUNDAMENTOS
PRÁCTICAS
PROCEDIMIENTOS

Bertram L. Amstadter

EDITORIAL REVERTÉ

Matemáticas de la fiabilidad

Fundamentos, prácticas, procedimientos

BERTRAM L. AMSTADTER

Director de Fiabilidad, Power Systems Operations
Aerojet Nuclear Systems Company



EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:

RELIABILITY MATHEMATICS:

Edición original en lengua inglesa publicada por:

McGraw-Hill Book Company, New York

Copyright © by McGraw-Hill. Inc., New York

Edición en papel
© Editorial Reverté, S. A., 1976
ISBN: 978-84-291-5007-0

Edición ebook (PDF)
© Editorial Reverté, S. A., 2026
ISBN: 978-84-291-0078-5

Versión española por:

J. J. Lacleta del Rio

Dr. Ingeniero Industrial

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
08029 Barcelona. España
reverte@reverte.com
reverte.com

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo las excepciones previstas por el Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (2022), y en concreto por su artículo 32, sobre 'Citas y reseñas e ilustración con fines educativos o de investigación científica'. Los permisos para fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra pueden obtenerse en Cedro (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org).

Impreso en España · *Printed in Spain*

Depósito Legal: B 1849-1976

Impresión: Masquelibros

620

Prólogo

Este libro es producto de la experiencia del autor en fiabilidad y pretende atender a las necesidades del estudiante o profesional que sólo haya seguido un curso de introducción sobre estadística o sobre un tema con ella relacionado, como control estadístico de la calidad. Es conveniente que tenga conocimientos de cálculo, pero si el lector acepta las fórmulas sin demostración, puede comprender los métodos básicos de la fiabilidad. Para obtener total provecho del contenido del texto no son precisos cursos avanzados de estadística teórica ni matemáticas superiores.

El texto destaca la aplicación de los métodos estadísticos a las funciones de fiabilidad y actividades directamente relacionadas. Proporciona al personal profesional de diseño, ensayos y fiabilidad un resumen de los métodos y procedimientos de estadística de la fiabilidad. En este sentido es un texto de estadística más aplicada que teórica, y no incluye los procesos completos de deducción de todas las fórmulas y tablas que en él figuran. Más bien, proporciona instrumentos útiles al personal que puede aprovecharlos, y da pautas para la selección, aplicación y utilización de dichos instrumentos. Al mismo tiempo, pone a disposición del personal supervisor y directivo y de los estudiantes de nivel universitario una referencia única e inmediata de los diversos métodos usados para tratar problemas particulares de estadística de la fiabilidad. También contiene técnicas nuevas, más eficaces, que aún no se habían presentado en un texto.

Un importante aspecto del enfoque de este libro es su orientación hacia lo práctico más que hacia una exposición teórica rigurosa. Esto no debe interpretarse como sacrificio de la precisión o como un compromiso con los principios teóricos correctos. Pero dichos principios se emplean de manera selectiva y se concede más importancia al enfoque práctico de la eficacia del programa general que a la eficacia matemática. Por ejemplo, se reduce la precisión extrema en favor de la faci-

lidad de realización y análisis de los ensayos. Las ventajas y limitaciones de estos trueques se discuten en relación con aplicaciones estadísticas particulares.

Los capítulos están agrupados por materias tratadas más bien que por estadística, Los primeros capítulos presentan algunos conceptos básicos y fórmulas que se usarán repetidas veces en el resto de los capítulos o que son necesarios para comprender los principios subyacentes a las técnicas luego expuestas. El concepto de confianza *como el de* probabilidad, *se introducen inicialmente aquí. A continuación se describe cierto número de las distribuciones estadísticas más frecuentemente usadas en fiabilidad. En general, se presentan sin exposiciones complicadas de su deducción matemática. En cambio, se subrayan particularmente la significación de los diversos parámetros que las definen, los casos en que se usan y algunos métodos sencillos de selección, utilización e interpretación de resultados. Un capítulo siguiente explica su uso con cierto detalle y da al lector ocasión de relacionar las tablas estadísticas contenidas en el Apéndice B con las materias del texto y de familiarizarse con dichas tablas. Discusiones más detalladas se dejan para capítulos posteriores en que se explican varios métodos y procedimientos estadísticos en la extensión necesaria para la comprensión de los principios de la fiabilidad. También se tratan algunos métodos estadísticos auxiliares que se emplean frecuentemente en análisis de fiabilidad.*

Otro capítulo expone consideraciones sobre los datos y cuestiones anejas que surgen con frecuencia y que es preferible resolver antes de aplicar métodos estadísticos. Consideraciones tales como la necesidad de definir lo que es fallo, se tratan en este capítulo. Aunque pueda parecer que un texto que versa sobre el tratamiento estadístico no necesita ocuparse de las cuestiones no matemáticas, la validez de los datos y de su análisis depende directamente de la solución satisfactoria de tales cuestiones antes de producir datos. Es el estudio de datos reales —su generación, recogida, análisis e interpretación— lo que nos interesa.

Los restantes capítulos están organizados de acuerdo con las aplicaciones de los métodos que se exponen. Así pues, las predicciones de fiabilidad, el reparto de metas u objetivos de fiabilidad y el aumento de la fiabilidad se tratan juntamente en capítulos sucesivos, mientras que la valoración, evaluación y demostración de la fiabilidad se discuten en otros capítulos. Aunque los métodos puedan ser parecidos e incluso utilicen los mismos conjuntos de tablas, la aplicación sigue siendo la principal consideración y el texto está ordenado consecuentemente. Por ejemplo, la hipótesis de que la distribución es normal podría hacerse al predecir, a base de datos de historial, la probabilidad de que las características de actuación de un componente cumplan las especificaciones de diseño. También podría usarse una distribución normal al valorar los resultados de un ensayo de esfuerzo hasta el fallo y evaluar la probabilidad de un fallo usando datos de ensayos reales. Aunque ambos análisis emplean la misma distribución estadística, se discuten en capítulos distintos, agrupados según las aplicaciones, no según el método estadístico.

Estos capítulos sobre aplicaciones cubren, a su vez, los siguientes asuntos: predicción, reparto y aumento de la fiabilidad; valoración y demostración de la fiabilidad; y consideraciones sobre la fiabilidad de los sistemas. Algunas de las técnicas son propias del autor y hasta ahora no han tenido amplia difusión. Sin embargo, proporcionan métodos sencillos para realizar ciertos cálculos de fiabilidad que hasta ahora exigían mucho más tiempo, y han demostrado ser muy útiles en los programas en que se han usado.

Los Apéndices contienen, aparte de algunas deducciones demasiado largas para incluirlas en el texto, una serie de tablas. Algunas de ellas cubren distribuciones puramente estadísticas y otras se han preparado especialmente para aplicaciones de fiabilidad. A lo largo del libro se dan referencias bibliográficas para los que deseen investigar las bases matemáticas de las ecuaciones y fórmulas que se dan sin demostraciones teóricas completas. Se dan otras referencias para los que quieran estudiar más extensamente tanto en el campo de la estadística teórica como (lo que tal vez sea más importante) en las otras dos áreas principales de la fiabilidad que se presentan en el primer capítulo: ingeniería de fiabilidad y análisis de operaciones.

Muchas de las tablas del texto y de los Apéndices se han reproducido con autorización de sus autores y editores. Deseo dar las gracias al doctor B. Epstein y a la American Statistical Association por la fórmula de los límites de confianza a partir de datos de ensayos de vida que se presenta en el capítulo 13 y que apareció en Life Testing, J. Am. Statist. Assoc., *volumen 48. También quiero agradecer a L. H. Miller y a la Association su autorización para usar la tabla de fractilas del estadístico de Kolmogorov del volumen 51 de la misma revista. Estoy en deuda con el albacea literario del difunto sir Ronald A. Fisher, F.R.S., y con Oliver and Boyd Ltd., Edimburgo, por los valores de las distribuciones* t *y ji cuadrado que aparecen en las tablas B.3 y B.4 que fueron tomadas de «Statistical Methods for Research Workers», y también con L. B. Owen, con la Atomic Energy Commission, la Sandia Corporation y la Addison-Wesley Publishing Company, Inc., por otros valores adicionales de estas dos tablas y por ciertos valores de la distribución* F *en la tabla B.6 obtenidos del «Handbook of Statistical Tables». También soy deudor de los profesores E. S. Pearson, M. Merrington y C. M. Thompson por otros valores adicionales de la tabla B.6 obtenidos de* Biometrika, *volumen 33.*

Las curvas de la tabla C.4 se han reproducido de las Reliability Assessment Guides for Apollo Suppliers con autorización de la North American-Rockwell Corporation y la National Aeronautics and Space Administration, y fueron desarrolladas a partir de fórmulas que figuran en Use of Variables in Acceptance Sampling de W. A. Wallis, contenido en «Techniques of Statistical Analysis», McGraw-Hill Book Company, 1947, y en «Statistical Theory with Engineering Applications» de A. Hald, John Wiley & Sons, Inc., 1952. La figura 14.9, papel probabilístico de Weibull, se reproduce con autorización de Technical and Engineering Aids for Management, Lowell, Massachusetts.

El enfoque usado para deducir la ecuación (8.12) del tiempo medio hasta el fallo se ha tomado de «Reliability Theory and Practice» y se usa con autorización de I. Bazovsky y Prentice-Hall, Inc. El método de las cotas, desarrollado por el autor y presentado en el capítulo 10 se incluye con autorización de Aerojet-General Corporation, North American-Rockwell Corporation, la National Aeronautics and Space Administration y el Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. Partes del párrafo 6.3.3 sobre adiestramiento de personal se basan en el párrafo 4.2 de «Reliability Engineering» y se usan con autorización de ARINC Research Corporation y Prentice-Hall, Inc.

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al señor Ralph A. Tiemann que pacientemente revisó el texto y comprobó muchos de los cálculos, sugiriendo numerosas modificaciones para mejorar la precisión técnica y la facilidad de lectura. No obstante, los errores que todavía pudiesen quedar, en la teoría o en el desarrollo matemático, deben serme achacados a mí. También quiero dar las gracias al señor Norman K. Rumpf y su equipo, que prepararon los programas de ordenador usados para calcular cierto número de tablas de fiabilidad. Finalmente, mi sincera gratitud a mi secretaria, señora Mary-Lu Gouze, cuya excelente mecanografía y preparación de figuras contribuyeron mucho a dejar listo el manuscrito para su publicación.

BERTRAM L. AMSTADTER

Índice analítico

Prólogo, V

1. INTRODUCCIÓN, 1
2. CONCEPTOS ESTADÍSTICOS FUNDAMENTALES, 15
3. DISTRIBUCIONES USADAS EN FIABILIDAD, 31
4. CONTRASTES DE HIPÓTESIS, 55
5. PROCEDIMIENTOS ESTADÍSTICOS AFINES, 77
6. CONSIDERACIONES SOBRE LOS DATOS, 101
7. DIAGRAMAS LÓGICOS, 117
8. MODELOS MATEMÁTICOS, 133
9. PREDICCIÓN DE LA FIABILIDAD DE LOS COMPONENTES, 165
10. PREDICCIÓN DE LA FIABILIDAD DE LOS SISTEMAS, 183
11. REPARTO DE METAS DE FIABILIDAD, 211
12. CRECIMIENTO DE LA FIABILIDAD, 239
13. MÉTODOS DE VALORACIÓN: ATRIBUTOS, 263
14. MÉTODOS DE VALORACIÓN: VARIABLES, 273
15. DEMOSTRACIÓN DE LA FIABILIDAD, 301
16. CONSIDERACIONES SOBRE LA FIABILIDAD DE LOS SISTEMAS, 313

Apéndice A. Deducciones matemáticas, 333

A.1 Deducción de las ecuaciones (5.3) y (5.4), 335; A.2 Demostración de la equivalencia de las ecuaciones (5.6), (5.7*a*) y (5.7*b*), 336; A.3 Deducción de la ecuación (8.12) y otras aplicaciones de la regla de L'Hospital, 337; A.4 Deducción de la ecuación (8.40), 339; A.5 Demostración de la ecuación (8.44), 344; A.6 Transformación de la ecuación de un sistema secuencial de tres unidades en una forma que pone de manifiesto la fiabilidad aportada por cada unidad como en la ecuación (8.40), 346.

Apéndice B. Tablas estadísticas, 351

B.1 Valores de la exponencial negativa, 353; B.2 Áreas bajo la curva normal, 358; B.3 Valores de la distribución *t*, 359; B.4 Porcentiles de la distribución χ^2, 360; B.5 Porcentiles de la distribución χ^2/g.l., 362; B.6 Valores de la distribución *F*, 364; B.7 Cuadrados y raíces cuadradas, 372.

Apéndice C. Tablas de fiabilidad, 377

C.1 Fiabilidad de un sistema redundante en paralelo activo, 379.
C.2 Fiabilidad determinada por el número de pruebas y el número de fallos: *a*, 50 % de confianza, 382; *b*, 75 % de confianza, 383; c, 90 % de confianza, 384; *d*, 95 % de confianza, 385; *e*, 99 % de confianza, 386.
C.3 Fiabilidad determinada por el número de misiones equivalentes y el número de fallos: *a*, 50 % de confianza, 388; *b*, 75 % de confianza, 390; *c*, 90 % de confianza, 392; *d*, 95 % de confianza, 394; *e*, 99 % de confianza, 396.
C.4 Fiabilidad determinada por márgenes de seguridad calculados con: *a*, 3 unidades muestrales, 399; *b*, 4 unidades muestrales, 400; *c*, 5 unidades muestrales, 401; *d*, 6 unidades muestrales, 402; *e*, 7 unidades muestrales, 403; *f*, 8 unidades muestrales, 404; *g*, 9 unidades muestrales, 405; *h*, 10 unidades muestrales, 406; *i*, 12 unidades muestrales, 407; *j*, 15 unidades muestrales, 408; *k*, 20 unidades muestrales, 409; *l*, 25 unidades muestrales, 410; *m*, 30 unidades muestrales, 411; *n*, 40 unidades muestrales, 412; *o*, 50 unidades muestrales, 413; *p*, 60 unidades muestrales, 414; *q*, 80 unidades muestrales, 415; *r*, 100 unidades muestrales, 416; *s*, 250 unidades muestrales, 417.
C.5 Fuentes de datos de tasas de fallo, 418.

Indice alfabético, 423

Matemáticas de la fiabilidad

1
Introducción

1.1. CONCEPTO DE FIABILIDAD

El concepto de fiabilidad no es nuevo. Las personas se vienen preocupando desde hace mucho tiempo de la fiabilidad de los productos que usan y de los amigos y socios con los que se relacionan. Aunque puede que no se haya usado precisamente la palabra «fiable», se quería decir lo que ésta significa. La familiar queja de que «las cosas ya no duran lo que solían durar» es una comparación, si bien subjetiva, de las fiabilidades pasadas y presentes. Cuando decimos que alguien es fiable, queremos decir que se puede confiar en que termine una tarea satisfactoriamente y a tiempo. Estas descripciones de la fiabilidad son cualitativas y no implican medidas numéricas.

No fue sino en la guerra de Corea cuando la fiabilidad cuantitativa se empleó ampliamente por primera vez, aplicándose métodos estadísticos para su medición. Se llegó a la definición de fiabilidad como *probabilidad de que un dispositivo funcione adecuadamente durante un período dado en su aplicación prevista,* definición que hoy se acepta generalmente. Se han hecho variantes de esta definición para dispositivos que funcionan una sola vez, como son los dispositivos explosivos, y para características que no dependen del tiempo, pero dicha definición es esencialmente aplicable. En ella entra el término *probabilidad,* que indica el uso de una medida cuantitativa. La probabilidad mide en qué grado debemos esperar que ocurra determinado suceso (en este caso, el funcionamiento adecuado). Puede determinarse para cualquiera de los innumerables equipos que interesen con destino al consumidor o para uso militar. Únicamente difieren los

métodos de medición de la probabilidad para los distintos tipos de equipos.
Además del aspecto probabilístico, la definición de probabilidad comprende otros tres conceptos: funcionamiento satisfactorio, período de tiempo y aplicación prevista. Ha de existir una definición de lo que constituye un funcionamiento satisfactorio. Ciertamente, no es necesario que un equipo esté totalmente inoperante para que sea insatisfactorio. Si la compresión de dos cilindros de un motor de automóvil es baja, la actuación del motor será menos que satisfactoria. Por otra parte, el cumplimiento al ciento por ciento de todas las características deseadas puede no ser una definición realista de actuación satisfactoria y pudiera ser aceptable una cifra algo inferior al 100 %. Los Estados Unidos han realizado muchos vuelos espaciales tripulados que se consideraron muy satisfactorios aunque no todos los elementos del equipo funcionasen a la perfección. Si se quiere que la medida de la fiabilidad tenga significado es preciso definir debidamente lo que se entiende por actuación satisfactoria.
El tiempo de funcionamiento es más definitivo. La definición de una misión cubre cierta extensión determinada de tiempo. Una garantía se consigna por escrito para un número concreto de meses o años. Una vez definidos los criterios de actuación satisfactoria, puede compararse con ellos el funcionamiento del equipo durante el período de tiempo requerido. Incluso en esto es necesario, sin embargo, tener cierta flexibilidad. Los criterios de aceptabilidad pueden variar en función del tiempo, de modo que lo que se considera aceptable al final del período de funcionamiento pudiera ser algo inferior a lo que era satisfactorio al comienzo. Un automóvil nuevo no debe gastar nada de aceite entre cambios de aceite, mientras que la adición de un litro de aceite cada 1600 kilómetros puede ser muy aceptable para un automóvil con 5 años de edad.
El último concepto —aplicación prevista— ha de formar también parte de la definición de fiabilidad. Los equipos se diseñan para funcionar de una manera determinada bajo particulares conjuntos de condiciones. Entre éstas están las condiciones ambientales (temperatura, presión, humedad, aceleración, vibración, choque, ruido acústico, etc.) y las condiciones operativas (tensión e intensidad eléctricas, par mecánico, atmósfera corrosiva, etc.) que han de encontrarse en fabricación, transporte, almacenamiento y uso. Si el equipo falla o se degrada excesivamente al utilizarlo en su ambiente previsto, es insatisfactorio, pero si se le somete a esfuerzos superiores a aquellos para los que fue diseñado, los fallos o la degradación pueden no ser medidas razonables de infiabilidad.
Este texto se ocupará principalmente de las consideraciones probabilísticas —su definición, procedimientos de cálculo, medios para combinar las probabilidades de los componentes— a fin de obtener estimaciones para los sistemas y otros aspectos numéricos de la fiabilidad. Se supondrá, en general, que existen criterios adecuados sobre actuación satisfactoria, tiempo y aplicación. No obstante, se volverán a enunciar o examinar estos criterios cuando así convenga para discutir los aspectos matemáticos.

1.2. NECESIDAD DE LA FIABILIDAD

La importancia de obtener sistemas y componentes muy fiables se ha visto clara en los últimos años. Desde un punto de vista puramente económico es deseable una alta fiabilidad para reducir los costos totales. El inquietante hecho de que el costo anual de mantener ciertos sistemas militares en estado de funcionar ha llegado a ser diez veces el costo original del equipo pone de relieve esta necesidad. El fallo de una pieza o componente no sólo da lugar a la pérdida del dispositivo fallado sino que con muchísima frecuencia produce también la pérdida de algún conjunto o sistema mayor del cual forma parte. La vieja historia de la pérdida de un clavo de herradura es aplicable a la realidad. Un cilindro de freno con fugas puede dar lugar a una factura de reparación costosa si es causa de un accidente. Un satélite espacial puede resultar totalmente inútil si no funciona un interruptor o queda inoperativo un sistema de telemedida.

La seguridad es una consideración igualmente importante. El cilindro de freno que pierde líquido puede producir importantes daños personales además de gastos indebidos. La pérdida del tren de aterrizaje de un avión significó en cierta ocasión la destrucción de éste, aunque ningún pasajero sufrió daño. No obstante, las consecuencias hubieran podido ser fácilmente mucho más graves. La intempestiva muerte de tres astronautas norteamericanos sirve para destacar la importancia de la fiabilidad para la seguridad personal.

Otras consecuencias de la fiabilidad (o, mejor, de la infiabilidad) son los retrasos de horario, las incomodidades, la insatisfacción de los clientes, la pérdida de prestigio (posiblemente a nivel nacional) y, lo que es más grave, la pérdida de la seguridad nacional. Estas circunstancias comprenden también factores de costo y seguridad. El costo, por ejemplo, es inherente a todo fallo, como lo son la incomodidad y el retraso. La mayoría de los fallos también implican por lo menos una de las demás consideraciones. Incluso el prosaico ejemplo de un componente defectuoso en un televisor implica costo, incomodidad, pérdida de prestigio (del fabricante o del último técnico de servicio que tocó el televisor) y descontento del cliente.

La necesidad e importancia de la fiabilidad se han reflejado en el valor siempre en aumento que le atribuyen los gobiernos y las empresas. La mayoría de los contratos del Departamento de Defensa, la NASA y la Comisión de Energía Nuclear (AEC) imponen cierto grado de exigencias de fiabilidad al contratista. Estos requisitos van desde la definición de metas de fiabilidad para el sistema hasta exigir una demostración real del resultado conseguido. En la mayoría de los programas técnicos financiados por el gobierno se ha exigido contractualmente el cumplimiento de un documento de fiabilidad como la especificación DOD MIL-STD-785, la especificación NASA NPC 250-1 o la especificación USAF MIL-R-26484, que definen detalladamente los requisitos a cumplir por un programa acceptable de fiabilidad. Muchos de estos programas técnicos dis-

ponen de un presupuesto especial para el esfuerzo de fiabilidad, exigen el desarrollo y mantenimiento de un programa de fiabilidad y especifican la preparación de informes periódicos de fiabilidad.

Sin embargo, la industria privada ha sido más lenta en la instrumentación de programas de fiabilidad. En el pasado, algunos productores de bienes comerciales creían que el gasto en un esfuerzo de fiabilidad superaba a su valor, por lo que le concedían sólo un reconocimiento simbólico. Aunque se hablase al público de alta calidad y alta fiabilidad a través de la televisión y demás medios publicitarios, posiblemente se realizaba muy poco esfuerzo real en el programa de fiabilidad. Afortunadamente, esta actitud está cambiando gradualmente conforme van siendo más las empresas que se percatan de las ventajas económicas que proporciona un programa eficaz de fiabilidad.

1.3. ÁREAS DE ACTIVIDAD DE LA FIABILIDAD

Durante los años sesenta se dio mucho ímpetu al crecimiento, reconocimiento y definición de la función de fiabilidad. La fiabilidad se ha convertido en una disciplina reconocida de ingeniería, con sus propios métodos, procedimientos y técnicas. Para llegar a esta situación ha sufrido unos dolores de crecimiento análogos a los que experimentó el aseguramiento de la calidad durante los dos decenios anteriores. El convencer a la dirección de la empresa de que la fiabilidad era económicamente deseable exigió a veces un esfuerzo comparable al dedicado a realizar las tareas de fiabilidad en sí mismas. Por ello, el desarrollo de la fiabilidad en el área de la dirección y del control comprendió la justificación de su existencia tanto como la aplicación de los principios de dirección de ingeniería a la organización y dirección de las actividades de fiabilidad.

Durante el proceso de crecimiento aparecieron tres principales áreas técnicas de fiabilidad: (1) ingeniería de fiabilidad, comprendiendo el análisis de fiabilidad de sistemas, la revisión de diseños y tareas anejas; (2) análisis de operaciones, que incluye la investigación de fallos y la acción correctiva; y (3) matemáticas de la fiabilidad. Cada una de estas áreas desarrolló su propio cuerpo de doctrina y, aunque no pueden trazarse fronteras exactas entre sus actividades, de hecho las funciones de fiabilidad están frecuentemente organizadas en estas tres divisiones. Algunas actividades relativas a las dos primeras de estas divisiones principales no siempre se delegan en la organización de fiabilidad; por ejemplo, la responsabilidad de las revisiones de diseño se asigna a veces a la misma organización de diseño. En estos casos, fiabilidad suele ser responsable de vigilar la realización de las actividades para determinar si se ejecutan de acuerdo con las consignas de la dirección o del contrato. Sin embargo, la tercera función —matemáticas de la fiabilidad— rara vez se delega fuera de la organización de fiabi-

lidad. En primer lugar, los métodos, aunque no exclusivos de la función de fiabilidad, no son familiares a la mayoría del personal de diseño, ensayos y demás secciones de la organización; y en segundo lugar, cuando se menciona el término «fiabilidad», los aspectos en los que se piensa suelen ser los matemáticos. De hecho, su definición primaria se expresa en términos matemáticos que incluyen el concepto de probabilidad.

El diseño de la fiabilidad comprende funciones como el análisis del diseño de sistemas, comparación de configuraciones alternativas, revisiones de planos y especificaciones, compilación de listas de componentes y materiales preferidos y preparación y análisis de programas de ensayo. Algunas de las actividades específicas son el análisis de modos y efectos de los fallos, la preparación de listas de comprobación para la revisión de diseños y los estudios e investigaciones especiales. En la función de diseño de la fiabilidad se incluyen frecuentemente estudios ambientales, así como evaluaciones de la fiabilidad de proveedores. En organizaciones relacionadas con sistemas complejos como refinerías o vehículos espaciales, las funciones de fiabilidad de diseño podrían dividirse en grupos de estudio de sistemas, de diseño mecánico y de diseño eléctrico. Un cuarto grupo podría incluir funciones como fiabilidad de proveedores y aplicaciones de componentes. Pero sea cual fuere el organigrama en particular, casi todas las actividades individuales hacen algún uso de procedimientos numéricos.

Las funciones de fiabilidad de operaciones se relacionan con las operaciones de fabricación y montaje, realización de ensayos, análisis de fallos y acción correctiva, datos de tiempos y ciclos de funcionamiento, informes de operaciones en el campo de utilización y otras actividades ligadas a la materialización y ensayo del diseño. El personal de esta función ayuda a asegurar que se realicen las intenciones del diseño e informa sobre las discrepancias en operaciones y procedimientos, así como sobre las anomalías de funcionamiento. El grupo de fiabilidad de operaciones proporciona muchos de los datos sobre la fiabilidad real de los equipos que usan los otros grupos de fiabilidad.

El grupo estadístico suele ser el más pequeño, pero puede aportar beneficios iguales al programa total. Además de realizar las actividades numéricas de predicción, reparto y valoración, este grupo (o individuo) presta apoyo a los grupos de fiabilidad de diseño y de operaciones, y directamente a los ingenieros de diseño y de ensayos. Se desarrollan y aplican a los problemas de ingeniería diseños estadísticos de experimentos, contrastes de bondad de ajuste, técnicas de predicción para sistemas y otros métodos matemáticos. Los métodos y procedimientos tratados en este libro son aplicables a ambas clases de actividades, y se espera que el personal de fiabilidad de diseño y operaciones y los miembros de las organizaciones de ingeniería, así como los estadísticos de fiabilidad, los encuentren informativos y útiles.

1.4. CAUSAS DE LA INFIABILIDAD

Hay cierto número de razones por las que los equipos y sistemas pueden ser infiables. Estas razones pueden ser desde errores en el concepto original hasta equivocaciones operativas, pudiendo comprender tanto deficiencias del mismo equipo como discrepancias en su aplicación y uso. El amplio espectro que media entre la concepción y la aplicación en el campo de utilización constituye la parte mayor de la disciplina más amplia de *efectividad de sistemas.* Nos ocuparemos primordialmente de las razones técnicas por las que la efectividad real es inferior a la planeada, y específicamente de las áreas de infiabilidad que pueden ser evaluadas y corregidas mediante el uso de métodos estadísticos. Pero ante todo examinaremos brevemente algunas de las principales causas de infiabilidad.

Las deficiencias de diseño son las causas en las que se suele pensar en primer lugar. Los verdaderos errores o inadvertencias no constituyen un porcentaje grande de estas deficiencias. Por el contrario, el desconocimiento de las condiciones ambientales, la falta de capacidad de piezas y equipos concebidos según el actual nivel de conocimientos, las incompatibilidades no sospechadas entre materiales y las complejidades inevitables son otras tantas posibles causas que contribuyen significativamente a que un diseño no cumpla los requisitos de fiabilidad. A menudo aparecen condiciones perjudiciales imprevistas en programas que se realizan en campos nuevos, como son los sistemas de energía nuclear.

Hay dos aspectos de ambientes desconocidos: (1) pueden encontrarse nuevos ambientes no estudiados previamente con suficiente extensión, y (2) pueden desconocerse los verdaderos niveles del ambiente, como las temperaturas terrestres que han de encontrarse. Entre los ambientes que ahora se están estudiando de forma más completa tenemos la radiación, el vacío absoluto, los choques de meteoritos y los espectros de temperatura del espacio. Se investigan las correspondientes probabilidades y efectos. Estos esfuerzos son costosos y, aunque ya se ha publicado mucha información, los efectos sobre equipos y misiones particulares han de ser determinados a menudo por extrapolación de la información disponible y enjuiciamientos competentes de ingeniería. Cuando se conocen los efectos ambientales, puede seguir habiendo duda sobre el nivel al que el equipo puede resultar expuesto. Por ejemplo, unas diferencias relativamente pequeñas de temperatura a un nivel crítico de temperatura pueden producir grandes efectos sobre la actuación de componentes electrónicos, pero aun reconociéndose los efectos, podrían existir puntos calientes o gradientes térmicos no detectados que pudieran degradar la fiabilidad.

Las propiedades de los materiales pueden cambiar inesperadamente, particularmente cuando hay que emplear materiales poco familiares en nuevas aplicaciones. Cambios imprevistos de estructuras cristalinas, transformaciones químicas muy especiales, etc., pueden tener lugar en los materiales, manifestándose sólo después de decenas o centenares de horas de uso. Análogamente, otras incógnitas

de diseño pueden afectar perjudicialmente a la capacidad y longevidad de los equipos.

Incluso cuando las condiciones indeseables son conocidas por el diseñador, puede no haber medios inmediatos para evitarlas. Los materiales y componentes actuales pueden carecer de las necesarias propiedades o características, debiendo usarse a pesar de todo por no disponer de nada mejor. Por supuesto, en estos casos deben emprenderse programas de investigación y desarrollo para corregir las deficiencias básicas. También puede ser tan grande la complejidad que la consecuencia natural sean altas posibilidades de fallo, sin poder evitarlas, porque las condiciones de actuación del sistema o las limitaciones de peso excluyan el uso de elementos redundantes. El diseñador hace todo lo que puede para reducir la probabilidad de fallo. Siempre que es posible, el diseño se hace mantenible para que cuando se produzcan fallos puedan detectarse fácilmente las deficiencias y realizarse acciones adecuadas de mantenimiento o reposición.

Ligadas a las debilidades de diseño están las deficiencias de los programas de ensayo, de los equipos y de las operaciones. Éstas se deben también con frecuencia a factores desconocidos e imprevistos. Puede que no se disponga de fondos para realizar un programa completo de ensayos diseñado no sólo para verificar la capacidad de actuación sino también para investigar áreas de posible infiabilidad. Los instrumentos descalibrados y los reglajes defectuosos pueden contribuir también al desgaste o fallo prematuros del ejemplar de ensayo. Los fallos del equipo de ensayo pueden llevar a fallos del sistema, tanto en forma de fallos secundarios, consecuencia de sufrir un esfuerzo excesivo, como en forma de fatiga debida a someter al sistema a un número demasiado elevado de ciclos. Las averías de válvulas de prueba, controles de temperatura, reguladores de presión, etc., pueden someter al ejemplar ensayado a esfuerzos para los que no fue diseñado. Un ejemplo sencillo es el fallo de un sistema de lubricación-refrigeración que produjo un sobrecalentamiento de los cojinetes del ejemplar ensayado, con el consiguiente agarrotamiento. En otro caso, un freno dinámico accionado hidráulicamente fue activado por un descenso de presión en la línea debido a una carga en otra parte de la instalación de ensayos, lo que dio lugar a un corte de emergencia del ensayo. Estas detenciones producen esfuerzos excesivos en el ejemplar ensayado y afectan perjudicialmente a su longevidad.

Unas comunicaciones deficientes constituyen la causa de una gran parte de la infiabilidad. Unas instrucciones incompletas o mal interpretadas de ingeniería de diseño a fabricación pueden provocar desviaciones no detectadas del producto respecto de las intenciones del diseño; unas indicaciones poco claras a ingeniería de ensayos pueden dar lugar a operaciones incorrectas de ensayo que dañen al ejemplar ensayado y causen un fallo prematuro. Los manuales e instrucciones de uso y mantenimiento en el campo de utilización pueden ser ambiguos, incompletos e incluso inexistentes, dando ocasión a manipulación incorrecta, mantenimiento inadecuado y fallo al poco tiempo.

Puede que se omita la purga *(burn-in)*, requerida para eliminar posibles fallos infantiles, con objeto de cumplir los plazos o poner pronto en servicio el equipo. También es posible que la vida del equipo en sí no sea lo bastante larga (a causa de los componentes disponibles por el «estado del arte») para evitar un desgaste real dentro del período de funcionamiento requerido. Finalmente, el mismo requisito de fiabilidad puede ser demasiado elevado para permitir una probabilidad realista de cumplirlo dentro del presupuesto, los plazos y demás restricciones del programa.

1.5. CLASES DE FALLOS

Las causas de fallos pueden clasificarse en tres tipos básicos. Se admite que puede haber más de una causa contribuyente a un fallo particular y que, en ciertos casos, puede no haber una distinción totalmente clara entre algunas de las causas. No obstante, el uso de las tres clases facilita la discusión de las diversas actividades dentro de la disciplina de matemáticas de la fiabilidad sin invalidar las conclusiones. Podemos, pues, investigar problemas de predicción, reparto y valoración y presentar métodos para llegar a soluciones de estos problemas que sean prácticas en lo tocante a facilidad de utilización y realistas en cuanto a la validez y utilidad de las soluciones.

Las tres clases de fallos son los infantiles, los aleatorios (por azar) y los debidos a desgaste. Una posible cuarta clase es la de los fallos por «fuera de tolerancias» que pueden tener lugar en cualquier momento de la vida operativa del sistema. Las distribuciones de fallos para la clase de «fuera de tolerancias» son las mismas que para los fallos por desgaste y los métodos matemáticos usados para evaluación son semejantes. En consecuencia, aunque más adelante consideraremos estos fallos por separado, aquí no los clasificamos independientemente.

Los fallos infantiles son los debidos a cierto defecto de la pieza o conjunto como resultado de una deficiencia de diseño, fabricación o inspección. Los fallos que ocurren durante la fase de investigación y desarrollo de un programa suelen ser fallos infantiles. Se ejerce una acción correctiva, se eliminan las causas de fallo y se hacen ensayos de verificación. Sin embargo, en ciertos casos no es posible eliminar económicamente mediante diseño algunos mecanismos de fallo de una pieza. Es globalmente menos costoso producir muchas piezas y separar las unidades potencialmente defectuosas mediante ensayos de purga *(burn-in)* u otras inspecciones al 100 %. Esta práctica es común en la industria electrónica en la que muchas clases de componentes se someten rutinariamente a la operación de purga. Las características de los componentes se someten a vigilancia durante el período de purga (100 horas o las que sean) y los que exhiban degradación o fallo se eliminan del lote. Los sistemas y subsistemas se suelen someter

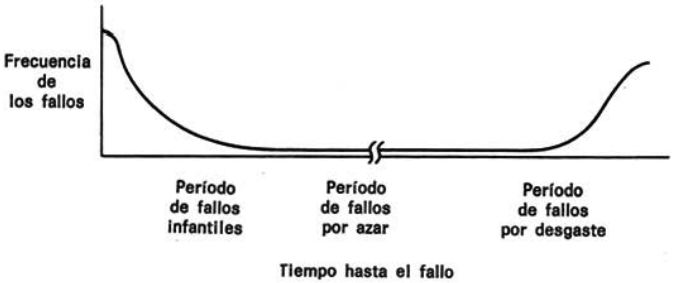


FIG. 1.1. Las tasas de fallo relativas durante la vida de un componente o sistema.

a un *debugging* haciéndolos funcionar durante cierto período antes de la entrega para asegurarse de la detección y eliminación de los fallos infantiles o potenciales. Esto es imperativo para los subsistemas de misiles y satélites que son esencialmente no reparables durante su uso, y es muy deseable para equipos reparables como sistemas comerciales de distribución de energía y radares cuyo funcionamiento fiable debe librarse de riesgos.

Puesto que la purga o *burn-in* es un procedimiento conveniente y en algunos casos necesario y puesto que los fallos infantiles pueden eliminarse, la mortalidad infantil no es un modo de fallo que se considere en la discusión de las matemáticas de la fiabilidad. Si existe, la fiabilidad del componente o sistema resulta tan comprometida que los cálculos de fiabilidad no sólo son inválidos y engañosos, sino que dan un resultado necesariamente bajo, por la elevada frecuencia de fallos. Un examen de las causas de fallo y de su historial descubrirá cuándo existe mortalidad infantil y ayudará a determinar las medidas correctivas (modificación del diseño, adiestramiento de operarios, mejor inspección o purga) que se requieren para eliminar los fallos infantiles.

Las otras dos clases de fallos, por azar y por desgaste (incluyendo esta última los fallos por fuera de tolerancia), se discuten en sucesivos capítulos en unión con las correspondientes distribuciones estadísticas y métodos matemáticos. La distribución exponencial negativa se usa para características con fallos por azar y la normal (de Gauss) y otras parecidas para el desgaste y otras características cuyas distribuciones son «acampanadas». Otras distribuciones corresponden a sistemas redundantes. La relación entre las tres clases de fallos se muestra gráficamente en la figura 1.1. Esta figura se suele llamar «curva de bañera».

Las ordenadas correspondientes a los períodos de fallos infantiles y fallos por desgaste no han de estar forzosamente en la relación que muestra la figura. La frecuencia de los fallos infantiles, por ejemplo, podría ser bastante inferior para un componente mecánico en la fase de producción. Análogamente, la ordenada

de la curva relativa al período de fallos por azar podría ser muy distinta. No obstante, la relación general es la indicada.

1.6. MÉTODOS PARA MEJORAR LA FIABILIDAD

Teniendo en cuenta todas las posibles áreas de infiabilidad, muy bien podríamos preguntarnos si es posible alcanzar los niveles requeridos de fiabilidad, particularmente si son muy elevados. Afortunadamente, el panorama no es tan lúgubre como parece. Se encuentran y corrigen los problemas, comprobándose luego la acción correctiva. Se eliminan debilidades de diseño, se desarrollan materiales y componentes mejorados y se preparan procedimientos y manuales adecuados. Todavía hay otros varios métodos para mejorar la fiabilidad de un componente o sistema. Muchos de ellos implican el uso de procedimientos numéricos. La comparación de diseños entre los que optar, el uso de amplios márgenes de seguridad, el empleo de redundancia y los ensayos con sobrecarga utilizan todos ellos análisis cuantitativos. El enjuiciamiento y corrección de deficiencias de diseño y la programación del mantenimiento exigen también el uso de técnicas estadísticas. Otros métodos como el análisis de fallos y la purga, aunque no implican directamente métodos matemáticos, pueden ser mucho más eficaces cuando se emplean métodos estadísticos como ayudas auxiliares.

En la comparación de diseños alternativos, los equipos de diseño preparan dos o más configuraciones que den las características de actuación requeridas. Estas configuraciones son examinadas por miembros de fiabilidad, aseguramiento de la calidad, cálculo de esfuerzos, ingeniería de fabricación y otras secciones de la organización, para determinar las debilidades potenciales y seleccionar el candidato más prometedor. Un aspecto del examen por la función de fiabilidad es la predicción cuantitativa de la fiabilidad de cada diseño. Esta predicción se describe en detalle en el capítulo 10. Sin la comparación cuantitativa, la inclinación en cuanto a fiabilidad en la referida aplicación pudiera dar lugar a elegir un diseño que luego resultase ser algo menos fiable que los otros.

El uso de grandes márgenes de seguridad está difundido entre los arquitectos y en la industria de la construcción. Coeficientes de cinco y diez a uno son corrientes y suelen poder obtenerse de forma relativamente económica usando una viga mayor, unos cimientos más profundos, etc. El peso importa poco. Sin embargo, en industrias como la electrónica, la aeronáutica y la aeroespacial, el peso y el rendimiento se convierten en problemas fundamentales. La cantidad de combustible adicional para una misión espacial es muchas veces mayor que el peso de la carga útil adicional: cada kilogramo de carga útil cuesta muy caro. Se usan márgenes de seguridad muy pequeños, como del 10 % (coeficiente de seguridad 1,1). Con estos márgenes tan pequeños es esencial conocer las distribuciones

de esfuerzos y resistencias, así como sus relaciones, y los métodos estadísticos son de gran importancia en la evaluación.

La redundancia (disponer de más de un medio para realizar una función, necesitándose menos) es el principal método para aumentar la fiabilidad. La redundancia puede implicar el uso de dos o más componentes o conjuntos idénticos de forma que cuando uno falla hay otros que realicen la función; o bien puede incluir medios diferentes para realizar la función. Una rueda de repuesto es un ejemplo de pieza redundante; el sextante manual usado para la navegación de un vehículo espacial en caso de fallo de los controles automáticos es un ejemplo del segundo método. En ambos ejemplos, el componente redundante (la rueda de repuesto o el sextante) se usa sólo cuando falla el sistema primario. Este uso se llama redundancia *secuencial*. Otros sistemas redundantes se hacen funcionar simultáneamente, de modo que todos los sistemas utilizables (no fallados) realicen la función durante todo el tiempo. Este tipo se llama redundancia en *paralelo activo*. El uso de múltiples elementos resistivos en un banco de carga, con posibilidad de que uno o más elementos fallen sin afectar a la actuación del sistema, es un ejemplo de redundancia en paralelo activo. El uso de cuatro motores en un avión es otro.

El tipo de redundancia viene impuesto ante todo por consideraciones de actuación del sistema. La redundancia secuencial proporciona teóricamente más fiabilidad que la redundancia en paralelo activo *si* las funciones de detección de fallos y conmutación son extremadamente fiables. En caso contrario, se prefiere la redundancia en paralelo activo desde el punto de vista de la fiabilidad. Ambos tipos dan una fiabilidad del sistema mucho mejor que el sistema no redundante. Los cálculos de la fiabilidad de sistemas redundantes pueden resultar muy complejos: los métodos matemáticos se presentan en capítulos posteriores.

Los ensayos con sobrecarga o acelerados pueden usarse tanto para evaluar la capacidad de un componente para satisfacer los requisitos de fiabilidad como para tener un medio más rápido de detectar debilidades potenciales y modos de fallo. La relación entre los fallos y tasas de fallo en condiciones aceleradas y los correspondientes a las condiciones nominales y reales de funcionamiento debe conocerse a través de datos históricos si se quiere que los ensayos acelerados tengan máxima eficacia. Son bien conocidas, por ejemplo, las tasas de fallo en función de las tensiones aplicadas y temperaturas de funcionamiento de condensadores y resistencias, y las relaciones pueden usarse para evaluar unidades de un nuevo lote, tipo o fabricante. Una relación frecuentemente usada es que la tasa de fallo se duplica aproximadamente por cada subida de 10° C. Así pues, una tasa de fallo a 125° C es aproximadamente 32 veces mayor que la tasa de fallo a 75° C, siempre que la unidad pueda funcionar a la temperatura superior para evaluar más rápidamente su fiabilidad. Puesto que estos componentes suelen ser muy fiables, se usan temperaturas aún más elevadas en combinación con sobretensiones a fin de determinar tasas de fallo en un tiempo razonable. El ensayo en sobre-

carga de nuevos tipos es una práctica común y se usa para detectar modos de fallo potenciales. Otra frecuente aplicación de los ensayos acelerados es en combinación con los ensayos de purga, por los cuales se someten nuevas unidades de equipo a un funcionamiento inicial por encima de los esfuerzos que vayan a sufrir en su aplicación a fin de eliminar fallos potenciales o «unidades subnormales». Es importante, desde luego, que la purga u otro ensayo acelerado o en sobrecarga no introduzca nuevos modos de fallo que no tendrían lugar normalmente y que no degrade las unidades ensayadas si éstas han de ser empleadas en equipos a entregar.

Además de los métodos de predicción usados para comparar diseños propuestos, las valoraciones de la fiabilidad de equipos reales son valiosas para determinar las áreas en que debe concentrarse el esfuerzo para obtener la máxima mejora. Los componentes que más contribuyen a la probabilidad de fallo del sistema resultan revelados y pueden evaluarse entonces en cuanto a los diversos medios para mejorar su fiabilidad, como son mayores márgenes de seguridad, redundancia, etc. Se emplean directamente técnicas estadísticas para las valoraciones de la fiabilidad, usando datos de ensayos reales del equipo. Los capítulos 13 y 14 describen los métodos de valoración más frecuentemente usados e incluyen criterios para seleccionar los métodos más aplicables, así como ejemplos detallados de su uso.

La corrección de las deficiencias de diseño es el método más directo para mejorar la fiabilidad. Se emplean análisis de ingeniería para detectar puntos débiles y para elegir los medios de eliminarlos. Los análisis de esfuerzos, las evaluaciones de compatibilidad de materiales y otras disciplinas contribuyen a este esfuerzo. Además de hacer estudios auxiliares en apoyo de este esfuerzo, la sección de fiabilidad puede aportar planes de ensayo estadísticamente diseñados que permitan una económica selección de valores óptimos de las características de entrada y den medidas matemáticas de la significación de los cambios de diseño. El diseño estadístico de experimentos, aunque no directamente relacionado con la fiabilidad (y no tratado en este texto), puede ser un área de buena contribución económica.

Cuando las técnicas estadísticas se aplican a la programación cronológica de las actividades de mantenimiento, puede conseguirse con máxima eficacia el nivel requerido de fiabilidad. La mantenibilidad es un tema fundamental y comprende medidas estadísticas tales como el tiempo medio entre fallos, tiempo medio de reparación, etc. El alcance de este aspecto de la efectividad de sistemas de la que la fiabilidad es otra faceta principal, es muy amplio y constituye el tema de otros textos.

Nosotros estudiaremos tanto los métodos y técnicas matemáticas usadas para medir y mejorar la fiabilidad de componentes y sistemas como los criterios para su selección. Antes de pasar a un análisis detallado de métodos, se presentan algunos conceptos estadísticos básicos. Éstos nos permitirán captar mejor las

razones de la validez y utilidad de los métodos y facilitarán la elección de las técnicas adecuadas para cada problema concreto de fiabilidad.

LECTURAS ADICIONALES

ARINC Research Corporation: «Reliability Engineering», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

Bazovsky, I.: «Reliability Theory and Practice», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Bureau of Naval Weapons, Chief of: «Handbook: Reliability Engineering», U.S. Government Printing Office, 1964.

Calabro, S. R.: «Reliability Principles and Practices», McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

Chorafas, D. N.: «Statistical Processes and Reliability Engineering», D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1960

Dummer, G. W., y N. B. Griffin: «Electronics Reliability: Calculation and Design», Pergamon Press, Ltd., London, 1966.

Ireson, W. G.: «Reliability Handbook», McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

Lloyd, D. K., y M. Lipow: «Reliability: Management, Methods, and Mathematics», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Shooman, M. L.: «Probabilistic Reliability: An Engineering Approach», McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

2

Conceptos estadísticos fundamentales

2.1. PROBABILIDAD

Los primeros conceptos que intervienen en las matemáticas de la fiabilidad son los relativos a probabilidades. Es esencial la comprensión del concepto de probabilidad, porque todas las aplicaciones de la estadística en la fiabilidad dependen de algún aspecto de la probabilidad, bien implicado en la formulación de la actividad de fiabilidad, bien usado directamente en los cálculos. La discusión que sigue considera la probabilidad de sucesos *discretos*: sucesos que constituyen un conjunto de valores aislados. Si se lanza un dado, supuesto que éste no puede sostenerse sobre una arista o un vértice, los únicos resultados posibles son 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. El valor 2,34176, por ejemplo, es un suceso imposible. No obstante, el lector debe recordar que la mayoría de las distribuciones son *continuas* y que puede presentarse cualquier valor entre ambos extremos de la distribución. Si se miden las estaturas de seres humanos adultos físicamente normales, pueden observarse valores desde algo menos de 1,50 m hasta 2,00 ó 2,30 m. Análogamente, las características y fiabilidades de componentes y sistemas tienen distribuciones continuas en vez de discretas. Puesto que el uso de distribuciones de sucesos discretos simplifica la explicación de las probabilidades y muchos de estos conceptos son aplicables a las funciones continuas, este capítulo trata de casos discretos.

La probabilidad de un suceso es la razón del número de veces que se espera ocurra al número total de tentativas. Puede expresarse cuantitativamente como fracción, tanto por ciento o número decimal. Cuando se lanza un dado perfecto, la probabilidad de que quede arriba una cara en particular es 1/6. A causa del azar, un número puede aparecer con más frecuencia que otro cuando el número de pruebas es pequeño. A la larga, después de lanzar el dado muchas veces, la razón del número de veces que aparece un número al número total de lanza-

mientos *se aproxima* a 1/6. En posteriores capítulos examinaremos cuánta desviación respecto de una probabilidad teórica puede esperarse por causa del azar en función del número de pruebas que se realicen.

El intervalo de valores posibles de una probabilidad es de cero a uno. Si no existe posibilidad de que ocurra un suceso (como que salga 2,34176 en un dado) su probabilidad es cero. Si un suceso ha de producirse forzosamente cada vez que se realice una prueba, su probabilidad es uno. De aquí se deduce que, al hacer una prueba, la suma de todos los sucesos posibles será igual a uno. Así pues, al lanzar un dado, la probabilidad de que salga un valor 1, 2, 3, 4, 5 o 6 será la unidad, pues no puede darse otro resultado.

Supongamos que hay 10 bolas en una caja, numeradas correlativamente a partir de 1. Si se mezclan bien, la probabilidad de extraer al azar una bola determinada, por ejemplo la 2, es 1 de 10, o sea, 1/10. Análogamente, la probabilidad de extraer la número 5 es también 1/10. La probabilidad de extraer la 2 o la 5 es $1/10 + 1/10 = 2/10 = 1/5$. Esto es verdad porque estos sucesos son *mutuamente excluyentes;* es decir, los dos sucesos no pueden ocurrir simultáneamente. En un grupo de sucesos mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra *cualquiera* de varios sucesos es la suma de sus probabilidades individuales. Esto se llama *regla de la suma.*

La probabilidad de extraer una bola en particular es 1/10 siempre que cada vez que se extraiga una bola sea ésta devuelta a la caja y se mezclen bien todas las bolas. Mientras esto ocurra, la probabilidad de extraer una bola en particular por segunda vez es *independiente* de los resultados de la primera extracción. La *regla del producto* expresa que la probabilidad de que ocurran dos o más sucesos independientes es el producto de sus probabilidades individuales. Así pues, la probabilidad de extraer una bola *en particular* dos veces seguidas en estas condiciones será $1/10 \times 1/10 = 1/100$.

Sin embargo, la probabilidad de extraer *cualquier* bola dos veces seguidas sigue siendo 1/10. La probabilidad de extraer cualquier bola la primera vez es la unidad, puesto que sabemos que se extrae una bola. A continuación, la probabilidad de extraer esta misma bola la segunda vez es 1/10. El producto de la unidad por 1/10 es, desde luego, 1/10. Es importante advertir la forma en que se enuncia un problema a fin de evitar cometer un error importante.

La probabilidad de extraer la bola número 2 en la primera prueba o en la segunda prueba parece a primera vista ser $1/10 + 1/10 = 1/5$. No obstante, la verdadera probabilidad de extraer la número 2 *al menos una vez en dos pruebas* es sólo 19/100. Si la primera extracción tiene éxito, es decir, sale la bola 2, no se necesita hacer la segunda prueba, puesto que su resultado no altera la probabilidad. En otras palabras, sólo se hace una segunda extracción si el número 2 *no* sale la primera vez. La probabilidad de extraer la bola 2 es, pues, la probabilidad de sacarla la primera vez más la probabilidad de no sacarla a la primera y sí a la segunda. La respuesta es $1/10 + (9/10 \times 1/10) = 19/100$. La

TABLA 2.1. Probabilidad de extraer al menos una bola 2 y número medio de bolas 2.

Caso	Primera prueba		Segunda prueba		Probabilidad total del caso	Número de bolas 2 extraídas	Producto de las dos columnas precedentes
	Resultado	Probabilidad	Resultado	Probabilidad			
A	Éxito	1/10	Éxito	1/10	1/100	2	2/100
B	Éxito	1/10	Fallo	9/10	9/100	1	9/100
C	Fallo	9/10	Éxito	1/10	9/100	1	9/100
D	Fallo	9/10	Fallo	9/10	81/100	0	0
					Total = 1		Número medio de bolas 2 = = 20/100 = 1/5

diferencia entre las dos respuestas es 1/100, que es la probabilidad de sacar 2 dos veces seguidas. El valor 19/100 puede obtenerse también calculando la probabilidad de no tener éxito y restándola de la unidad. La probabilidad de no sacar 2 la primera vez es 9/10 y la de no sacar 2 la segunda vez también 9/10. La probabilidad de no sacar 2 ninguna de las dos veces será $9/10 \times 9/10 = 81/100$. Restando este valor de 1 obtenemos el resultado 19/100. Cuando el resultado de una prueba depende del resultado de otra, decimos que intervienen *probabilidades condicionales*. También aquí la respuesta es afectada por la forma particular en que se enuncie el problema. Si se efectúa una segunda extracción sin tener en cuenta lo ocurrido en la primera, es decir, que las dos pruebas son independientes, *el número medio de veces* que sale 2 en cada par de pruebas es ciertamente 1/5.

Los diferentes casos y sus probabilidades se resumen en la tabla 2.1. Los casos A, B y C constituyen éxitos (al menos un 2) y, puesto que son mutuamente excluyentes, la probabilidad total de éxito es la suma de sus probabilidades individuales = 19/100. Si se efectúa una segunda extracción sólo cuando la primera falla, la probabilidad de *al menos* un 2 por caso es la misma (19/100). El *número medio* de bolas número 2 si siempre se realiza la segunda extracción se halla multiplicando la probabilidad de cada caso por el correspondiente número de bolas 2 y sumando, como indica la columna de la derecha. Si no se hace siempre la segunda extracción, el número medio de bolas 2 por caso disminuye a 19/100, puesto que algunos casos sólo consistirán en una prueba.

2.1.1. Permutaciones

Cuando las bolas no se reponen después de cada extracción, las probabilidades cambian a cada sucesiva prueba. Si la primera vez sale la bola 2 y no se de-

vuelve, la probabilidad de sacar 2 la segunda vez es cero, mientras que la probabilidad de sacar cualquier otra bola en particular sube de 1/10 a 1/9. Análogamente, si una determinada bola no se saca ni a la primera ni a la segunda vez, la probabilidad de sacarla a la tercera aumentará a 1/8.
La probabilidad de extraer el número 2 en la primera prueba y el 5 en la segunda es $1/10 \times 1/9 = 1/90$. También la probabilidad de sacar el número 5 en la primera prueba y el 2 en la segunda es 1/90. Cuando se considera el orden en que se extraen las bolas, se usa el término *permutación.* Si hay n objetos y se extraen r sin reposición, el número de permutaciones viene dado por la ecuación (2.1)*

$$\text{Número de permutaciones} = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.1}$$

El símbolo «!» se lee «factorial»; $n!$ representa el producto de todos los enteros positivos de 1 a n: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$. Así pues, el número de permutaciones de 10 bolas tomadas de 2 en 2 será $10!/8! = (10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1)/(8 \times 7 \times 6 \times \cdots \times 2 \times 1) = 10 \times 9 = 90$. La probabilidad de extraer una permutación determinada es 1/90, lo que concuerda con los cálculos anteriores. El número de las diferentes maneras en que pueden extraerse todas las bolas (las diez), usando la fórmula de permutación $n!/(n-r)!$, es $10!/0!$. Por definición, el valor de 0! es la unidad. El número de permutaciones, entonces, es $10 \times 9 \times \cdots \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$ y la probabilidad de extraer las 10 bolas en un orden determinado será 1/3 628 800, es decir, menos de 3 en 10 millones. La notación simbólica para las permutaciones es P_r^n y se interpreta así: número de permutaciones de n objetos tomados de r en r.

2.1.2. Combinaciones

Si no importa cuál de los números 2 ó 5 es extraído el primero, siempre que estas dos bolas sean extraídas, la correspondiente probabilidad puede hallarse de dos maneras distintas. Primero, puede multiplicarse la probabilidad de una permutación por el número de posibles permutaciones que representen éxito: $1/90 \times 2 = 1/45$. Esto equivale a sumar las probabilidades individuales de las permutaciones consideradas éxitos, puesto que son mutuamente excluyentes.
En segundo lugar, puede calcularse la probabilidad mediante el número de combinaciones. El número de combinaciones es el número de maneras en que algu-

* En los textos españoles, como los de Rey Pastor, se usa el nombre de *variaciones*, reservando la denominación de *permutaciones* al caso $r = n$. *(N. del T.)*

TABLA 2.2. Las 45 combinaciones binarias de 10 bolas.

1 y 2	1 y 7	2 y 4	2 y 9	3 y 7	4 y 6	5 y 6	6 y 7	7 y 9
1 y 3	1 y 8	2 y 5	2 y 10	3 y 8	4 y 7	5 y 7	6 y 8	7 y 10
1 y 4	1 y 9	2 y 6	3 y 4	3 y 9	4 y 8	5 y 8	6 y 9	8 y 9
1 y 5	1 y 10	2 y 7	3 y 5	3 y 10	4 y 9	5 y 9	6 y 10	8 y 10
1 y 6	2 y 3	2 y 8	3 y 6	4 y 5	4 y 10	5 y 10	7 y 8	9 y 10

nos objetos pueden tomarse de un grupo más grande sin tener en cuenta el orden. En nuestro ejemplo, hay 45 combinaciones diferentes de 2 bolas tomadas de un lote de 10. Estas combinaciones se enumeran en la tabla 2.2. Puede usarse la fórmula de las combinaciones para simplificar la enumeración. El número de combinaciones de n objetos tomados de r en r viene dada por la ecuación (2.2)

$$\text{Número de combinaciones} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{2.2}$$

Para el caso de 10 bolas tomadas de 2 en 2, esta ecuación da $10!/(2! \times 8!) = (10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 2 \times 1)/(2 \times 1 \times 8 \times 7 \times \cdots \times 2 \times 1)$, que se reduce a $(10 \times 9)/(2 \times 1) = 45$. Puesto que sólo existe una combinación de la segunda y la quinta bola, la probabilidad de extraer esta combinación es 1/45. El número de combinaciones de n objetos de n en n es evidentemente 1, y la fórmula nos lo confirma: $n!/r!\,(n-r)! = n!/(n! \times 0!) = n!/n! = 1$. La notación de las combinaciones es C_r^n y se lee: número de combinaciones de n objetos tomados de r en r.

La comparación de las fórmulas de las permutaciones y las combinaciones

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

muestra que el número de combinaciones es igual al número de permutaciones dividido por el factorial de r. Esto es lógico, puesto que $r!$ es el número de diferentes maneras en que pueden extraerse r objetos, es decir, el número de posibles ordenaciones de r objetos; y el número de combinaciones no tiene en cuenta el orden.

La fórmula de las combinaciones se usa también para calcular probabilidades de sucesos más complejos. El número de combinaciones que representan sucesos favorables se divide por el número total de combinaciones para determinar la probabilidad global. Es importante advertir que tanto la fórmula de las combinacio-

nes, ecuación (2.2), como la fórmula algo más sencilla de las permutaciones, ecuación (2.1), suponen que las unidades se extraen al azar *sin reposición*, de modo que el número posible de elecciones decrece a cada sucesiva extracción. También cambia con cada extracción, como antes dijimos, la probabilidad de extraer una unidad en particular. Tres ejemplos ilustrarán los cálculos y señalarán la diferencia entre probabilidades condicionales e independientes.*

1. Si en una caja hay ocho bolas blancas y seis bolas negras y se extraen cuatro bolas al azar, la probabilidad de sacar dos de cada color puede calcularse como sigue: El número de combinaciones de ocho objetos de dos en dos, C_2^8, es $8!/(2! \times 6!) = (8 \times 7 \times 6 \times \cdots \times 1)/(2 \times 1 \times 6 \times \cdots \times 1) = 28$; y el número de combinaciones de seis objetos de dos en dos es $6!/(2! \times 4!) = 15$. Estos números se multiplican para hallar el número de combinaciones de dos bolas blancas y dos negras extraídas de la caja: $28 \times 15 = 420$. El número total de combinaciones de catorce objetos de cuatro en cuatro es $14!/(4! \times 10!) = 1001$. Por lo tanto, la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas y dos negras de esta caja es $420/1001 = 0{,}42$. El lector puede verificar este resultado enumerando todas las posibles combinaciones en la forma indicada en la tabla 2.2 y señalando además cada bola como blanca o negra.

2. Si tenemos cuatro bolas rojas y cuatro verdes, la probabilidad de extraer dos de cada color es $(C_2^4 \times C_2^4)/C_4^8 = (6 \times 6)/70 = 0{,}514$, que es algo mayor que un medio. Por otra parte, supongamos que un matrimonio tiene cuatro hijos y supongamos que las probabilidades de niño y de niña son iguales para cada nacimiento. La probabilidad de dos niños y dos niñas es sólo 0,375.† La razón de estos dos resultados aparentemente contradictorios proviene de los efectos de un suceso en los dos casos diferentes. En el caso de las bolas de colores, al extraer cada bola cambian los porcentajes de las bolas rojas y verdes restantes, variando la probabilidad de extraer un color determinado a cada sucesiva extracción. Ésta es una probabilidad condicional. En el caso de los hijos, la probabilidad de niño o de niña no resulta afectada por el sexo de los hijos precedentes. Ésta es una probabilidad independiente.

3. La probabilidad de sacar los cuatro ases retirando cinco cartas de una baraja de 52 cartas es muy pequeña. El número total de combinaciones de 52 cartas de 5 en 5 es $C_5^{52} = 52!/(5! \times 47!) = 2\,598\,960$. Puesto que hay cuatro ases y 48 otras cartas, el número de combinaciones de cuatro ases y una de las

* Los ejemplos muestran el uso de la distribución *hipergeométrica*, también llamada *ley de probabilidades compuestas.*

† Las probabilidades de varias combinaciones de niños y niñas son: cuatro niños: $(1/2)^4(1/2)^0 = 1/16$; tres niños y una niña: $4(1/2)^3(1/2)^1 = 1/4$; dos niños y dos niñas: $6(1/2)^2(1/2)^2 = 3/8$; un niño y tres niñas: 1/4; y cuatro niñas: 1/16. La probabilidad independiente, cuando hay dos posibles resultados (en fiabilidad los resultados son éxito o fallo), se trata más completamente en el párrafo 3.2 sobre la distribución binomial.

otras cartas será $C_4^4 \times C_1^{48} = 4!/(4! \times 0!) \times 48!/(1! \times 47!) = 1 \times 48 = 48$. La probabilidad es 48/2 598 960 = 0,00001847. La probabilidad de sacar las cuatro cartas de cualquier valor dado es 13 veces mayor, es decir, 0,0002401, que sigue siendo un número muy pequeño. La probabilidad de tener dos manos seguidas con cuatro cartas del mismo valor es $0{,}0002401^2 = 0{,}0000000576$. Si ocurriera un suceso tan improbable, sospecharíamos que las cartas (o los jugadores que han dado las manos) no eran «imparciales».

2.2. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Los párrafos 2.2 y 2.3 tratan de medidas descriptivas de las distribuciones. Pueden aplicarse a funciones discretas o continuas, aunque suelen considerarse asociadas a las segundas. Hay cierto número de medidas de tendencia central, pero sólo una de ellas —la media aritmética— se usa extensamente en fiabilidad. Otras dos —la mediana y la moda— tiene aplicación más limitada. Otras medidas como la media geométrica y la media armónica se usan muy rara vez.

2.2.1. La media

La media aritmética, comúnmente llamada *media* o *promedio,* se define como el cociente de la suma de los valores de las mediciones individuales por el número de mediciones. Si hay cinco mediciones, X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5, la media o promedio es igual a la suma de las mediciones dividida por 5, $\overline{X} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4, + X_5)/5$. El símbolo $\overline{X}$ se suele leer «X barra» y designa la media aritmética de los valores de la muestra. La expresión general de la media de un grupo de mediciones viene dada por

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \tag{2.3}$$

donde el símbolo $\Sigma_{i=1}^{n}$ se lee «suma de todas las mediciones de 1 a n».

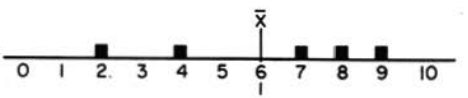


FIG. 2.1. Representación física de la media aritmética.

La media puede interpretarse físicamente como el punto de equilibrio o centro de gravedad de los valores individuales; el primer momento respecto de la media es cero. Si en el ejemplo los cinco valores individuales son 2, 4, 7, 8 y 9, su suma es 30 y su media aritmética $30/5 = 6$. Podemos imaginar un tablero sin peso dividido en segmentos iguales, como en la figura 2.1. Se colocan pesos iguales en las marcas segunda, cuarta, séptima, octava y novena. El tablero se equibrará en la sexta marca, porque la suma algebraica de las distancias de los pesos al punto 6 es cero.

2.2.2. La mediana

La segunda medida de tendencia central es la *mediana*. La mediana se define como el valor tal que la mitad de las mediciones son menores que él y la otra mitad mayores. También se define como el porcentil 50 de la distribución.* En el anterior conjunto de cinco valores, el valor de la mediana es 7. Cuando hay un número impar de mediciones, la mediana es una de las mediciones. Cuando hay un número par, la mediana equidista de las dos mediciones centrales, a menos que éstas sean iguales, en cuyo caso la mediana es también igual a ellas. La mediana se usa más en la renta y otras estadísticas parecidas que en fiabilidad, aunque el concepto se emplea algunas veces y su conocimiento es necesario para algunas aplicaciones. Por ejemplo, un contraste de bondad de ajuste compara las frecuencias muestrales con las frecuencias teóricas a diversos porcentiles, incluyendo el porcentil 50.

2.2.3. La moda

La *moda* es el valor más frecuente. Su uso es bastante limitado, aunque un método para normalizar distribuciones asimétricas descrito en el capítulo 5 utiliza este parámetro. La mayor parte de las distribuciones tienen una sola moda y la existencia de más de una suele indicar un cambio de cierta condición de entrada durante la generación de los datos o la presencia de más de un origen para la población, como, por ejemplo, dos máquinas diferentes haciendo la misma pieza. (Las definiciones de media y mediana limitan automáticamente cada una de estas medidas de tendencia central a un valor.)

* Un porcentil es el valor por debajo del cual cae un determinado porcentaje de una distribución de valores. Así, el 10 % de los valores caerá bajo el 10 porcentil, el 50 % bajo el 50 porcentil, etc.

2.3. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

La dispersión o variación es una característica propia de todas las poblaciones. Es sólo el grado de variación el que difiere. Algunos parámetros, como la duración o vida, tienen mucha dispersión, mientras las variaciones de otros parámetros pueden ser tan pequeñas que se necesiten mediciones de enorme precisión para detectarlas. Si no hubiera variaciones sería teóricamente posible producir componentes y sistemas que nunca fallasen y, con ello, conseguir una fiabilidad perfecta. Incluso la mayoría de los fallos producidos por el desgaste pueden atribuirse en definitiva a diminutas variaciones de los materiales o de los acabados. Uno de los principales motivos que obligaron a organizar las actividades de la fiabilidad fue la existencia de variaciones, y muchas de las funciones matemáticas se ocupan de la detección de variaciones, su medición y las relaciones entre ellas.

2.3.1. El recorrido

La medida de dispersión más sencilla es el *recorrido*, que se define como la diferencia entre el mayor y el menor de los valores medidos. Aunque el recorrido se usa mucho en control de calidad, para la mayoría de las actividades de fiabilidad se necesitan medidas más eficaces. El recorrido se usa algunas veces para establecer criterios de aceptación basados en requisitos de fiabilidad cuando los tamaños de muestra son muy pequeños y otras medidas pierden su precisión.

2.3.2. La desviación típica

La medida de dispersión más corriente es la *desviación típica* σ (letra griega sigma). Se halla extrayendo la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones de todos los valores individuales respecto de la media aritmética, como indica la ecuación (2.4).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n}} \tag{2.4}$$

Por esta razón es a veces llamada desviación raíz del cuadrado medio. La ecuación (2.4*a*) da una fórmula equivalente a la anterior

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i^2)}{n} - \bar{X}^2} \tag{2.4a}$$

Por la definición de momentos * sabemos que la desviación típica es la raíz cuadrada del segundo momento respecto de la media. Este segundo momento se llama *varianza*. Puesto que las unidades de la varianza son de segundo orden (cuadrados), se prefiere la desviación típica, medida en las mismas unidades que los datos. Es una medida directa de variabilidad o dispersión. Las dispersiones de dos distribuciones pueden compararse directamente comparando sus desviaciones típicas. Si la desviación típica de una distribución es doble que la de la otra, la media cuadrática de las desviaciones respecto de la media de la primera es doble que la de la segunda. De hecho, el único requisito para una comparación directa es que las unidades de medida sean las mismas. No es necesario que las medias sean iguales y en la mayoría de los casos (por ejemplo, esfuerzos y resistencias) no lo son.

Como ejemplo de cálculo, consideremos diez filtros cuyas vidas (basadas en mediciones de caída de presión) hayan sido 17,5, 10,4, 12,8, 14,4, 20,0, 11,9, 16,3, 14,6, 21,7 y 15,4 días. Es conveniente, aunque no necesario, ordenar estos valores en sentido creciente, como en la tabla 2.3.

La desviación típica, según la ecuación (2.4), es

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{111.62}{10}} = 3{,}34 \text{ días}$$

TABLA 2.3. Tiempos de vida de 10 filtros.

Tiempos individuales	Diferencias respecto de la media	Cuadrados de las diferencias
10,4	- 5,1	26,01
11,9	- 3,6	12,96
12,8	- 2,7	7,29
14,4	- 1,1	1,21
14,6	- 0,9	0,81
15,4	- 0,1	0,01
16,3	0,8	0,64
17,5	2,0	4,00
20,0	4,5	20,25
21,7	6,2	38,44
$\Sigma = 155{,}0$		$\Sigma = 111{,}62$
$\bar{X} = 15{,}50$		

* El k-ésimo momento respecto de la media es $(1/n)\Sigma(X_i - \bar{X})^k$ y el k-ésimo momento respecto del origen es $(1/n)\Sigma(X_i^k)$. La media, pues, es el primer momento respecto del origen.

(la misma unidad de medida que para los datos y la media). Es interesante observar que los valores próximos a la media contribuyen muy poco a la suma de cuadrados, mientras que los valores muy alejados afectan significativamente a la desviación típica.

2.3.3. Poblaciones y muestras

Hasta ahora no hemos distinguido entre medias y desviaciones típicas de muestras y las correspondientes a poblaciones. Se ha usado el símbolo $\bar{X}$ para denotar la media en ambos casos. Sin embargo, es costumbre designar por $\bar{X}$ sólo la media muestral, usando la letra griega μ (mu) para la media poblacional. μ se calcula como $\bar{X}$:

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

pero ahora n representa la totalidad de las unidades de la población y no solamente las unidades de la muestra. Así pues, μ es el valor exacto de la media de la población, mientras que $\bar{X}$ es una estimación de la media poblacional basada en cierta muestra particular. La precisión de la estimación X aumenta al crecer el tamaño de la muestra. La precisión puede medirse mediante la *desviación típica* $\sigma_{\bar{X}}$ *del estimador* X, que se relaciona con la desviación típica de la población y con el tamaño de la muestra, así:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2.5}$$

Cuando se cuadruplica el tamaño muestral se divide por 2 la desviación típica de las medias muestrales, siendo en consecuencia $\bar{X}$ un estimador de μ mejor.
La letra griega σ se ha usado para designar la desviación típica, cuya fórmula dada por la ecuación (2.4) repetimos aquí:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n}} \tag{2.4}$$

Como en el caso de la media, se hace una distinción entre la desviación típica de la población y la de la media. La desviación típica poblacional se designa

por σ. (Es práctica aceptada usar letras griegas para los parámetros de la población y letras latinas para los estadísticos muestrales.*) Se calcula como indica la ecuación (2.4) y define exactamente la media cuadrática de las desviaciones de la población.

La desviación típica muestral se designa por s y se calcula usando $n - 1$ en vez de n en el denominador de la expresión, representando $n - 1$ el número de unidades de la muestra menos una:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \tag{2.6}$$

Una explicación del uso de $n - 1$ en vez de n en la ecuación (2.6) puede verse en Freeman, párrafo 1.36.† Es suficiente a efectos de la fiabilidad (y para la mayor parte de las demás funciones estadísticas) recordar que debe usarse $n - 1$ en vez de n para calcular la desviación típica de una muestra. Adviértase que al aumentar el tamaño de la muestra la razón $(n - 1)/n$ tiende a la unidad. La precisión del estimador de la desviación típica aumenta al crecer n, como hemos visto que aumenta la precisión del estimador de la media.

2.3.4. Otras medidas descriptivas

Son dignas de mención otras dos medidas descriptivas de una población: el *coeficiente de asimetría* y el *coeficiente de apuntamiento o kurtosis*. El coeficiente de asimetría, dado por la ecuación (2.7), describe, como su nombre indica, el mayor o menor grado de asimetría de la distribución.

$$\text{Coeficiente de asimetría} = \frac{(1/n)\Sigma(X_i - \bar{X})^3}{\sigma^3} \tag{2.7}$$

Un coeficiente de asimetría nulo corresponde casi siempre a una distribución simétrica. Es posible (pero raro) que una distribución asimétrica tenga nulo el coeficiente de asimetría. Así definido, el coeficiente de asimetría es adimensional (un número puro), no dependiendo ni de la unidad usada ni del origen. Un valor

* Una característica medible de una población se llama parámetro; un valor calculado a partir de una muestra se llama *estadístico*.

† H. A. Freeman, «Industrial Statistics», John Wiley & Sons, Inc., New York, 1942.



FIG. 2.2. Distribuciones asimétricas.
(a) negativa: coeficiente de asimetría < 0. (b) positiva: coeficiente de asimetría > 0.

negativo indica que la distribución tiene una cola mayor a la izquierda (fig. 2.2*a*), mientras que un valor positivo denota una distribución con una cola mayor a la derecha (fig. 2.2*b*). En el primer caso se usan las expresiones «asimetría negativa» o «asimetría a la izquierda» y en el segundo, «asimetría positiva» o «asimetría a la derecha». Los datos de la tabla 2.3 indican una ligera asimetría positiva.
Un método más simple de obtener una medida de asimetría consiste en dividir la diferencia entre la media y la moda (o la mediana) por la desviación típica, como indica la ecuación (2.8):

$$\text{Asimetría} = \frac{\text{media} - (\text{moda o mediana})}{\sigma \text{ o } s} \tag{2.8}$$

Puesto que la asimetría se usa rara vez, no existen comparaciones fáciles de la utilidad de ambos métodos. Se recomienda usar el método más sencillo cuando se necesita una medida de asimetría. Por ser más fácil realizar predicciones y valoraciones si las variables se distribuyen normalmente * que si sus distribuciones son asimétricas, se han desarrollado métodos para transformar los datos de forma que las distribuciones sean normales o casi-normales. Algunos de estos métodos se tratan en el capítulo 5.
La otra medida descriptiva es el coeficiente de kurtosis (apuntamiento), definido así:

$$\text{Coeficiente de kurtosis} = \frac{(1/n)\Sigma(X_i - \bar{X})^4}{\sigma^4} \tag{2.9}$$

La distribución normal tiene un coeficiente de kurtosis igual a 3. Si dos distribuciones tienen la misma desviación típica, la que tenga mayor coeficiente de kurtosis será en general la más apuntada. Puesto que la kurtosis se usa rara vez en fiabilidad, no la trataremos más.

* La distribución normal o gaussiana se trata en el párrafo 3.5.

2.4. MUESTREO Y CONFIANZA

En el caso de sucesos discretos, hemos indicado que, al extraer muestras al azar, los estadísticos (parámetros) calculados a partir de las muestras pueden diferir considerablemente de los de la distribución poblacional. En el ejemplo de una familia con cuatro hijos, la probabilidad de que tres hijos sean del mismo sexo y un solo hijo del otro era del 50 %, mientras que la probabilidad de que sean dos hijos de cada sexo era solamente del 37,5 %. Puesto que sabemos que hay aproximadamente igual número de varones que de hembras, no cometeríamos el error en nuestra estimación de suponer que la razón es 3:1 si eligiésemos sólo una familia y ésta resultase tener esta razón de sexos. Análogamente, con cuatro bolas rojas y cuatro verdes, esperaríamos, al tomar dos al azar, sacar por lo general una de cada color. Pero no nos sorprendería demasiado sacar dos bolas del mismo color.

De forma semejante, podríamos tomar medidas reales de dimensiones o características de actuación de muestras y calcular las medias y desviaciones típicas. Podríamos esperar que estos estadísticos fueran representativos de los parámetros de la población de la que se habían extraído las muestras, pero no nos sorprenderían las diferencias entre los valores de los estadísticos muestrales y los valores de los parámetros poblacionales, particularmente si las muestras eran pequeñas. También esperaríamos que el valor de cualquier otro estadístico (por ejemplo, moda o coeficiente de asimetría), calculado a partir de una muestra difiriese del valor del correspondiente parámetro de la distribución madre.

Cuando conocemos exactamente la naturaleza de la distribución y los valores de los parámetros que la describen, podemos predecir la distribución de las muestras aleatorias. No sólo somos capaces de calcular la probabilidad de que la muestra tenga aproximadamente los mismos valores de los parámetros, sino que también podemos determinar matemáticamente la probabilidad de que los estadísticos muestrales difieran de los parámetros de la población en cualquier cantidad que especifiquemos. Es decir, podemos calcular la probabilidad de tener cuatro hijos del mismo sexo, o de sacar cuatro bolas rojas, o de extraer al azar una muestra cuya media sea 6 siendo 8 la media de la población, o de hallar una desviación típica muestral de 5 días cuando la desviación típica de la población es 3,3 días.

En fiabilidad, como en control de calidad, en operaciones de ensayo y en otras actividades relacionadas con la evaluación de un producto o proceso, nos suele preocupar el problema inverso. En vez de calcular la probabilidad de obtener muestras con determinadas características o valores estadísticos de una población conocida, queremos estimar las características de la población a partir de un conjunto de datos muestrales. Reconocemos que las muestras no siempre presentan imágenes reales, es decir, que no son siempre representativas de la población. Las pequeñas muestras pueden variar mucho entre sí. Al aumentar

el tamaño muestral, habrá cada vez menores diferencias entre las muestras extraídas de la misma población.

Aunque no podemos estar seguros de que una muestra sea representativa, podemos atribuir un *grado* de «seguridad» a los resultados muestrales. Este «grado de seguridad» se llama *confianza*, y puede definirse como el *nivel de certeza que puede atribuirse a las conclusiones basadas en los resultados del muestreo.* Este nivel de certeza puede determinarse para cualquiera de las características que hemos presentado o nos son familiares: el porcentaje defectuoso de una población, la probabilidad de que la media de una distribución esté entre dos límites dados, o la probabilidad de que la verdadera fiabilidad tenga como mínimo cierto valor. La confianza dependerá de la naturaleza de los datos, de los parámetros que se estiman, de los niveles de calidad o fiabilidad elegidos y de la cantidad disponible de datos muestrales. Durante gran parte de este texto trataremos directamente de la confianza, especialmente en los capítulos 3, 4, 13 y 14.

LECTURAS ADICIONALES

ARINC Research Corporation: «Reliability Engineering», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

Bazovsky, I.: «Reliability Theory and Practice», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Bureau of Naval Weapons, Chief of: «Handbook: Reliability Engineering», U.S. Government Printing Office, 1964.

Calabro, S. R.: «Reliability Principles and Practices», McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

Chorafas, D. N.: «Statistical Processes and Reliability Engineering», D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1960.

Dixon, W. J., y F. J. Massey, Jr.: «Introduction to Statistical Analysis», 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.

Dummer, G. W., y N. B. Griffin: «Electronics Reliability: Calculation and Design», Petrgamon Press, Ltd., London, 1966.

Freeman, H. A.: «Industrial Statistics», John Wiley & Sons, Inc., New York, 1942.

Grant, E. L.: «Statistical Quality Control», 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

Hoel, P. G.: «Introduction to Mathematical Statistics», John Wiley & Sons, Inc., New York, 1947.

Ireson, W. G.: «Reliability Handbook», McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

Lloyd, D. K., y M. Lipow: «Reliability: Management, Methods and Mathematics», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

Mood, A. M.: «Introduction to the Theory of Statistics», McGraw-Hill Book Company, New York, 1950.

Munroe, M. E.: «The Theory of Probability», McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

Shooman, M. L.: «Probabilistic Reliability: An Engineering Approach», McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

3

Distribuciones usadas en fiabilidad

3.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo describe brevemente las distribuciones que con más frecuencia se usan en fiabilidad. Se explican sus características básicas en conjunción con sus aplicaciones a los análisis de fiabilidad. La distribución usada para sucesos o probabilidades de tipo discreto —la binomial— se presenta en primer lugar por ser la más próximamente relacionada con los aspectos de la probabilidad examinados en el capítulo 2. Luego se estudian la distribución de Poisson y la exponencial negativa porque, como veremos, se desprenden de la binomial.

La distribución normal, que caracteriza muchos fenómenos naturales y producidos por el hombre, se presenta a continuación, junto con una distribución con ella relacionada —la *t* de Student— usada para obtener límites de confianza en la estimación de medias. Se introduce seguidamente la distribución ji-dos porque, aunque se usa para analizar valores discretos, es el fundamento de otras distribuciones usadas para evaluar la variabilidad. Estas distribuciones se presentan a continuación.

La distribución más compleja usualmente utilizada en fiabilidad es la de Weibull, que sólo se trata brevemente en este capítulo. Un tratamiento más completo se deja para el capítulo 14, en el que se da un ejemplo detallado. El tema final es la desigualdad de Tchebycheff, una especie de «último recurso» que sólo se emplea cuando la información disponible es mínima.

La familiaridad con estas distribuciones y sus aplicaciones será de gran valor cuando investiguemos principios de fiabilidad y medios para evaluar la fiabilidad obtenida y alcanzar objetivos de fiabilidad.

3.2. LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución binomial es una de las más sencillas, aunque se usa para calcular la fiabilidad de sistemas redundantes complejos. Es la que suele relacionarse con problemas de probabilidad y juegos de azar. El binomio $(a + b)^n$ puede desarrollarse así:

$$a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots + b^n$$

La distribución binomial es aplicable cuando un fenómeno sólo puede dar lugar a dos estados o resultados, es decir, cuando un componente o sistema tiene o no determinada característica, cumple o no cumple los requisitos, funciona o falla, etc. Si sustituimos a y b por p y q, siendo p la probabilidad de que ocurra un suceso (que un componente sea bueno) y q la probabilidad de que no ocurra dicho suceso, que es el suceso complementario (que el componente sea defectuoso), tendremos $p + q = 1$ y $(p + q)^n = 1$. De aquí que

$$p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)p^{n-2}q^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)p^{n-3}q^3}{3!} + \cdots + q^n = 1 \qquad (3.1)$$

La expresión matemática del término r-ésimo del desarrollo viene dada por la ecuación (3.2). En *esta* ecuación, el primer término p^n se llama término cero $(r = 0)$.

$$\text{Término } r\text{-ésimo} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\, p^{n-r}q^r \qquad (3.2)$$

donde n es el número total de sucesos (unidades) y r el número de sucesos desfavorables (defectuosos).

A continuación podemos examinar el significado de cada término del desarrollo del primer miembro de la ecuación (3.1). Supongamos que hay n unidades idénticas de un componente, que la probabilidad de que una unidad sea buena es p