PT
PT*

Lionel Vidal
Régis Bourdin
Ludovic Menguy
Vincent Parmentier
Jean-Lou Reynier
Nicolas Tancrez
Sylvie Zanier

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique PT/PT*

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Lionel VIDAL

Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

Régis BOURDIN

Professeur au lycée Sainte-Marie (Caen)

Ludovic MENGUY

Professeur au lycée Montesquieu (Le Mans)

Vincent PARMENTIER

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Jean-Lou REYNIER

Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

Nicolas TANCREZ

Professeur au lycée Saint-Louis (Paris)

Sylvie ZANIER

Enseignante à l'université J. Fourier (Grenoble)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « un scientifique » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

ISBN 9782340-066854
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie, de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1. Champ électrostatique 1
2. Potentiel électrostatique 27
3. Magnétostatique 67
4. Équations de Maxwell 97
5. Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS 127
6. Ondes électromagnétiques dans le vide 151
7. Propagation dans un milieu conducteur 185
8. Réflexion d'OPPM à la surface d'un conducteur 221
9. Généralités sur les ondes et interférences lumineuses 255
10. Dispositifs interférentiels 295
11. Statique des fluides 357
12. Description d'un fluide en écoulement 377
13. Fluides visqueux et nombre de Reynolds 415
14. Énergétique des écoulements en conduite 441
15. Corps pur sous deux phases 475
16. Diffusion thermique 521
17. Thermodynamique des systèmes ouverts 571
18. Thermodynamique industrielle 605
19. Stabilité des systèmes linéaires 651
20. Montage à rétroaction : exemple de l'ALI 685
21. Oscillateurs électroniques 717
22. Traitement du signal : de l'analogique au numérique 749

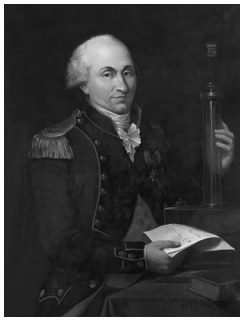
Annexes 785

1. Formulaire d'analyse vectorielle 786
2. Éléments d'analyse spectrale 790
3. Le minimum de savoir-faire en mathématiques 796
4. Constantes fondamentales et ordres de grandeur classiques 802
5. Calculs d'incertitudes 803

Index 809

Chapitre 1
Champ électrostatique

UN SCIENTIFIQUE



Charles Coulomb (1736-1806) embrasse une carrière militaire après des études à l'École du Génie de Mézières. Chargé de construire ou de renforcer des forts et des ouvrages portuaires, il utilise le calcul différentiel pour évaluer la résistance des maçonneries mais aussi celle des cordages.

Ce n'est que tardivement qu'il se tourne vers la physique, discipline dans laquelle il est un expérimentateur très rigoureux. Il contribue à établir les lois fondamentales de l'électrostatique.

Un peu d'histoire

Pour Benjamin Franklin (1706-1790) l'électricité est un fluide qui prend deux états, positif et négatif et il énonce le principe de conservation de la charge électrique. Il comprend que l'éclair est une simple décharge électrique ce qui le conduit à l'invention du paratonnerre.

Grâce à des expériences précises et rigoureuses, Charles Coulomb étudie la distribution des charges électriques sur une surface et établit les lois qui régissent l'attraction et la répulsion des charges électriques et des pôles magnétiques. Il construit en particulier une balance électrique grâce à laquelle il postule, de manière expérimentale, que l'attraction des charges électriques est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance.

Six ans après le décès de Coulomb, Siméon-Denis Poisson (1781-1840) étudie la répartition des charges électriques à la surface d'un conducteur et confirme cette propriété.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- La loi de Coulomb
- Les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge et les conséquences pour le champ électrostatique
- Le théorème de Gauss (pour le champ électrostatique et pour le champ gravitationnel) sous sa forme intégrale et locale
- La capacité d'un condensateur plan

Ce qu'il faut savoir faire

- Déterminer la direction d'un champ électrostatique, à partir des symétries de la distribution de charges
- Déterminer les coordonnées spatiales dont dépendent les composantes du champ, à partir des invariances de la distribution de charges
- Expliciter un champ électrostatique en utilisant le théorème de Gauss
- Trouver des informations sur le champ par lecture d'une carte des lignes de champ

■■ Résumé de cours

■ Interaction électrique et champ

❑ Charges électriques

La charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque, extensive et conservative, qui caractérise le comportement de la matière vis-à-vis de l'interaction électromagnétique ; elle peut être positive ou négative.

Elle est quantifiée : toutes les charges isolables sont multiples de la charge élémentaire $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C . La charge électrique est répartie de manière discontinue au niveau microscopique, là où sont les particules qui peuvent être considérées comme ponctuelles.

❑ Loi de Coulomb

En électrostatique, on s'intéresse à des charges immobiles les unes par rapport aux autres. Alors les forces exercées par des charges q_1 et q_2 l'une sur l'autre sont données par la loi de Coulomb :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}}.$$

Elles sont attractives si les charges sont de signe opposé ($q_1\, q_2 < 0$) et répulsives si les charges sont de même signe ($q_1\, q_2 > 0$).

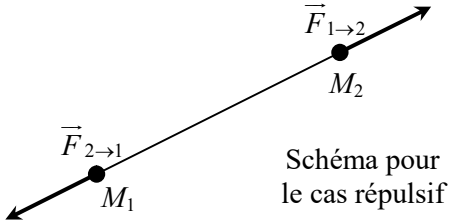


Schéma pour le cas répulsif

La constante ε_0 est la permittivité diélectrique du vide et vaut $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1} .

❑ Notion de champ électrostatique

On peut décrire indirectement l'interaction électrique en faisant intervenir la notion de champ :

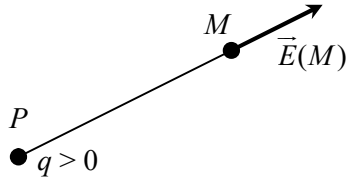
– des charges immobiles créent en un point M un champ électrostatique $\vec{E}(M)$;

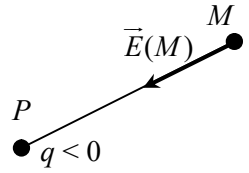
– une charge q placée au point M subit alors une force électrique $\boxed{\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)}$.

❑ Champ créé par une charge ponctuelle

Le champ créé en un point M par une charge q immobile en un point P est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$



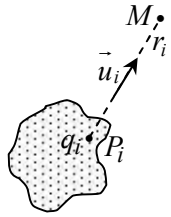


❑ Principe de superposition, champ créé par une distribution discrète

Le champ créé par une charge est indépendant de la présence d'autres charges. De plus les forces s'additionnent vectoriellement, donc le champ créé par un ensemble de charges est la

somme vectorielle des champs créés par chaque charge individuellement. Ainsi le champ créé en un point M par un ensemble de charges ponctuelles q_i situées aux points P_i est :

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,\vec{u}_i}{r_i^2}}$$ où $\vec{u}_i=\dfrac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|}$ et $r_i=\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|$.



■ Champ créé par une distribution continue de charges

❑ Distribution volumique

Si $\mathrm{d}\tau(P)$ est un volume élémentaire contenant la charge $\mathrm{d}q(P)$ à l'instant t autour du point P d'une distribution de charge (D), on définit la densité volumique de charge par $\boxed{\rho(P)=\dfrac{\mathrm{d}q(P)}{\mathrm{d}\tau(P)}}$ en $\boxed{\mathrm{C\cdot m^{-3}}}$. La charge totale de la distribution est alors obtenue par : $Q=\displaystyle\int_D \rho(P)\,\mathrm{d}\tau(P)$, où $\displaystyle\int_D$ désigne ici la triple sommation continue sur (D).

Remarque

La densité volumique $\rho(P)$ est définie à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire à une échelle de dimension assez faible à l'échelle macroscopique pour qu'elle soit localement représentative du milieu et de dimension suffisamment grande à l'échelle microscopique pour que la notion de moyenne ait un sens. Ainsi, $\rho(P)$ est une grandeur locale et moyennée. À cette échelle, la distribution est continue (l'aspect corpusculaire caractéristique de l'échelle atomique est lissé par le processus de moyenne), d'où l'usage de sommes continues.

❑ Distribution surfacique

La distribution surfacique est la limite d'une réalité volumique où les charges sont réparties sur une petite épaisseur a avec une densité volumique de ρ, la densité surfacique correspondante est, si la distribution est uniforme, $\sigma=\lim\limits_{a\to 0}\rho a$. La charge portée par une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ centrée sur P s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}q=\sigma(P)\mathrm{d}S}$, où $\sigma(P)$ est la **densité surfacique de charge** au point P.

❑ Distribution linéique

C'est la limite d'une réalité volumique « filiforme » lorsque sa section tend vers zéro.

La charge portée par un élément de longueur $\mathrm{d}l$ centré sur P s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}q=\lambda(P)\mathrm{d}l}$, où $\lambda(P)$ est la **densité linéique de charge** au point P.

❑ Correspondance entre les éléments de charge

Les éléments de charges dans les descriptions volumique, surfacique et linéique sont liés par :

$\boxed{\mathrm{d}q=\rho\,\mathrm{d}\tau=\sigma\,\mathrm{d}S=\lambda\,\mathrm{d}l}$.

■ Symétries de la distribution de charges et du champ

❑ Principe de Curie

Le principe de symétrie de Curie postule que « les effets ont au moins les symétries des causes ». Appliqué à l'électrostatique, ce principe implique donc que le champ électrostatique a au moins les mêmes symétries que la distribution de charges.

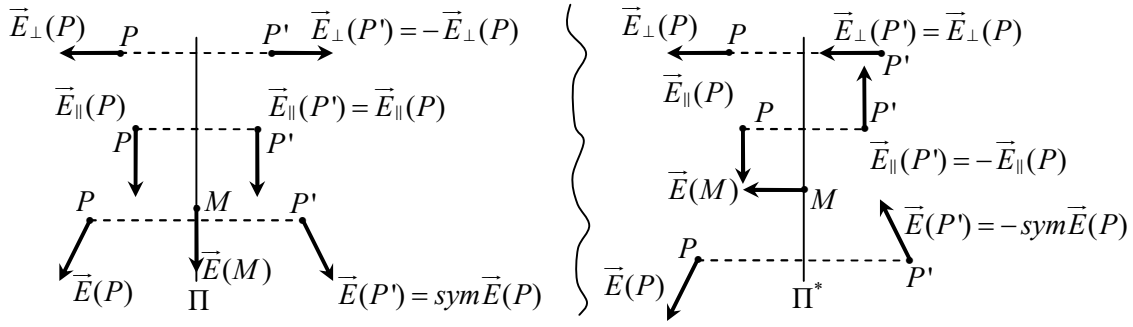
❑ Plans de symétrie et d'antisymétrie

Plan de symétrie

Un plan Π est plan de symétrie d'une distribution volumique de charges si, quels que soient les points P et P' symétriques par rapport à Π, $\rho(P') = \rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan de symétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est le symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont égales et celles orthogonales au plan sont opposées.

En particulier, *en un point M d'un plan de symétrie, le champ est contenu dans ce plan.*



Plan d'antisymétrie

Un plan Π^* est plan d'antisymétrie d'une distribution volumique de charges si, pour tous points P et P' symétriques par rapport à Π^*, $\rho(P') = -\rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan d'antisymétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont opposées et celles orthogonales au plan sont égales.

En particulier, *en un point M d'un plan d'antisymétrie, le champ est orthogonal à ce plan.*

⇨ **Méthode 1.1. Comment déterminer la direction du champ ?**

❑ Invariances

Invariance par translation

Si la distribution de charges est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un axe (symétrie de révolution)

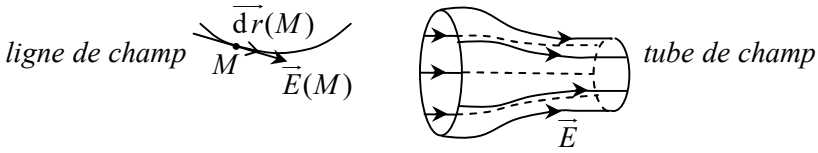
Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un point (symétrie sphérique)
Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un point, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc d'aucune coordonnée angulaire.

⇨ Méthode 1.2. Comment déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ ?

■ Lignes et tubes de champ

Une **ligne de champ** de $\vec{E}$ est une courbe tangente au champ $\vec{E}$ en chacun de ses points.
Équation d'une ligne de champ : elle est obtenue en écrivant que $\vec{E}$ est localement tangent à un élément $\mathrm{d}\vec{r}(M)$ de la ligne de champ au point M, c'est-à-dire en explicitant le fait que $\vec{E}(M) \wedge \mathrm{d}\vec{r}(M) = \vec{0}$ dans le système de coordonnées adapté aux symétries du problème.
Un plan de symétrie contient entièrement une infinité de lignes de champ.
Un plan d'antisymétrie est orthogonal aux lignes de champ en chacun de ses points.

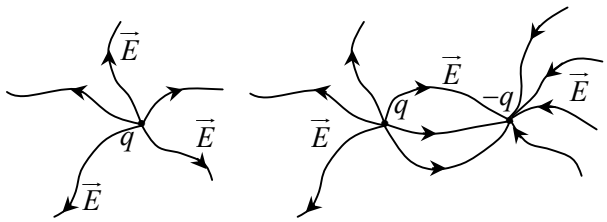


Un **tube de champ** est une surface (ouverte) formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée. On peut le fermer à ses extrémités pour former une surface fermée.

⇨ Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?

❑ Topographie des lignes de champ

L'équation locale de (M.G) traduit le fait que $\vec{E}$ est à divergence non nulle en présence de charges c'est-à-dire de monopôles électrostatiques. Les lignes de champs de $\vec{E}$ divergent à partir du point P vers l'infini si la charge est positive et convergent vers P depuis l'infini si elle est négative. De façon plus générale, il apparaît que $\vec{E}$ diverge en partant de charges positives et converge vers des charges négatives comme le montre la cartographie des lignes de champ ci-dessous.



■ Théorème de Gauss

❑ Flux du champ électrostatique

Le flux du champ électrostatique au travers d'une surface Σ est par définition :

$$\Phi(\vec{E})_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n}\,.$$

$\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal (localement) à la surface Σ. Le choix du sens de $\vec{n}$ revient à orienter la surface, en fonction de l'orientation de son contour.

⇨ **Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?**

Si la surface n'est pas plane, $\vec{n}$ n'est pas partout le même mais il est toujours dirigé du même côté de la surface.

Pour une surface fermée (entourant complètement un certain volume), $\vec{n}$ est dirigé soit vers l'extérieur de la surface (on parle alors de flux sortant), soit vers l'intérieur (flux entrant).

❑ Théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique au travers d'une surface fermée Σ est égal à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface, divisée par la constante ε_0 :

$$\boxed{\oiint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}.$$

⇨ **Méthode 1.4. Utiliser le théorème de Gauss**

❑ Formulation locale du théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss (M.G) : $\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ traduit localement le théorème de Gauss.

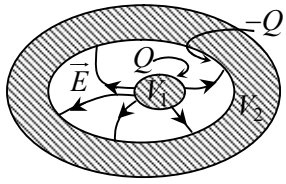
Remarque

Le théorème de superposition pour le champ découle de la linéarité de cette équation locale liant source et champ.

■ Condensateur

❑ Notion de condensateur

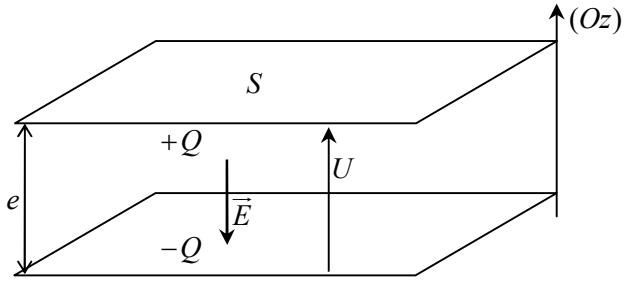
Deux conducteurs en regard, portés à des potentiels différents, forment un condensateur lorsque toutes les lignes de champ partant de la surface du conducteur de plus haut potentiel arrivent sur celle de plus bas potentiel. Les deux surfaces en regard, dites armatures du condensateur, portent alors des charges opposées. Cette définition impose dans la pratique que l'un des conducteurs est creux et entoure totalement l'autre. Dans le cas contraire, les **effets de bords doivent être négligés**.



$V_1 > V_2$

❑ Description et modélisation

Un condensateur plan est constitué de deux surfaces planes conductrices appelées armatures, placées l'une en face de l'autre et séparées par un isolant. On note S la surface des armatures et e la distance qui les sépare. On considère ici que l'isolant est le vide.



Lorsque le condensateur est chargé, ses armatures portent des charges égales en valeur absolue et de signe opposé $-Q$ et $+Q$, réparties uniformément sur les armatures avec des densités surfaciques $\pm\sigma = \pm\dfrac{Q}{S}$. Dans le cas où la distance entre les armatures est très inférieure à leurs dimensions, on peut modéliser le condensateur chargé par deux plans infinis uniformément chargés. Le champ électrostatique entre les armatures a pour expression :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z}}.$$

À l'extérieur des armatures : $\vec{E} = \vec{0}$.

❑ Capacité

La capacité d'un condensateur est le rapport entre la charge portée par l'armature positive et la différence de potentiel entre les armatures : $\boxed{C = \dfrac{Q}{U}}$.

Pour un condensateur plan : $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$.

❑ Théorème de Gauss pour le champ de gravitation

La loi de Coulomb et la loi de la gravitation en physique classique ont des expressions tout à fait analogues. On peut donc transposer les notions vues en électrostatique, et notamment le théorème de Gauss, aux forces de gravitation. Il suffit pour cela de remplacer les charges par les masses et la constante $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$: $\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = -4\pi G M_{\text{int}}}$.

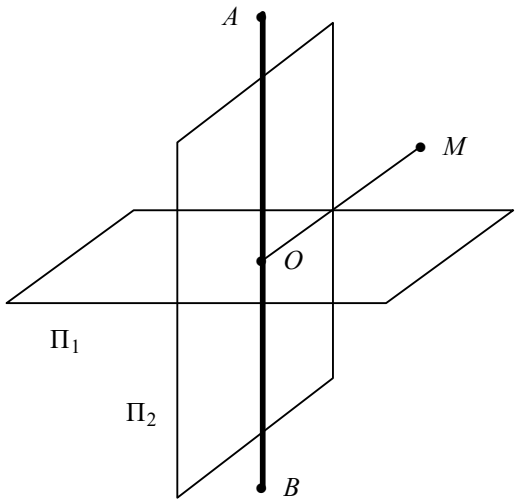
Dans cette expression, $\vec{\mathcal{G}}$ est le champ gravitationnel et $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ (SI) est la constante de gravitation.

❑ Méthode 1.1. Comment déterminer la direction du champ ?

→ Préciser d'abord en quel point on recherche la direction du champ électrostatique. Cela peut être un point bien particulier, un point sur un axe, un point sur un plan ou n'importe quel point de l'espace.
→ Rechercher ensuite des plans de symétrie *qui passent par le point considéré* : la direction du champ est l'intersection de ces plans.
→ On peut également rechercher un plan d'antisymétrie *qui passe par le point considéré* : la direction du champ est alors orthogonale à ce plan.

⇨ Exercices 1.1 à 1.5

– *Exemple 1* : segment uniformément chargé en longueur.
On considère un fil rectiligne de longueur $L = AB$, de milieu O, qui porte une charge uniformément répartie avec une charge linéique λ. On s'intéresse au champ dans le plan médiateur du segment, Π_1.
Le point M considéré est ici un point quelconque du plan médiateur du segment. Il y a deux plans de symétrie qui passent par ce point M : le plan médiateur Π_1 lui-même et le plan Π_2 qui contient le segment et le point M. La direction du champ est l'intersection de ces deux plans, donc la droite (OM).



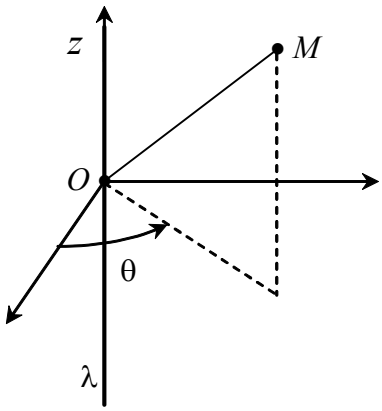
– *Exemple 2* : sphère uniformément chargée en volume.
On considère une sphère de centre O et de rayon R qui porte une charge uniformément répartie à l'intérieur avec une charge volumique ρ. On s'intéresse au champ en tout point de l'espace.
Le point M considéré est ici un point quelconque. Comme tout plan qui contient le centre de la sphère est plan de symétrie, il y a une infinité de plans de symétrie qui contiennent M. Quels que soient ceux que l'on considère, leur intersection est la droite (OM) qui est donc la direction du champ (on dit que le champ est radial) ; on note explicitement : $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e_r}$.

❑ Méthode 1.2. Comment déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ ?

Rechercher les invariances de la distribution de charges, puis choisir le bon système de coordonnées et déterminer celles dont dépend le champ électrostatique.
→ Invariance par translation le long d'un axe : utiliser la coordonnée linéaire sur cet axe. Le champ ne dépend pas de cette coordonnée.
→ Invariance par rotation autour d'un axe de symétrie : utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec l'axe de symétrie comme axe (Oz). Les composantes du champ (donc sa norme) ne dépendent pas de la coordonnée angulaire θ.
→ Invariance par rotation autour d'un point de symétrie : utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec le point de symétrie comme origine. Les composantes du champ ne dépendent pas des coordonnées angulaires θ et φ.

⇨ **Exercices 1.1 à 1.5**

– *Exemple 1* : fil infini uniformément chargé en longueur.
On considère un fil rectiligne infini qui porte une charge uniformément répartie avec une charge linéique λ.
On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z), l'axe (Oz) coincidant avec le fil chargé, pour repérer la position d'un point M où l'on cherche le champ.
La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), les composantes du champ ne dépendent donc pas de θ.
La distribution de charges est invariante par translation le long de l'axe (Oz), le champ ne dépend donc pas de z.
Les composantes du champ ne dépendent donc que de r.
Il ne peut y avoir invariance par translation que si la distribution de charges s'étend jusqu'à l'infini (c'est un modèle).



– *Exemple 2* : sphère uniformément chargée en volume.
On a déjà vu que $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. La distribution de charges est invariante par rotation autour du point O, la coordonnée radiale qui ici est **la norme du champ** ne dépend donc pas de θ et φ : $E_r(M) = E_r(r)$, on note explicitement : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$.

❑ Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?

→ Normale à une surface ouverte (fig. a) : soit un contour (C) fermé orienté par un sens positif de parcours arbitrairement choisi. La normale à une surface ouverte s'appuyant sur ce contour est orientée suivant la règle du tire-bouchon relativement à ce sens positif.

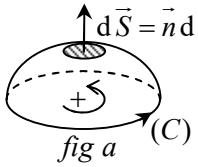


fig a

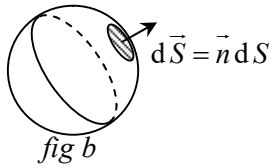


fig b

→ Normale à une surface fermée (fig. b) : la normale locale à une surface fermée pointe toujours de l'intérieure vers l'extérieure de celle-ci.

→ Considérons à présent la situation fréquente d'une surface ouverte Σ_{lat} de révolution autour d'un axe orienté Δ de symétrie physique. Fermons cette surface par deux surfaces ouvertes S_1 et S_2 orientées s'appuyant sur deux contours que nous prendrons ici, par convention, de même orientation (conformément à la règle du tire-bouchon relativement à l'orientation de l'axe Δ).

La surface $S = \Sigma_{lat} \cup S_1 \cup S_2$ de normale $\vec{n}$ est fermée.

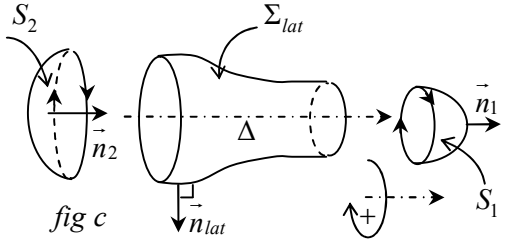


fig c

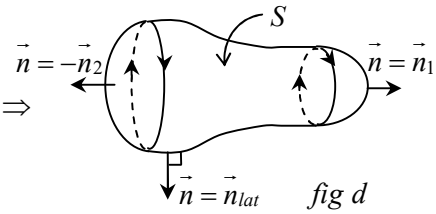
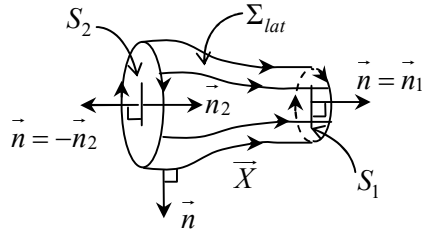


fig d

Il convient ici de ne pas confondre les surfaces ouvertes orientées S_1 et S_2 prises séparément (fig. c), dont les vecteurs unitaires sont $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, avec S_1 et S_2 appartenant à la même surface fermée S (fig. d).

⇨ De très nombreux exercices des chapitres d'électromagnétisme

Considérons un tube de champ de surface Σ_{lat} et fermons-le par deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur deux contours de même orientation s'appuyant sur le tube. La surface $S = \Sigma_{lat} \cup S_1 \cup S_2$ est fermée.



Notons $\phi = \oiint_S \vec{X} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$ le flux de $\vec{X}$ à travers S.

$\phi = \iint_{\Sigma_{lat}} \vec{X} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \vec{X} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$, où $\vec{n}$ est la *normale locale à S pointant de*

l'intérieur vers l'extérieur de S. Ainsi, si l'on note $\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$ le flux à travers S_1 partie de S fermée, avec en tout point de S_1 : $\vec{n} = \vec{n}_1$, il vient $\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{X} \cdot \vec{n}_1\, \mathrm{d}S_1 = \phi_{S_1}$. Le flux de $\vec{X}$ à travers S_1, surface ouverte s'appuyant sur le tube, s'identifie donc avec celui à travers S_1 partie de S fermée. Au contraire, en tout point de S_2, $\vec{n} = -\vec{n}_2$ et $\phi_2 = -\iint_{S_2} \vec{X} \cdot \vec{n}_2\, \mathrm{d}S_2 = -\phi_{S_2}$. Comme en tout point de Σ_{lat}, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{X}$, $\iint_{\Sigma_{lat}} \vec{X} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = 0$ et finalement $\phi = \phi_{S_1} - \phi_{S_2}$. Nous verrons que lorsque $\vec{X}$ désigne un champ de vecteur tel que l'on a nullité du flux à travers toute surface fermée, $\phi = \oiint_S \vec{X} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = 0$ et $\phi_{S_1} = \phi_{S_2}$: il y a conservation du flux de $\vec{X}$ à travers toute section d'un même tube de champ. Cela concernera le champ magnétostatique ainsi que le vecteur densité volumique de courant dans le cadre de l'ARQS ainsi qu'en statique.

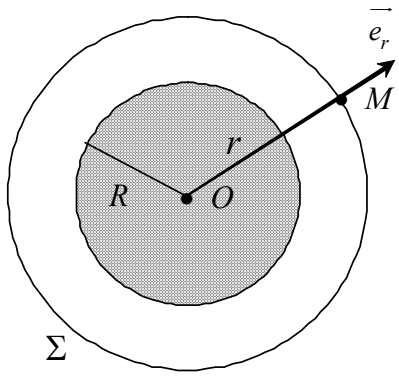
❑ Méthode 1.4. Comment utiliser le théorème de Gauss ?

Le théorème de Gauss permet de calculer simplement le champ électrostatique si la distribution de charges possède suffisamment de symétries.
→ La première étape consiste à prévoir la direction du champ et les variables dont il dépend (voir méthodes 23.1 et 23.2).
→ La deuxième étape est le choix de la surface *fermée* sur laquelle on applique le théorème de Gauss, c'est la surface de Gauss. Il faut respecter les critères suivants : en un point de la surface, le vecteur unitaire normal doit être soit colinéaire soit orthogonal au champ, et la **norme du champ doit être constante** sur toute partie de la surface où le flux n'est pas nul.
→ La troisième étape est l'expression du flux sortant en fonction du champ recherché : il faut souvent découper la surface en plusieurs parties, calculer les flux au travers de chacune d'elles et les ajouter ensuite.
→ La quatrième étape est le calcul de la charge contenue à l'intérieur de la surface puis la conclusion via le théorème de Gauss.

⇨ **Exercices 1.1 à 1.5**

On reprend l'exemple d'une sphère de centre O et de rayon R qui porte une charge uniformément répartie à l'intérieur avec une charge volumique ρ (sur le schéma, en hachuré). On considère un point M quelconque, à une distance $r = OM$ du centre de la sphère et on repère sa position en coordonnées sphériques (r,θ,φ).
On a déjà trouvé précédemment : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$.

Choix de la surface de Gauss : la sphère Σ de centre O qui passe par le point M (donc de rayon r). Quel que soit le point M sur cette sphère, le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur est $\overrightarrow{e_r}$ et est donc toujours colinéaire au champ. De plus, sur l'ensemble de la surface Σ, r ne varie pas et donc la norme du champ non plus.



Expression du flux : $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n}$.

On remplace $\vec{E}(M)$ par $E_r(r)\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{n}$ par $\overrightarrow{e_r}$:

$\Phi(\vec{E})_\Sigma = \iint_\Sigma E_r(r)\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s = \iint_\Sigma E_r(r)\,\mathrm{d}s$.

Comme $E_r(r)$ ne varie pas sur toute la surface Σ, $\iint_\Sigma E_r(r)\mathrm{d}s = E_r(r)\iint_\Sigma \mathrm{d}s.$

Enfin, $\iint_\Sigma \mathrm{d}s$ est la surface de la sphère Σ de rayon r qui vaut $4\pi r^2$.

Finalement $\Phi(\vec{E})_\Sigma = 4\pi r^2 E_r(r)$.

Calcul de la charge Q_{int} contenue à l'intérieur de la sphère Σ dans deux cas :

Soit M est à l'extérieur de la sphère chargée, donc $r > R$ (cas représenté sur le schéma) ; soit M est à l'intérieur de la sphère chargée, donc $r < R$.

Dans le premier cas, la charge intérieure est la totalité de la charge contenue dans la sphère chargée de rayon R et vaut donc $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Dans le second cas, Σ est plus petite que la sphère chargée et la charge intérieure vaut $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$.

Il ne reste plus qu'à conclure avec le théorème de Gauss : $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

Dans le premier cas, cela donne $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi R^3\rho}{3\varepsilon_0}$, et donc $E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$.

Dans le second cas, cela donne $4\pi r^2 E_r(r) = \frac{4\pi r^3\rho}{3\varepsilon_0}$, et donc $E_r(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$.

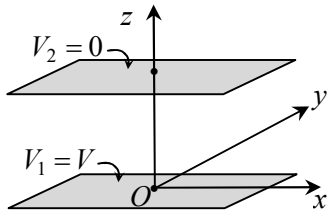
On rassemble ces résultats en donnant l'expression vectorielle du champ : pour $r < R$ (M à l'intérieur), $\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{e_r}$; pour $r > R$ (M à l'extérieur), $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$.

Lien avec le champ créé par une charge ponctuelle Q en O : si on ramène la charge totale de la sphère $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ en son centre, le champ extérieur $E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ a la même expression que celui qu'aurait cette charge ponctuelle Q en O : $E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

❑ Méthode 1.5. Comment utiliser l'équation de Maxwell-Gauss sous sa forme locale ?

L'équation de Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ renseigne localement sur la dépendance spatiale du champ. Bien entendu la méthode requiert une étude préalable des symétries et invariances de la distribution de charge.

⇨ Nombreux exercices



On considère un condensateur plan formé de deux armatures métalliques planes, rectangulaires et identiques, de surface S notées conducteurs 1 et 2, perpendiculaires à (Oz) et séparées l'une de l'autre par un diélectrique d'épaisseur e assimilable au vide. O est choisi au centre de l'armature 1. L'armature en $z = 0$ est portée au potentiel V et celle en $z = e$ est maintenue à un potentiel nul. Les deux conducteurs sont considérés comme parfaits et à l'équilibre électrostatique, ainsi, leur charge intérieure est nulle et ils ne peuvent porter que des charges surfaciques opposées. On note σ la densité surfacique de charge sur l'armature positive. On néglige les effets de bords, ce qui revient à considérer les plans des armatures infinis ou plus précisément à considérer que e est très faible devant leur dimensions transversales. Les armatures sont porteuses de charges égales en valeur absolue et de signe opposé : $Q_1 = -Q_2 = Q$. On se place en coordonnées cartésiennes (x, y, z) rapportées au trièdre $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$.

Compte tenu des symétries on a : $\boxed{\vec{E}(M) = E_z(M)\,\vec{e_z}}$. La distribution de charge est invariante par toutes translations d'axe (Ox) et (Oy). Ainsi, E_z ne dépendant que de z : $\boxed{\vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{e_z}}$.

Appliquons l'équation de Maxwell-Gauss (forme locale du théorème de Gauss) dans le vide entre les armatures où la densité volumique de charge est nulle, il vient en coordonnées cartésiennes $\dfrac{\partial E_z(z)}{\partial z} = 0$. Ainsi E_z ne dépend pas de z. Finalement : $\vec{E}(M) = E_0\,\vec{e_z}$ où E_0 est constant. Le champ entre les armatures est donc uniforme.

■■ Vrai/Faux

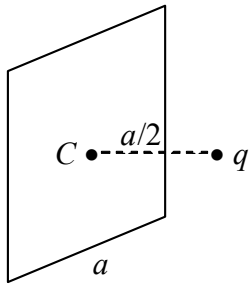
		Vrai	Faux
1.	Le champ électrostatique créé par une charge q_1 n'a pas d'influence sur le champ électrostatique créé par une autre charge q_2.	☐	☐
2.	Un électron dans un champ électrostatique subit une force dont le sens est le même que celui du champ électrostatique.	☐	☐
3.	Une modélisation des charges par une distribution surfacique ne permet pas de calculer le champ au niveau de la surface chargée.	☐	☐
4.	Les charges situées à l'extérieur d'une surface fermée n'ont pas d'influence sur le flux du champ électrostatique au travers de cette surface fermée.	☐	☐
5.	Les charges situées à l'extérieur d'une surface fermée n'ont pas d'influence sur la valeur champ électrostatique à l'intérieur de cette surface fermée.	☐	☐
6.	En un point situé sur un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges, le champ électrostatique est orthogonal à ce plan.	☐	☐
7.	Les considérations sur les invariances de la distribution de charge permettent de déterminer la direction du champ électrostatique.	☐	☐
8.	On peut appliquer le théorème de Gauss à une surface plane.	☐	☐
9.	Une distribution de charges ne peut être invariante par translation que s'il y a des charges à l'infini.	☐	☐
10.	Le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrostatique pour n'importe quelle distribution de charges.	☐	☐
11.	La capacité d'un condensateur plan ne dépend que de sa géométrie.	☐	☐
12.	La capacité d'un condensateur peut être négative suivant les orientations choisies pour calculer la différence de potentiel.	☐	☐
13.	Dans un condensateur plan, en assimilant l'isolant entre les armatures au vide, l'énergie électrostatique s'écrit $U_e = \iiint_{condensateur} u_e \, \mathrm{d}\tau$, où $u_e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ est la densité volumique d'énergie électrostatique.	☐	☐
14.	Une ligne de champ électrostatique peut se refermer sur elle-même.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

■ Calcul intégral direct de champ électrostatique

❑ Exercice 1.1. Calcul de flux

Calculer le flux du champ créé par une charge ponctuelle au travers d'un carré de côté a, la charge étant placée à une distance $\frac{a}{2}$ du centre C du carré, perpendiculairement à sa surface.



❑ Exercice 1.2. Champ créé par un cylindre infini

Un cylindre de rayon R et de longueur infinie uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charge uniforme ρ.

1. Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en distinguant deux cas (à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre).
2. Comparer les résultats que l'on obtiendrait avec la modélisation par une charge linéique. Que vaut le champ sur l'axe du cylindre ?

❑ Exercice 1.3. Champ d'un condensateur plan

La distribution de charges d'un condensateur chargé peut être modélisée par deux plans infinis uniformément chargés, l'un portant une densité surfacique uniforme de charge +σ et l'autre une densité surfacique –σ.

1. Calculer le champ créé par un plan infini uniformément chargé.
2. En utilisant le théorème de superposition, en déduire le champ créé par le condensateur, entre les armatures et à l'extérieur.
3. Retrouver ce résultat en raisonnant directement sur l'ensemble du condensateur et sans appliquer le théorème de superposition. On admettra que les conducteurs formant les armatures étant à l'équilibre électrostatique, le champ intérieur y est nul.

❑ Exercice 1.4. Accélération de la pesanteur - Problème ouvert

Le poids $\vec{P}$ est constitué de l'attraction gravitationnelle de la Terre (en négligeant les termes de marée liés aux autres astres proches) et de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. En posant $\vec{P}(M) = m\vec{g}(M)$ où m est la masse, on définit le champ de pesanteur $\vec{g}$ en un point M par $\vec{g}(M) \approx \vec{\mathcal{G}}(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM}$, où H est le projeté de M sur l'axe des pôles.

Le premier terme $\vec{\mathcal{G}}(M)$ (prépondérant) est le champ de gravitation de la Terre.

Le second $\omega^2 \overrightarrow{HM}$ provient de la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre autour de son axe à la vitesse angulaire ω, il varie en fonction de la latitude induisant d'une part un écart local à la verticalité et d'autre part une variation de la norme de $\vec{g}$ de l'ordre de 0,2 % entre pôle et équateur.

On se propose d'obtenir une estimation de l'accélération de la pesanteur à la surface du globe. Proposer une modélisation permettant de répondre à cette problématique.

Données : La Terre peut en première approximation être assimilée à une sphère de rayon $R = 6{,}37 \cdot 10^3$ km et de masse $m = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg répartie uniformément. On donne la constante de gravitation $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

❑ Exercice 1.5. Champ créé par une sphère chargée en surface*

On considère un sphère de centre O et de rayon R à la surface de laquelle est uniformément distribuée une charge de densité surfacique σ. On se place en coordonnées sphériques (r,θ,φ) de centre O auxquelles on associe le trièdre direct $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}\right)$.

1. Étudier les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge. En déduire, par l'utilisation du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace (intérieur et extérieur). On justifiera très soigneusement le choix de la surface de Gauss au vu de l'étude des symétries et d'invariances.
2. Tracer l'allure de la norme de champ en fonction de r et commentez en particulier le comportement du champ au passage de la surface chargée en $r = R$. Commenter en utilisant la relation de passage du champ électrostatique en présence de charges surfaciques (donnée en fin d'énoncé).

   On donne la relation de passage pour $\vec{E}$ en présence de charges surfaciques séparant deux milieux 1 et 2 de part et d'autre de cette surface chargée est : $\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}}$ où $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont respectivement les champs dans les milieux 1 et 2 **au voisinage immédiat** de la surface. $\vec{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal localement à cette surface et point du milieu 1 vers le milieu 2. Cette relation traduit la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et la discontinuité de sa composante normale en présence de charges surfaciques.

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1. Rechercher une surface fermée pour utiliser le théorème de Gauss.
Exercice 1.3. Prendre une surface fermée symétrique par rapport au plan qui sépare la couche chargée en deux parties égales.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux

2. La charge de l'électron est négative donc la force est de sens opposé à celui du champ.
4. Le théorème de Gauss ne fait intervenir que les charges intérieures.
5. Des charges modifient le champ, où qu'elles soient : celui qu'elles créent s'ajoute aux autres.
7. Elles permettent de déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ.
8. La surface doit être fermée, c'est-à-dire entourer un certain volume.
10. La distribution de charges doit présenter suffisamment de symétries.
11. La différence de potentiel entre les armatures du condensateur plan est :

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 E(z)\,\mathrm{d}z \text{, soit } U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_1^2 \mathrm{d}z = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}.$$

La capacité est liée à la différence de potentiel U entre l'armature par $C = \dfrac{Q}{U}$. Ainsi, avec $Q = S\sigma$ et $U = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_0}$, on obtient : $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$.

12. Elle est toujours positive, indépendamment des choix d'orientation et de la géométrie du condensateur.
13. On a établi (voir le chapitre d'électrocinétique de l'ouvrage de première année dans la même collection) que l'énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur est $U_e = \dfrac{1}{2}CU^2$ avec $U = \dfrac{Q}{C}$. Pour le condensateur plan, la norme du champ entre les armatures est donnée par $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$, d'où $U_e = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0^2 E^2 S^2}{C}$. D'autre part, la capacité du condensateur plan est $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$, ainsi $U_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S e$. Le produit Se étant le volume du condensateur on obtient finalement $U_e = \iiint_{condensateur} u_e\,\mathrm{d}\tau$, où $u_e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ est la densité volumique d'énergie électrostatique. Dans le cadre du programme, on admet la généralisation de ce résultat ce qui conduit à poser $U_e = \iiint_{espace} u_e\,\mathrm{d}\tau$, avec $u_e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

14. L'équation de (M.G), forme locale du théorème de Gauss, traduit le fait que, contrairement à $\vec{B}$ (voir chapitre de magnétostatique), $\vec{E}$ est à divergence non nulle en présence de charges. Ainsi, une ligne de champ de $\vec{E}$ ne peut que diverger ou converger, mais pas se refermer sur elle-même.

❑ Les erreurs classiques

→ Pour donner une information sur la direction du champ électrique en un point donné, les plans de symétrie/antisymétrie utilisés doivent passer par ce point.
→ Ne pas confondre l'utilisation des plans de symétrie (pour déterminer la *direction* du champ, donc ses composantes) et l'utilisation des invariances (pour déterminer les *coordonnées dont dépendent* les composantes du champ).
→ Il faut alors exprimer clairement les résultats : on peut dire par exemple qu'un champ est porté par $\vec{e_r}$, ou bien que ses composantes dépendent de r, mais l'expression « le champ dépend de $\vec{e_r}$ » ne veut rien dire !
→ Dans le cas d'une invariance par rotation, il est faux de dire que le champ ne dépend pas de l'angle (θ) : ce sont ses composantes (donc aussi sa norme) qui ne dépendent pas de θ, mais le champ lui-même dépend de θ puisqu'il *tourne* avec le vecteur unitaire ($\vec{e_r}$).
→ Bien choisir une surface *fermée* pour appliquer le théorème de Gauss : un cylindre infini, par exemple, n'est pas une surface fermée ; en revanche, un cylindre de longueur finie et fermé par deux bases convient.

Corrigé

■■ Corrigé des exercices

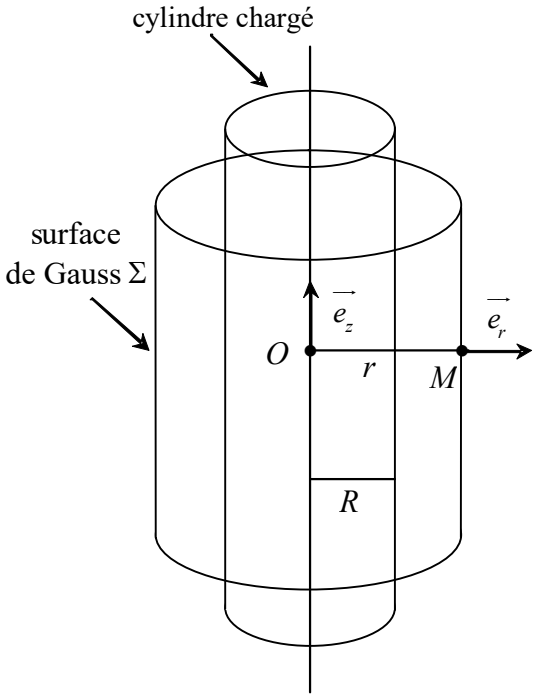
Exercice 1.1

Au premier abord, on peut penser à exprimer le champ créé par la charge ponctuelle q en un point M situé sur le carré puis à calculer le flux. C'est simple en principe, mais le calcul ne l'est pas ! Il est beaucoup plus simple d'utiliser le théorème de Gauss, si l'on peut trouver une surface fermée sur laquelle l'appliquer. On peut remarquer que la surface Σ d'un cube centré sur la charge constitue la surface fermée adéquate : comme le flux est le même au travers de chacune des faces, le flux recherché est égal à un sixième du flux au travers de la surface Σ.

On applique alors le théorème de Gauss : la charge intérieure étant égale à q, le flux au travers de Σ vaut $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$ et le flux recherché est donc $\boxed{\Phi = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}}$.

Exercice 1.2

1. On repère la position d'un point M en coordonnées cylindriques (r,θ,z). Il faut d'abord étudier les symétries et invariances de la distribution de charge : tout plan qui contient l'axe (Oz) est plan de symétrie, ainsi que tout plan qui lui est orthogonal. On en déduit que le champ en un point M est radial, c'est-à-dire selon $\vec{e_r}$. Par ailleurs, la distribution est invariante par toute rotation autour de (Oz) et par toute translation selon $\vec{e_z}$. On en déduit que la norme du champ ne dépend ni de θ ni de z. On peut finalement conclure : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$.



⇨ *Méthodes 1.1 et 1.2*

On applique ensuite le théorème de Gauss à la surface fermée Σ constituée d'un cylindre d'axe (Oz) de rayon r et de hauteur h et des deux disques qui ferment ses extrémités. Le flux au travers des disques est nul, puisque le champ y est orthogonal au vecteur unitaire normal à la surface. Il reste à calculer le flux au travers de la partie cylindrique, pour laquelle le vecteur unitaire normal à la surface sortant est $\vec{e_r}$.

L'expression de ce flux est donc $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \iint_{\text{cylindre}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = \iint_{\text{cylindre}} E_r(r)\,\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}\,\mathrm{d}s$.

Comme $E_r(r)$ ne varie pas sur toute la surface du cylindre, on peut le « sortir » de l'intégrale, ce qui donne $\Phi(\vec{E})_\Sigma = E_r(r)\iint_{\text{cylindre}} \mathrm{d}s$ et l'intégrale est simplement la surface du cylindre, qui vaut $2\pi r h$. On a donc $\Phi(\vec{E})_\Sigma = 2\pi r h E_r(r)$.

Il faut maintenant, pour exprimer la charge intérieure à Σ, distinguer deux cas : soit le point *M* est à l'intérieur du cylindre chargé ($r \leq R$), soit il est à l'extérieur ($r \geq R$).

Dans le premier cas, la charge intérieure vaut $Q_{\text{int}} = \rho \pi r^2 h$ et dans le second cas, elle vaut $Q_{\text{int}} = \rho \pi R^2 h$. Le théorème de Gauss $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ donne finalement :

– pour $r \leq R$, $\boxed{\vec{E}(M_{\text{int}}) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e_r}}$; – pour $r \geq R$, $\boxed{\vec{E}(M_{\text{ext}}) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e_r}}$.

⇨ *Méthode 1.4*

2. Avec une modélisation linéique, on avait obtenu $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$. Le lien entre les deux modèles se fait via la relation $\lambda = \pi R^2 \rho$, que l'on obtient en écrivant que pour une hauteur *h*, la charge donnée par les deux modélisations doit être la même, donc $\lambda h = \rho \pi R^2 h$.

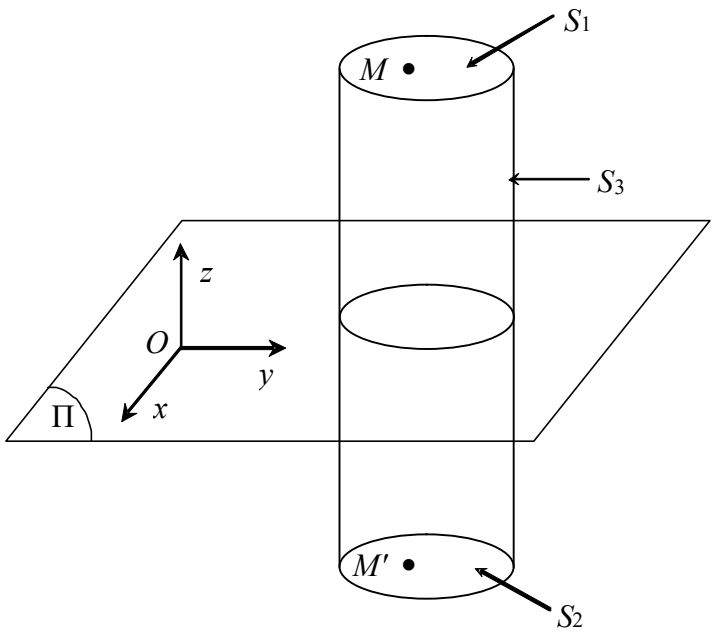
On remarque ainsi qu'*à l'extérieur* du cylindre chargé, *le champ donné par les deux modélisations est le même*. En revanche, là où il y a des charges, la modélisation par un cylindre chargé est plus « fine », elle donne en particulier le champ sur l'axe lui-même, qui est *nul*, alors que la modélisation linéique laisse cette question sans réponse.

Exercice 1.3

1. On considère un plan infini Π uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique σ. Le plan des charges est le plan (*Oxy*) et l'axe (*Oz*) lui est donc orthogonal. On cherche le champ en un point *M* de coordonnées (*x*, *y*, *z*) situé au-dessus du plan des charges.

Tout plan orthogonal à Π étant plan de symétrie de la distribution de charges, on peut en trouver au moins deux qui passent par *M*. Le champ en *M* est porté par leur intersection, donc selon (*Oz*) : $\vec{E}(M) = E_z(M)\vec{e_z}$.

⇨ *Méthodes 1.1 et 1.2*



Corrigé

La distribution de charges est invariante par translation selon les axes (Ox) et (Oy), le champ ne dépend donc pas des coordonnées x et y : $E_z(M) = E_z(z)$.

On peut donc écrire $\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e_z}$.

On choisit comme surface fermée Σ une surface constituée de deux disques S_1 et S_2 et d'une surface cylindrique S_3, telles que le point M soit sur S_1, que S_2 soit symétrique de S_1 par rapport à Π et que l'axe du cylindre soit orthogonal à Π. On note S la surface commune à S_1 et S_2.

Sur S_1 et S_2 le vecteur unitaire normal sortant, respectivement $\vec{e_z}$ et $-\vec{e_z}$, est colinéaire au champ et le champ, qui ne dépend que de z, ne varie pas. Sur S_3 le vecteur unitaire normal est orthogonal au champ et le flux est donc nul.

On calcule maintenant le flux en commençant par la surface S_1 : $\Phi(\vec{E})_{S_1} = \iint_{S_1} \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}s\,\vec{n}$.

On remplace $\vec{E}(M)$ par $E_z(z)\vec{e_z}$ et $\vec{n}$ par $\vec{e_z}$: $\Phi(\vec{E})_{S_1} = \iint_{S_1} E_z(z)\vec{e_z}\cdot\vec{e_z}\,\mathrm{d}s = \iint_{S_1} E_z(z)\,\mathrm{d}s.$

Comme $E_z(z)$ ne varie pas sur toute la surface S_1, $\iint_{S_1} E_z(z)\,\mathrm{d}s = E_z(z)\iint_{S_1}\mathrm{d}s = E_z(z)S.$

En ce qui concerne la surface S_2, on a déjà remarqué que le vecteur unitaire normal sortant était $-\vec{e_z}$. De plus, le plan Π des charges étant plan de symétrie de la distribution de charges, le champ en un point M' de S_2 est le symétrique par rapport à Π du champ en un point M de S_1, c'est-à-dire que $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$. Donc, en un point de S_2, le champ s'écrit $-E_z(z)\vec{e_z}$.

Donc $\Phi(\vec{E})_{S_2} = \iint_{S_2} -E_z(z)\vec{e_z}\cdot\left(-\vec{e_z}\right)\mathrm{d}s = \iint_{S_2} E_z(z)\,\mathrm{d}s = E_z(z)S.$

Finalement, comme le flux est nul au travers de S_3, $\Phi(\vec{E})_{\Sigma} = 2E_z(z)S$.

La charge contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ correspond à une surface S du plan chargé et vaut donc $Q_{\text{int}} = \sigma S$.

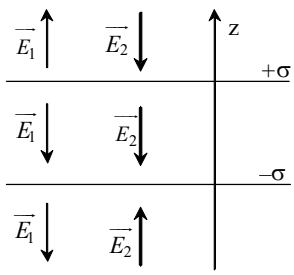
On en déduit par le théorème de Gauss que $2E_z(z)S = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ et donc $E_z(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Il ne reste qu'à donner l'expression vectorielle, en se rappelant que $E_z(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ n'est valable que pour z > 0, pour $z < 0$ on a le signe opposé. Le résultat final est donc :

– pour $z > 0$, $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z}}$; – pour $z < 0$, $\boxed{\vec{E}(M) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z}}$.

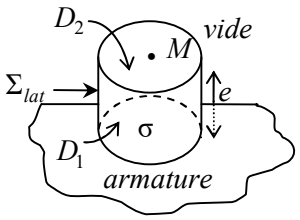
⇨ *Méthode 1.4*

2. Sur le schéma ci-contre, on considère que σ > 0. On note $\vec{E_1}$ le champ créé par le plan chargé +σ et $\vec{E_2}$ le champ créé par le plan chargé – σ. La direction et la norme de $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ sont partout les mêmes, seuls les sens changent. On constate donc qu'à l'extérieur du condensateur, le champ résultant est nul et qu'à l'intérieur, entre les deux plans chargés, le champ résultant vaut deux fois le champ créé par un seul plan, donc sa norme est σ / ε_0.



Conclusion : à l'extérieur le champ est nul et entre les armatures il vaut $\boxed{\vec{E}(M)=\vec{E}_0=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z}$, il est uniforme.

3. Pour déterminer directement le champ au point *M*, choisissons pour surface de Gauss la surface fermée Σ, réunion de la surface latérale Σ_{lat} s'appuyant sur un tube de champ fermé à ces extrémités par deux disques D_1 et D_2 de même surface *S*. Le premier est à l'intérieur de l'armature chargée positivement, le second passe par le point *M* dans le vide entre les armatures. D'après le théorème de Gauss :



$$\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_{\mathcal{V}}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}\tau \quad\Rightarrow\quad \iint_{\Sigma_{lat}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iint_{D_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iint_{D_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ où $\mathcal{V}$ est le volume intérieur à Σ et Q_{int} sa charge intérieure. Or, par définition d'un tube de champ, en tout point de Σ_{lat}, $\vec{E}$ est orthogonal à la normale locale à la surface de sorte que $\iint_{\Sigma_{lat}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$. Dans le conducteur parfait, à l'équilibre électrostatique, le champ est nul et donc $\iint_{D_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$ et en tout point de D_2 le champ est uniforme et $\iint_{D_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_{D_2}E_0\,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z\,\mathrm{d}S=S\,E_0$. La charge intérieure à Σ est uniquement portée par l'armature positive et vaut σS.

Ainsi $E_0\,S=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ et $\boxed{E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$.

Exercice 1.4

On sait qu'à la surface de la Terre, en négligeant les termes de marée liés aux autres astres proches et de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, le champ de pesanteur $\vec{g}$ en un point *M* est donné par $\vec{g}(M)\approx\vec{\mathcal{G}}(M)$, où $\vec{\mathcal{G}}(M)$ est le champ gravitationnel de la Terre en *M* (voir le chapitre sur les changements de référentiel). L'idée de départ est donc d'utiliser le théorème de Gauss appliqué à la gravitation en modélisant, comme nous y engage les données fournies, la terre a une sphère homogène pour déterminer le champ gravitationnel de la Terre en un point de sa surface.
Deux solutions s'offrent à nous : la première consiste à supposer la masse uniformément répartie, la seconde à exploiter nos connaissances en électrostatique pour dire que tout se passe comme si toute la masse était rapportée au centre de la terre (centre de masse dans notre modélisation).
Menons la démarche dans le cadre de la première solution :
On repère la position d'un point *M* à l'extérieur de la terre en coordonnées sphériques (r,θ,φ).

Corrigé

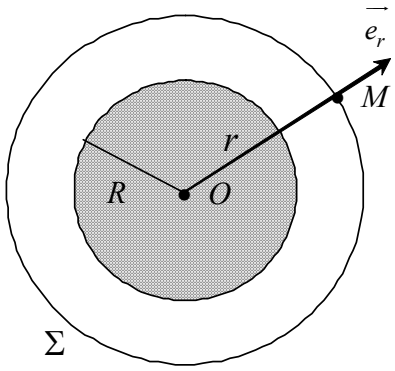
La masse étant répartie uniformément, tout plan qui contient le centre *O* est plan de symétrie de la distribution de masse. La direction du champ de gravitation en *M* est donc la direction (*OM*), puisque l'on peut trouver deux plans de symétrie qui passent par *M* et que leur intersection est (*OM*). De plus, la distribution de masse étant à symétrie sphérique de centre *O*, la norme du champ ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ.

⇨ *Méthode 1.1*

On peut donc écrire : $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(r)\vec{e_r}$. Pour appliquer le théorème de Gauss, on prend comme surface fermée la sphère Σ de centre *O* et de rayon *r*, qui passe par *M*. L'expression générale du flux du champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ au travers de la surface Σ est $\Phi(\vec{\mathcal{G}})_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{\mathcal{G}}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n}$ et comme $\vec{n} = \vec{e_r}$,

$\Phi(\vec{g})_\Sigma = \iint_\Sigma \mathcal{G}_r(r)\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}\,\mathrm{d}s = \iint_\Sigma \mathcal{G}_r(r)\,\mathrm{d}s = \mathcal{G}_r(r)\iint_\Sigma \mathrm{d}s = 4\pi r^2\mathcal{G}_r(r)$, puisque $\iint_\Sigma \mathrm{d}s$ est la surface de la sphère Σ et vaut donc $4\pi r^2$.

Le théorème de Gauss appliqué au cas de la gravitation s'écrit : $\iint_\Sigma \vec{\mathcal{G}}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = -4\pi G M_{\text{int}}$.



La masse contenue à l'intérieur de la surface Σ étant la masse de la terre *m*, on en déduit que $4\pi r^2\mathcal{G}_r(r) = -4\pi G m$ et donc $\mathcal{G}_r(r) = \dfrac{-Gm}{r^2}$. Finalement, $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \dfrac{-Gm}{r^2}\vec{e_r}}$.

⇨ *Méthode 1.4*

Pour la seconde solution : si l'on considère que toute la masse *m* de la terre est concentrée en son centre *O*, le champ de gravitation créé est donné par l'expression pour une masse ponctuelle, donc $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \dfrac{-Gm\overrightarrow{OM}}{OM^3}}$: on peut le retrouver à partir de l'expression de la force de gravitation, ou en faisant l'analogie avec le champ électrique créé par une charge ponctuelle, $\vec{E}(M) = \dfrac{q\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$, en remplaçant la charge par la masse et la constante $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$.

Comme $\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = \dfrac{\vec{e_r}}{r^2}$, on retrouve bien la même expression.

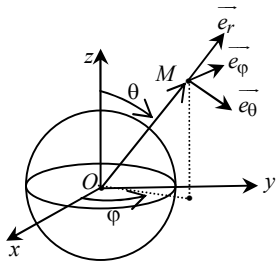
À la surface de la Terre, on obtient $\boxed{\mathcal{G}(M) = \dfrac{Gm}{r^2} = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}$, ce qui coïncide avec la valeur généralement retenue pour l'accélération de la pesanteur *g*.

Discutions la validité du modèle : d'une part la Terre n'est pas exactement sphérique et que le champ de pesanteur et l'accélération de la pesanteur n'ont donc pas la même valeur partout, d'autre part, le champ de pesanteur *g* et le champ de gravitation $\mathcal{G}$ ne sont pas exactement égaux, ils diffèrent en effet par les termes de marée et de la force d'inertie d'entraînement due au

mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles (voir le chapitre sur les changements de référentiel).

Exercice 1.5

1. Symétries : tout plan contenant un rayon et le point M est plan de symétrie pour la distribution de charge. Or, en un point d'un tel plan, $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan, ainsi $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de ces plans, il est donc radial : $\vec{E}(M) = E_r(M)\,\vec{e_r}$.



⇨ *Méthodes 1.1 et 1.2*

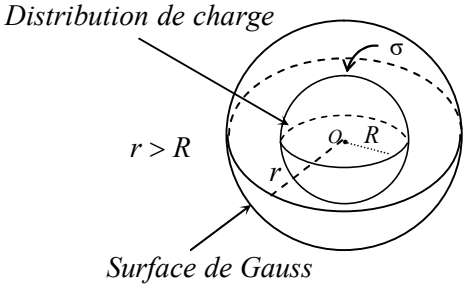
✎ *On peut aussi utiliser le fait qu'un rayon passant par M est axe de symétrie de la distribution de charge, ce qui conduit directement au caractère radial du champ.*

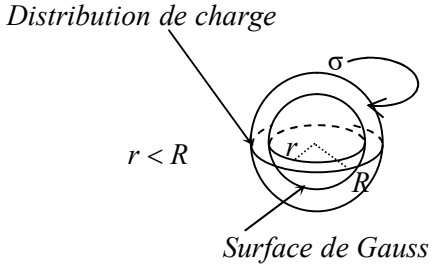
Invariances : la distribution de charge est invariante par toute rotation d'angle θ et d'angle φ autour de (Oz), ainsi, $E_r = E_r(r)$.

Le champ étant purement radial et ne dépendant en norme que de r, choisissons une surface de Gauss sphérique de rayon r sur laquelle il soit de norme constante et sur laquelle la normale locale coïncide avec la direction du champ. Le flux sortant du champ (**attention il s'agit du flux sortant** ! Le flux étant une grandeur algébrique !) à travers une telle surface fermée est égal à : $\Phi = \iint_{\text{sphère } r} E(r)\,\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}\,\mathrm{d}S = 4\pi r^2\,E(r)$. D'après le théorème de Gauss ce flux est égal à la charge intérieure Q_{int} contenue dans cette surface que divise ε_0 : $4\pi r^2\,E(r) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

Deux cas sont alors à distinguer :

✎ *Éviter l'erreur classique et ô combien préjudiciable : il faut à ce stade être très vigilant pour ne pas confondre la surface de définition de la distribution de charge de rayon R avec la surface de Gauss de rayon r (voir figure ci-après).*





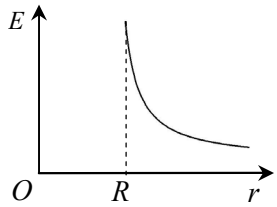
Corrigé

Pour $r > R$: la charge intérieure a pour expression $Q_{\text{int}} = \underbrace{4\pi R^2}\ \sigma$ (surface de la sphère $4\pi R^2$ fois densité surfacique de charge). Ainsi, pour $r > R$: $\boxed{E(r) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}}$.

Pour $r < R$: la charge intérieure a pour expression $Q_{\text{int}} = 0$ (le volume intérieur à la surface de Gauss est vide !). Ainsi, pour $r < R$: $\boxed{E(r) = 0}$.

⇨ *Méthode 1.4*

2. L'allure des variations de $\left\|\vec{E}\right\|$ avec r est la suivante : on note la discontinuité de $\vec{E}$ en $r = R$ ce qui est conforme à la relation de passage donnée dans l'énoncé. En effet, en notant $\vec{E}_1 = \vec{E}(r = R^-)$ le champ à l'intérieur de la sphère au voisinage de sa surface en $r = R^-$ et $\vec{E}_2 = \vec{E}(r = R^+)$ le champ à l'extérieur au voisinage de sa surface en $r = R^+$, la relation de passage pour $\vec{E}$ s'écrit : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$



avec ici $\vec{n}_{12} = \vec{e_r}$ vecteur unitaire normal à la surface chargée, orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Ainsi, avec $\vec{E}_1 = \vec{E}_{interieur} = \vec{0}$, on obtient au voisinage de la surface de la sphère chargée en surface $\boxed{\vec{E}_2 = \vec{E}_{exterieur} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}}$.

Chapitre 2

Potentiel électrostatique

UN SCIENTIFIQUE



Mathématicien et physicien, **Denis Poisson** (1781-1840) intègre l'École polytechnique en 1798. À sa sortie, il se tourne vers la physique mathématique, domaine dans lequel il publie des ouvrages qui font référence comme son *Traité de mécanique*, publié en 1811.
Il donne en 1812 les lois de l'électrostatique et publie *Théorie analytique de la chaleur* en 1835. En fin de carrière, il se tourne vers les probabilités et introduit en 1837 une loi discrète comme limite de lois binomiales.

Un peu d'histoire

Dans la fin des années 1770, le mathématicien Joseph-Louis Lagrange avait introduit la notion de potentiel. Dans un mémoire publié dans les années 1780, Pierre-Simon Laplace montre qu'il vérifie l'équation différentielle du second ordre $\triangle (V) = 0$. Siméon-Denis Poisson ajoute en 1811 un terme dans cette équation de Laplace concernant le potentiel électrique pour tenir compte de la présence des charges.
On doit au physicien anglais Michael Faraday, dans les années 1830, des progrès spectaculaires dans la compréhension des phénomènes électrostatiques, et plus généralement dans la nature de l'électricité. Contrairement aux savants cités précédemment, il base ses découvertes sur des expériences précises. Celles-ci auront des applications rapides dans le domaine industriel. Il pense que les atomes sont tous « équivalents » et possèdent des qualités égales d'électricité.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les relations entre le potentiel et le champ électrostatiques
- Les équations locales régissant les variations spatiales du potentiel
- L'énergie potentielle électrostatique d'une charge dans un champ extérieur
- Les analogies gravitationnelles

Ce qu'il faut savoir faire

- Calculer un potentiel électrostatique à partir du champ et inversement
- Extraire des informations sur le champ par lecture d'une carte des équipotentielles
- Savoir tracer les surfaces équipotentielles et les lignes de champ en python

■■ Résumé de cours

■ Potentiel électrostatique

❑ Circulation du champ électrostatique

La circulation du champ électrique le long d'une courbe C orientée est définie par l'intégrale curviligne $\int_C \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ où $\mathrm{d}\vec{l}$ est un déplacement élémentaire du point M le long de la courbe C.

❑ Définition du potentiel électrostatique

Le potentiel est un champ scalaire prenant des valeurs en chaque point de l'espace. La différence de potentiel entre deux points A et B est égale à la circulation du champ électrostatique entre ces deux points : $\boxed{V(A)-V(B)=\int_A^B \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$: elle ne dépend pas du chemin suivi entre A et B.

Le long d'un contour fermé : $\oint_C \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}=0$: le champ électrostatique est **à circulation conservative**.

Remarque

Le potentiel électrique est défini à une constante (additive) près.

❑ Expressions du potentiel électrique

Le potentiel créé en M par une charge ponctuelle q placée en P est : $V(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM}$, si le potentiel est posé *nul à l'infini* (potentiel dit coulombien).

Le potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles (principe de superposition) est :

$$\boxed{V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{P_iM}}.$$

❑ Relations entre champ et potentiel

La relation $V(A)-V(B)=\int_A^B \vec{E}(M)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ peut être écrite pour une variation infinitésimale de potentiel (donc deux points infiniment proches) : $\boxed{\mathrm{d}V=-\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$.

⇨ Méthode 2.1. Calcul du potentiel à partir du champ

En utilisant la définition intrinsèque de l'opérateur différentiel gradient, cette relation est équivalente à $\boxed{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)}$.

En coordonnées cartésiennes : $\vec{E}(M) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right)$.

⇨ **Méthode 2.2. Calcul du champ à partir du potentiel**

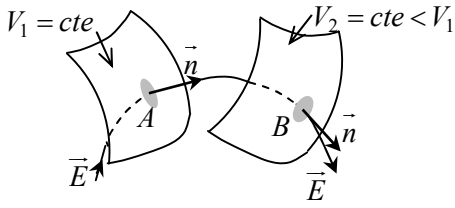
Remarque

En gravitation la relation analogue s'écrit en remplaçant $\vec{E}$ par le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$, V par le potentiel gravitationnel Φ et la constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$: $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)}$.

❑ Topographie du potentiel et ligne de champ

Une **surface équipotentielle** est une surface sur laquelle le potentiel a la même valeur.

$\vec{E}$ est suivant les potentiels décroissants. Le long d'une ligne de champ de $\vec{E}$, le potentiel est décroissant. Les surfaces équipotentielles sont (par définition du gradient) orthogonales aux lignes de champ.



En particulier, un plan d'antisymétrie est toujours une surface équipotentielle.

Le champ est d'autant plus intense que les surfaces équipotentielles se rapprochent les unes des autres et que les lignes de champ se resserrent.

⇨ **Méthode 2.4. Comment exploiter la topographie du potentiel et des lignes de champ ?**
⇨ **Méthode 4.6. Équipotentielles et des lignes de champ en python (MP)**

■ Équations de Poisson et de Laplace

En reportant $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}\left(V(M)\right)$ dans (M.G), on obtient l'équation de Poisson régissant les variations spatiales locales de $V(M)$ en relation avec les charges : $\boxed{\Delta(V) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$.

Dans le vide local, avec $\rho = 0$ on obtient l'équation de Laplace $\boxed{\Delta(V) = \nabla^2(V) = 0}$.

⇨ **Méthode 2.3. Comment utiliser l'équation de Poisson ou de Laplace**

Remarque

L'intégration d'une de ces équations locales permet d'obtenir le potentiel à condition de connaître les conditions aux limites du problème. On notera la continuité du potentiel en présence de charges surfaciques.

■ Énergie potentielle électrostatique

❑ Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

Une charge q placée en un point M où règne un champ électrostatique dérivant du potentiel V a une énergie potentielle : $\boxed{E_p(M) = qV(M)}$.

La force qui dérive de ce potentiel est la force de Coulomb : $\vec{F}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(M) = q\vec{E}$.

Le travail élémentaire de la force de Coulomb lors d'un petit déplacement $\mathrm{d}\vec{r}$ de la charge q en M soumise à l'action du champ $\vec{E}(M)$ s'écrit $\boxed{\delta W = -q\vec{\nabla}(V)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -q\,\mathrm{d}V = -\mathrm{d}E_p}$.

Sur un trajet fini AB on a le travail $\boxed{W_{AB} = q(V_A - V_B) = qU}$ où $U = V_A - V_B$ est la différence de potentiel entre A et B.

❑ Énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges

L'énergie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées d'une distance r est :

$\boxed{E_p = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ (potentiel nul lorsque les charges sont infiniment éloignées).

Elle correspond à l'énergie potentielle de l'une des deux charges dans le potentiel créé par l'autre (à ne pas compter deux fois). Son signe dépend du signe du produit $q_1 q_2$.

❑ Énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre deux masses

L'énergie potentielle d'interaction de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 séparées d'une distance r est obtenue par analogie en remplaçant les charges par les masses et $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$:

$$\boxed{\varepsilon_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}}.$$

Remarque

Contrairement à l'énergie potentielle électrostatique, l'énergie potentielle gravitationnelle est toujours négative ce qui traduit le fait que la force gravitationnelle est toujours attractive.

❑ Méthode 2.1. Calcul du potentiel à partir du champ

Il s'agit, connaissant l'expression du champ, d'utiliser la relation $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ puis d'intégrer.

Il faut d'abord donner l'expression d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l}$ en utilisant le même système de coordonnées que celui avec lequel est exprimé le champ. On en déduit dV puis on intègre, en n'oubliant pas la constante d'intégration. Pour finir, on détermine la valeur de la constante en choisissant en quel point de l'espace le potentiel est connu (très souvent nul).

⇨ Exercices 2.1 à 2.4

Le champ électrique créé par une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée en volume avec une charge volumique ρ vaut $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}$ à l'intérieur de la sphère et $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$ à l'extérieur. Un déplacement élémentaire du point M s'écrit, en coordonnées sphériques, $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_\varphi}$ (l'expression exacte sur $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\varphi}$ n'est pas importante ici, on peut simplement dire que c'est orthogonal à $\vec{e_r}$).

À l'extérieur de la sphère : $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\rho R^3\,\mathrm{d}r}{3\varepsilon_0 r^2}$ donc $V(M) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + \mathrm{cte}$. On prend $V = 0$ à l'infini, ce qui conduit à $\mathrm{cte} = 0$ donc $V(M_{\mathrm{ext}}) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$.

À l'intérieur de la sphère : $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\rho r\,\mathrm{d}r}{3\varepsilon_0}$ donc $V(M) = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \mathrm{cte}'$. Comme le potentiel doit être continu en $r = R$, on a $-\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + \mathrm{cte}' = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$, soit $\mathrm{cte}' = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ donc $V(M_{\mathrm{int}}) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$.

❑ Méthode 2.2. Calcul du champ à partir du potentiel

Il faut simplement calculer le champ par dérivation du potentiel, avec l'expression $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ selon le système de coordonnées utilisé :

– en coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{\text{grad}}V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$,

– en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{\text{grad}}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$,

– en coordonnées sphériques, $\overrightarrow{\text{grad}}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$.

Cette méthode est particulièrement adaptée lorsqu'il sera possible d'exprimer d'abord le potentiel en utilisant les équations locales de Poisson ou de Laplace.

⇨ Exercices 2.6, 2.7 et 2.8

Considérons par exemple une sphère de rayon R et de centre O, portant la charge Q répartie uniformément sur sa surface : elle crée le potentiel $V(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ pour M à l'extérieur $(r > R)$ et $V(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \text{cte}$ pour M à l'intérieur $(r < R)$.

On utilise $\overrightarrow{\text{grad}}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$ avec $\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ puisque V ne dépend que de r.

Pour $r > R$: $\vec{E}(M) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{1}{r}\right)\vec{e}_r$ soit $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$.

Pour $r < R$: V est constant donc sa dérivée est nulle et $\vec{E} = \vec{0}$.

❑ Méthode 2.3. Comment utiliser l'équation de Poisson ou de Laplace ?

Lorsque la forme de distribution de charge est connue dans une zone déterminée de l'espace ainsi que les conditions aux limites de ce domaine, l'intégration de l'équation de Poisson régissant les variations spatiales locales de $V(M)$ en relation avec les charges : $\nabla^2(V) + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, qui dans le vide local s'écrit $\nabla^2(V) = 0$ (équation de Laplace), permet de déterminer la forme de V et par suite celle de $\vec{E}(M)$ grâce à la relation $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(V(M))$. La démarche est similaire à celle menée en magnétostatique.

⇨ Exercices 2.6, 2.7 et 2.8

Revenons sur l'exemple du condensateur plan traité dans la méthode 1.5, pour lequel $\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e_z}$ et $V = V(z)$.

Dans le vide entre les armatures, l'équation de Laplace s'écrit $\nabla^2(V) = 0$. Comme $V = V(z)$, on écrit en coordonnées cartésiennes : $\nabla^2\left(V(M)\right) = \dfrac{\mathrm{d}^2 V(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0$, soit en intégrant deux fois $V(z) = A\,z + B$ où A et B sont des constantes à déterminer.

Pour les déterminer, utilisons les conditions aux limites du domaine d'intégration : en $z = 0$, on a $V = V_1$ et en $z = e$, $0 = V_2$, de sorte que $A = -\dfrac{V}{e}$ et $V = B$. Ainsi, avec $V(z) = V(1 - z/e)$, il vient $E(z) = -\dfrac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{V}{e}$, ce qui démontre que le champ entre les armatures est uniforme.

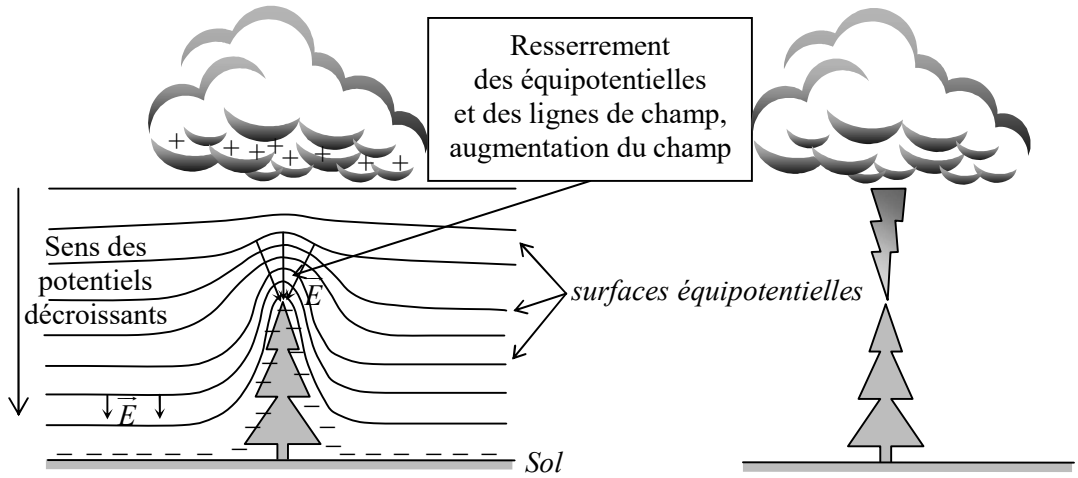
Ainsi en appliquant le théorème de Gauss sur un cylindre à cheval sur l'armature positive (voir exercice 1.3), il vient : $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z}}$.

❑ Méthode 2.4. Comment exploiter la topographie du potentiel et des lignes de champ ?

Lorsque la topographie des lignes de champ est donnée, une compétence importante est de savoir en déduire la forme des surfaces équipotentielles qui sont en tout point normales aux lignes de champ. Inversement, si la topographie des surfaces équipotentielles est donnée, on doit savoir en déduire l'allure des lignes de champ. Pour ce faire, on utilise le fait que $\vec{E}$ est suivant les potentiels décroissants et que le champ est d'autant plus intense que les surfaces équipotentielles se rapprochent, auquel cas les lignes de champs se resserrent.

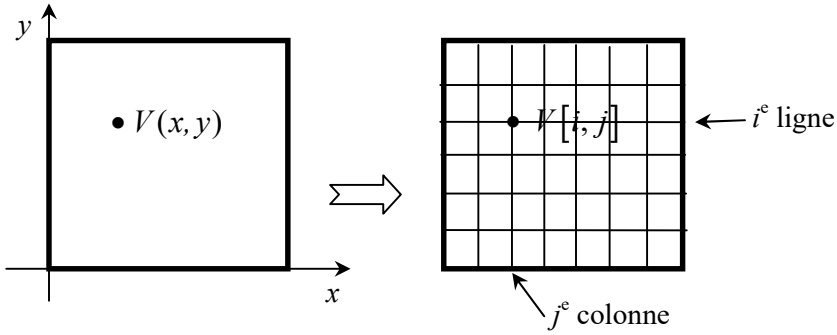
⇨ **Exercices 2.2, 2.8 et 2.9**

Un exemple classique est l'effet de pointe responsable du fait que la foudre tombe préférentiellement sur les pointes conductrices. Durant un orage il apparaît une différence de potentiel entre la base du nuage orageux (chargée positivement) et le sol (chargé négativement). Modélisons une pointe conductrice sur le sol (une personne, un pylône, un arbre...) par un conducteur supposé parfait. À la surface d'un tel conducteur, le champ est normal ou nul, la surface du conducteur est équipotentielle et dans l'espace au voisinage du conducteur, les surfaces équipotentielles sont tangentes à la surface. Les équipotentielles épousent donc la forme du conducteur ce qui engendre un resserrement local des équipotentielles au voisinage de cette pointe par rapport à l'espace alentour. Ce resserrement est d'autant plus marqué que le rayon de courbure de la pointe est faible : c'est l'effet de pointe. Le champ électrostatique augmente alors fortement au voisinage de la pointe, provoquant l'ionisation de l'air qui devient conducteur entre le sol et la base du nuage, ce qui induit le passage d'un courant électrique qui neutralise les charges : la foudre.



❑ Méthode 2.5. Comment tracé des équipotentielles et des lignes de champ en python ?

On réalise pour commencer une discrétisation de l'espace à 2D avec un même pas noté h selon (Ox) et selon (Oy). On obtient alors un maillage de l'espace dont chaque nœud est séparé du plus proche voisin par une distance h, seuls les déplacements suivant (Ox) et selon (Oy) étant autorisés. On "maille" ainsi le plan par un réseau de pas h constant dans les deux directions de l'espace. On obtient un tableau de points de P lignes par N colonnes : x varie donc alors de façon discrète de 0 à $N-1$ et y de 0 à $P-1$. Le potentiel en un point de coordonnées (x,y) est alors celui au nœud correspondant $V(x,y)\rightarrow V[i,j]$: mais i indexant les lignes et j les colonnes à $x\rightarrow x_j$ et $y\rightarrow y_i$, attention à ne pas inverser l'ordre ! Le potentiel sera alors représenté par une matrice de N ligne et P colonnes $V[i,j]\rightarrow V(x_j,y_i)$ où pour $0\leq i<N-1$ et $0\leq j<P-1$.



On va utiliser la fonction `meshgrid(x,y)` de `numpy` pour réaliser ce « quadrillage » 2D maillant l'espace. On peut alors utiliser le maillage ainsi généré pour définir le potentiel électrostatique en chaque point.

Le potentiel créé en M par une charge ponctuelle q placée en P est : $V(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM}$, si le potentiel est posé *nul à l'infini* (potentiel dit coulombien).

D'après le principe de superposition, celui crée en M par q_1 en P_1 et q_2 en P_2 est : $V(M)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{P_1M}+\dfrac{q_2}{P_2M}\right)$. La matrice correspondante sera générée à partir des matrices de coordonnées des nœuds fournies par `meshgrid(x,y)`. On devra veiller à éviter que les distances aux sources puissent tendre vers zéro ce qui serait la cause d'une divergence du potentiel ! On utilisera enfin la fonction contour de `matplotlib.pyplot` pour tracer les lignes équipotentielles, puis en prenant le gradient de la matrice de potentiel on obtiendra les composantes du champ dans le maillage 2D ce qui permettra de tracer les lignes de champs à l'aide de la fonction `streamplot` de `matplotlib.pyplot` également.

Réalisation du maillage 2D : on commence par créer les deux vecteurs `x` et `y` de `xmin` à `xmax` et `ymin` à `ymax` respectivement, avec un pas de `h` . On procède comme suit :
`x=np.arange(xmin,xmax,h)` et `y=np.arange(ymin,ymax,h)`.
On crée le quadrillage 2D en générant deux matrices `X` et `Y` dont les éléments sont respectivement les abscisses `x` et les ordonnées `y` des nœuds du maillage. On dispose pour cela de l'outil de numpy : `np.meshgrid(x,y)`.
Par exemple si on désire créer un maillage pour `x` allant de -2 à 2 par pas de 1 et `y` allant de -3 à 3 par pas de 1 on procède comme suit :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.arange(-2,3,1) #création de la matrice des abscisses allant de 2
#inclus à 3 exclu par pas de 1
y = np.arange(-3,4,1) #création de la matrice des ordonnées allant de 3
#inclus à 4 exclu par pas de 1
X,Y = np.meshgrid(x,y) #affectation à X des abscisses des nœuds du
#maillage et à Y des ordonnées
print (X) #visualisation de X et Y
print(Y)
```

On obtient pour `X` :

```
[[-2 -1  0  1  2]
 [-2 -1  0  1  2]
 [-2 -1  0  1  2]
 [-2 -1  0  1  2]
 [-2 -1  0  1  2]
 [-2 -1  0  1  2]
 [-2 -1  0  1  2]]
```

et pour `Y` :

```
[[-3 -3 -3 -3 -3]
 [-2 -2 -2 -2 -2]
 [-1 -1 -1 -1 -1]
 [ 0  0  0  0  0]
 [ 1  1  1  1  1]
 [ 2  2  2  2  2]
 [ 3  3  3  3  3]]
```

Le nœud de coordonnées $(1,-3)$ se trouve sur l'avant dernière **colonne** de `X` et la 1ère **ligne** de `Y`.

On veut à présent générer la matrice de potentiel crée en M par q_1 en P_1 de coordonnées $(-1,0)$ et q_2 en P_2 de coordonnées (1,0). À l'aide des matrices de coordonnées des nœuds et l'abscisse des charges on définit les matrices de distances :

```
x1=-1
x2=1
```

```
P1M=np.sqrt((X-x1)**2+(Y)**2)   #distance
```
$P_1M = \sqrt{\left(x_M - x_{P_1}\right)^2 + \left(y_M - y_{P_1}\right)^2}$

```
P2M=np.sqrt((X-x2)**2+(Y)**2) #distance
```
$P_2M = \sqrt{\left(x_M - x_{P_2}\right)^2 + \left(y_M - y_{P_2}\right)^2}$

À ce stade, un problème se pose : lorsqu'on se place au voisinage d'une des deux charges, la distance correspondante tend vers zéro ce qui va faire diverger le potentiel. Pour garder une valeur finie du potentiel en tout point du maillage, il convient donc, dans les matrices de distance, de détecter les valeurs inférieures au pas `h` du maillage (plus petite distance dans l'espace discrétisé) et de les poser égale à `h`. Pour éviter d'avoir à parcourir tous les éléments des matrices de distance dans des boucles imbriquées, il est commode d'utiliser du code interprété en extrayant de ces matrices les éléments inférieur à `h` et en leur affectant la valeur `h`, ce qui se code simplement. Le principe est illustré par l'exemple suivant :

```
import numpy as np
x=np.arange(10)
print(x) # renvoie [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9] dont on veut affecter à zéro tous
         #les éléments < à 5, ce qui se code comme suit
x[x<5]=0
print(x) # qui renvoie bien [0 0 0 0 0 5 6 7 8 9]
```

Dans le cas présent on écrira de même pour les matrices de distance :

```
#Affectation à la valeur h de tous les éléments inférieurs à h
P1M[P1M<h]=h
P2M[P2M<h]=h
```

On définit ensuite la matrice de potentiel en chaque nœud, en prenant numériquement $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi}10^{-9}$ (SI) et pour deux charges $q = q_2 = -q_1 = 10^{-7}$ C :

```
q=1.e-7
epsilon0=10**(-9)/(36*np.pi)
K=1/(4*np.pi*epsilon0)
V=K*((-1*q/P1M)+(q/P2M))
```

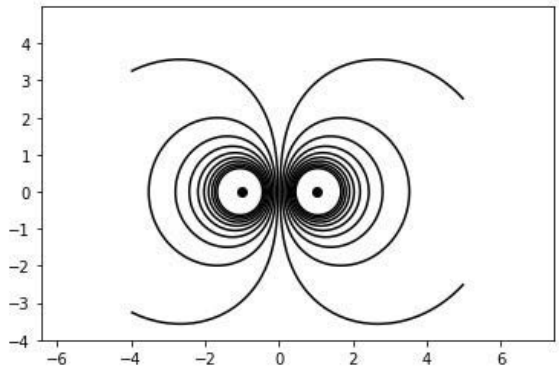
Il reste à présent à tracer un ensemble de lignes équipotentielles sur le maillage. Pour cela on utilise la fonction `plt.contour` de `matplotlib.pyplot` qui trace les lignes d'égales valeurs d'une matrice (ici celle de potentiel). Voyons quels sont les arguments de cette fonction et comment l'utiliser :

Tout d'abord on crée une liste contenant l'ensemble des valeurs du potentiel correspondant à chaque équipotentielle à tracer. Pour cela on remarque que qK/PM = 900 V pour PM = 1 m, ce qui nous conduit par exemple à explorer l'ensemble des 20 équipotentielles également réparties entre les valeurs de -1000 V à 1000 V et à les tracer dans le maillage préalablement défini. On le code comme suit :

```
plt.axis('equal') #obtention d'une échelle isométrique, ou encore avec
#plt.figure(figsize = (5, 5))
```

```
#création d'une échelle de potentiel V pour le tracé de 20 équiV
#régulièrement espacées de -1000 à +1000
echelle=np.linspace(-1000,1000,20)
plt.contour(X,Y,V,echelle, colors='k') #de couleur noire comme blac'k'
plt.plot([-1],[0],'ko')  #trace un point où se trouvent les charges
plt.plot([1],[0],'ko')
plt.show
```

On obtient le résultat suivant :



À noter que pour superposer par la suite les lignes équipotentielles aux lignes de champ, il est commode de tracer les équipotentielles en ligne brisée et les lignes de champ en trait plein. Pour obtenir les équipotentielles en ligne brisée il suffit de le spécifier dans l'argument **`linestyles`** de la fonction contour comme suit :

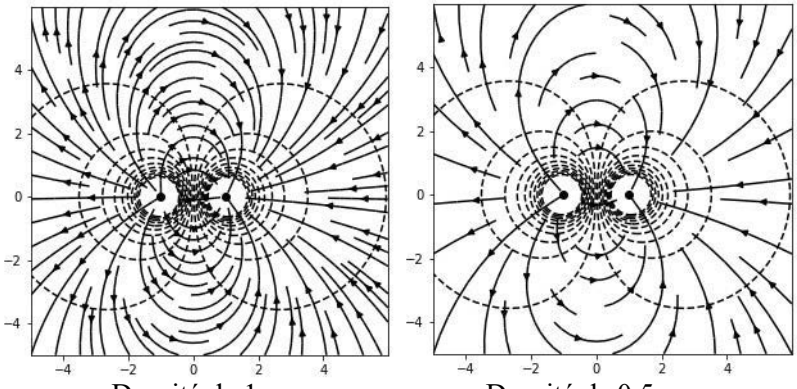
`plt.contour(X,Y,V,echelle,colors='k',linestyles='dashed')`

À présent, on cherche à superposer à ces équipotentielles les lignes de champ. On utilise la fonction `np.gradient` qui appliquée à la matrice de potentiel `V` calcule le gradient de `V` en chaque nœud dans les deux directions de l'espace 2D et renvoie deux matrices relatives aux composantes du champ électrostatique suivant ces deux directions et ayant même taille que la matrice initiale de potentiel : `Ex,Ey=np.gradient(V)`

On peut enfin utiliser `plt.streamplot(X,Y,Ey,Ex,density = 1,color='k')` pour tracer, en tout point du maillage `(X,Y)`, les lignes de champ dont les composantes `(Ex,Ey)` sont contenues dans les matrices renvoyées par `np.grandient`.

On peut adapter la densité (`density =`) en resserrant plus ou moins les lignes de champ.

On obtient les tracés suivants :



Densité de 1 Densité de 0,5

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	La circulation du champ électrostatique est toujours nulle.	☐	☐
2.	On passe du champ au potentiel en dérivant, et du potentiel au champ en intégrant.	☐	☐
3.	Une valeur de potentiel n'a pas de signification physique, seules les différences de potentiel en ont une.	☐	☐
4.	Les surfaces équipotentielles sont parallèles aux lignes de champ.	☐	☐
5.	Le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ Exercice 2.1. Potentiel d'un plan de charges infini

Le champ créé en tout point M de l'espace par un plan infini (Oxy), uniformément chargé en surface avec une densité surfacique σ, vaut $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma \times \mathrm{sgn}(z)}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$ (on rappelle que $\mathrm{sgn}(z) = 1$ pour $z > 0$ et $\mathrm{sgn}(z) = -1$ pour $z < 0$).

1. Calculer le potentiel en M en précisant bien le choix de la constante.

2. Peut-on effectuer ici un calcul direct du potentiel ?

❑ Exercice 2.2. Pouvoir des pointes

Dans cet exercice on cherche à montrer que, pour un potentiel donné, le champ à proximité d'une surface est d'autant plus intense que la surface est « pointue », c'est-à-dire que son rayon de courbure est faible. Ce phénomène s'appelle « pouvoir des pointes » et s'applique particulièrement aux surfaces des conducteurs à l'équilibre électrostatique dont la surface est équipotentielle. Il explique notamment que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus. On modélise le conducteur par une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée en surface au potentiel V. Afin de relier le champ au voisinage de la surface et le potentiel, on calcule d'abord le champ créé par une charge surfacique σ sur la sphère puis on en déduit le potentiel.

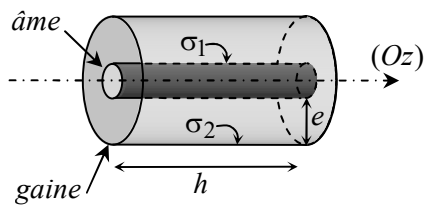
1. Calculer le champ électrique créé en un point M par cette distribution, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, en fonction de r.

2. En déduire l'expression du potentiel en fonction de r, en prenant $V = 0$ à l'infini.

3. En déduire une relation entre le champ et le potentiel en $r = R$ et conclure.

❑ Exercice 2.3. Capacité linéique d'un câble coaxial

On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfaits infiniment longs de même axe (Oz), de sections circulaires. Le premier de rayon R_1 est appelé âme et est porté au potentiel $V_1 > 0$, et le second de rayon intérieur R_2 (où $R_2 > R_1$) est la gaine, portée au potentiel $V_2 < V_1$. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique non magnétique, homogène, linéaire et isotrope, de permittivité relative ε_r que l'on assimilera ici à celle vide ($\varepsilon_r = 1$). Une portion de câble de longueur h forme ainsi un condensateur cylindrique dont les armatures sont constituées des surfaces conductrices en regard. On néglige les effets de bord, c'est-à-dire que l'on considère que le champ entre les armatures est le même que si la hauteur h était infinie. On cherche à exprimer ici sa capacité. Pour cette portion de câble, on désigne par σ_1 la densité surfacique de charges supposée uniforme à la surface de l'âme et par σ_2 celle que porte la surface intérieure de la gaine.



L'équilibre électrostatique étant réalisé, on admet que dans les conducteurs formant l'âme et la gaine le champ est nul ainsi que la densité volumique de charge. Les surfaces des deux conducteurs en regard sont porteuses de charges égales en norme et de signe opposé. On posera $e = R_2 - R_1$, l'espacement radial entre les armatures. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (*Oz*).

1. Dans quelle mesure les effets de bord sont-ils raisonnablement négligeables ? Donner dans le cadre de ce modèle la relation entre σ_1 et σ_2 .

2. a) En raisonnant sur le câble supposé infini, étudier les symétries et les invariances de la distribution de charge. Quelles en sont les conséquences pour le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ en un point *M* dans l'espace entre les armatures ?

b) En appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée Σ dont on justifiera très soigneusement le choix, exprimer le champ électrostatique qui règne dans le diélectrique entre les deux cylindres. En déduire la différence de potentiel *U* entre l'âme et la gaine.

c) En généralisant la définition de la capacité d'un condensateur plan $C = \dfrac{Q}{U}$ où *Q* est la charge portée par son armature positive et *U* la différence de potentiel entre les armatures, exprimer la capacité linéique du câble notée C_l en fonction de ε_0 , R_1 et R_2 .

A.N. : déterminer C_l pour R_1 = 1 mm et R_2 = 2,5 mm. On rappelle que $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi} \cdot 10^{-9}$ F · m^{-1}.

❑ Exercice 2.4. Ligne bifilaire

Une ligne bifilaire est constituée de deux conducteurs rectilignes cylindriques de rayon *a* parallèles entre eux et séparés par une distance *h* telle que *h* >> *a*. On se place dans l'approximation d'une ligne infinie.

Dans un premier temps, on considère un seul conducteur, centré sur l'axe (*Oz*), et on note λ la charge par unité de longueur.

1. Sachant que la charge se répartit uniformément sur la surface du conducteur, donner l'expression de cette charge surfacique σ en fonction de λ et *a*.

2. Déterminer le champ électrique créé à l'extérieur du conducteur (*r* > *a*).

3. En déduire le potentiel créé à l'extérieur du conducteur.

On considère maintenant les deux conducteurs, l'un portant la charge linéique $-\lambda$ et l'autre la charge linéique $+\lambda$.

4. Donner l'expression du potentiel créé par cette ligne bifilaire en un point situé à l'extérieur des conducteurs.

5. Déterminer la différence de potentiel entre les deux conducteurs en fonction de λ, ε_0 et *a*.

6. En considérant une longueur ℓ de ligne bifilaire, en déduire la capacité par unité de longueur associée à cette ligne.

❑ Exercice 2.5. Potentiel d'une sphère uniformément chargée en surface*

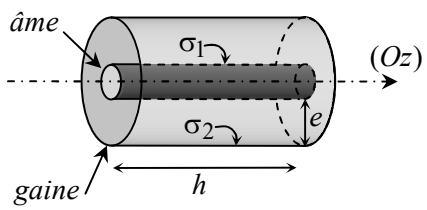
On cherche, sans utiliser le champ obtenu par le théorème de Gauss, le potentiel créé dans tout l'espace par une sphère de centre *O* et de rayon *R* uniformément chargée en surface avec une

charge surfacique σ. On admet que pour une distribution surfacique, l'expression générale du potentiel en un point M est $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \dfrac{\sigma(P)\,\mathrm{d}s}{PM}$.

1. Calculer le potentiel créé par cette distribution en O.
2. On considère maintenant un point M quelconque. Expliquer pourquoi on peut faire le calcul en prenant M sur l'axe (Oz) sans en restreindre la généralité. On notera z_M la position de M sur cet axe.
3. Pour faire le calcul, on repère la position d'un point P à la surface de la sphère avec ses coordonnées sphériques (R, θ, φ). Donner l'expression du potentiel et calculer l'intégrale, sachant qu'un élément de surface infinitésimal de cette sphère s'écrit en coordonnées sphériques $\mathrm{d}s = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Il faudra distinguer deux cas $(z_M < R$ et $z_M > R)$, ce qui apparaîtra dans le calcul via une valeur absolue.

❑ Exercice 2.6. Capacité linéique d'un câble coaxial

On reprend l'exercice 2.3 dans lequel on a montré, en adoptant les coordonnées cylindriques d'axe (Oz), que le champ dans l'espace entre l'âme et la gaine est radial : $\vec{E}(M) = E_r(M)\,\vec{e_r}$ et que le potentiel ne dépend que de r : $V(M) = V(r)$. On cherche à retrouver l'expression de la capacité linéique du câble par l'utilisation des équations locales.



1. Quelle méthode paraît la plus adaptée compte tenu de la forme du potentiel ?
2. Établir l'expression du champ électrostatique dans l'espace entre l'âme et la gaine en fonction de r, de R_1 et R_2 et de la différence de potentiel U entre l'âme et la gaine.
3. Exprimer la charge portée par l'armature positive du condensateur formé par l'âme et la gaine.
4. En généralisant la définition de la capacité d'un condensateur plan $C = \dfrac{Q}{U}$ où Q est la charge portée par son armature positive et U la différence de potentiel entre les armatures, exprimer la capacité linéique du câble notée C_l en fonction de ε_0, R_1 et R_2.

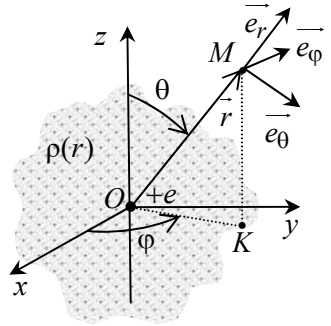
En coordonnées cylindriques d'axe (Oz), le laplacien scalaire est donné par :

$$\nabla^2(\xi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \xi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

❑ Exercice 2.7. Potentiel de Yukawa

Le modèle classique de l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron décrit une orbite circulaire autour du noyau ne permet pas de rendre compte de la stabilité de l'édifice atomique. En effet, un électron accéléré rayonne un champ électromagnétique dont l'énergie est empruntée à son énergie cinétique orbitale. Ainsi, en orbitant, l'électron devrait voir son énergie cinétique diminuer, ce qui réduirait le rayon de son orbite jusqu'à ce qu'il « tombe » sur le noyau.

Cet échec de la théorie classique de l'atome conduit à remplacer, dans un modèle quantique, la notion de trajectoire par celle de densité de probabilité de présence de l'électron dans un volume déterminé de l'espace. On modélise alors l'atome dans son état fondamental comme suit : on considère une densité volumique de charge électronique à symétrie sphérique $\rho(r)$ traduisant le fait que la charge $-e$ de l'électron est diffuse dans tout l'espace autour du noyau supposé ponctuel au point O et de charge $+e$ et on note : $V(r)=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$ le potentiel associé à cette distribution de charge au point M à la distance $r=OM$ du noyau.



1. a) Quelle est la dimension de a ? Donner l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ correspondant.

b) En analysant les cas $r >> a$ et $r << a$, donner une interprétation physique du paramètre a.

c) On donne $E(a)\approx 10^{11}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$, en déduire l'ordre de grandeur de a. Commenter.

2. On cherche à présent à exprimer, par les équations locales, la densité volumique de charge $\rho(r)$ relative à ce modèle de l'atome.

a) Écrire l'équation de Poisson liant les dérivées partielles de $V(r)$ à la densité volumique de charge $\rho(r)$. En déduire que la norme du champ électrostatique $E(r)$ satisfait à l'équation différentielle suivante : $-\dfrac{\mathrm{d}\,E(r)}{\mathrm{d}\,r}-\dfrac{2}{r}E(r)+\dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0}=0$. On rappelle qu'en coordonnées sphériques $\Delta\left(\xi(r)\right)=\nabla^2\left(\xi(r)\right)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\left(\xi(r)\right)}{\partial r}\right)=\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\left(\xi(r)\right)}{\partial r}+\dfrac{\partial^2\left(\xi(r)\right)}{\partial r^2}$.

b) Montrer alors que $\rho(r)$ se met sous la forme $\rho(r)=f(r)\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$ où $f(r)$ est une fonction de r à déterminer en fonction de e, a et r. Vérifier alors que la charge totale Q_{elec} relative à la distribution électronique dans tout l'espace entourant le noyau, correspond à celle de l'électron.

On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} r\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}\,r=a^2$.

c) Exprimer le flux de $\vec{E}$ à travers une sphère de rayon r ainsi que la charge totale contenue dans cette surface fermée dans les deux cas limites : $r\to 0$ et $r\to+\infty$. Comparer la contribution de la charge électronique contenue dans la sphère de rayon r à la charge portée par le noyau. Les résultats sont-ils en adéquation avec l'expression du flux ? Dans le cas où r est de l'ordre de a, on parle d'écrantage partiel de la charge du noyau par celle de l'électron. Justifier qualitativement cette terminologie. Dans quel cas y a-t-il absence d'écrantage ? Dans quel cas a-t-on écrantage total ?