375
exercices corrigés de Physique

PCSI

375 exercices corrigés de Physique

Christophe Bernicot
Jean-Christophe Tisserand

ellipses

Des mêmes auteurs dans la même série

Ouvrages coordonnés par Sylvain Rondy

- 330 exercices corrigés de Physique · ***MPSI***
- 320 exercices corrigés de Physique · ***PTSI***
- 330 exercices corrigés de Physique · ***MP2I***

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Christophe Poulain en LateX.

ISBN 9782340-103818
Dépôt légal : juillet 2025

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Ce livre d'exercices, conçu pour les élèves de PCSI, a pour objectif de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant 375 exercices de difficulté progressive.
Il s'adresse aux élèves qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 29 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

❶ **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.

❷ **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.

❸ **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le QCM de fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.

❹ **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs ont compilé cet abondant vivier d'exercices avec beaucoup d'application et de rigueur et espèrent que ce livre constituera une aide efficace pour le lecteur, non seulement pendant la première année de classe préparatoire, mais aussi par la suite.

Sylvain Rondy

Sommaire

Partie 1 · **Outils pour la physique**

Partie 2 · **Optique**

Partie 3 · Électricité (continu, oscillateur, filtrage)

Partie 4 · **Signaux (propagation, interférence stationnaire)**

Partie 5 · **Mouvements et interactions**

Partie 6 · **Thermodynamique**

Partie 7 · **Induction**

Partie 8 · **Quantique**

Analyse dimensionnelle

1

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. La dimension de la somme de deux grandeurs physiques A et B est égale à la somme des dimensions des grandeurs A et B. Ainsi,

$$[A + B] = [A] + [B]$$

☐ Vrai ☐ Faux

2. L'énergie potentielle de pesanteur E_p a pour dimension $\mathrm{ML^2T^{-2}}$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. Une altitude, une profondeur, une coudée, une année-lumière et un mille nautique sont des grandeurs qui ont toutes la même dimension. ☐ Vrai ☐ Faux

4. N'importe quelle grandeur physique A peut s'exprimer, d'un point de vue dimensionnel, en fonction d'un temps T, d'une longueur L, d'une masse M, d'une température Θ, d'une quantité de matière N et d'une intensité électrique I. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 – Dimensions de grandeurs physiques

1. Donner la dimension d'une vitesse v, du champ de pesanteur g, d'une force $\vec{F}$
2. Donner également la dimension d'une pression P et de l'énergie cinétique E_c.

Exercice 3 – Énergies

On considère, dans cet exercice, un système de masse m placé à une altitude z et se déplaçant à la vitesse v. Son énergie cinétique est notée E_c, son énergie potentielle de pesanteur E_{pes} et son énergie de masse E_m.

1. Montrer que l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie de masse du système ont toutes la même dimension.
2. Une énergie E peut également s'exprimer en fonction d'une force F et d'une distance D. Proposer une relation dimensionnellement correcte entre ces trois grandeurs.

Exercice 4 – Pendule simple

Un pendule simple de masse m et de longueur l est placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Si l'angle n'est pas trop important, il oscille sinusoïdalement avec une pulsation propre ω_0 dont l'expression est

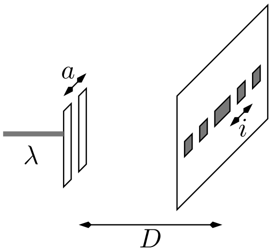
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

1. Sachant que l'unité d'une pulsation ω_0 peut être le $\mathrm{rad.s^{-1}}$, donner sa dimension.

2. Vérifier l'homogénéité de la formule proposée.

Exercice 5 – Interfrange et fentes d'Young

Un faisceau laser monochromatique, de longueur d'onde λ, éclaire un système de double-fentes d'Young, espacée l'une de l'autre d'une distance a. Sur un écran, placé à une distance D des fentes est obtenue une figure d'interférences correspondant à une succession de zones sombres et brillantes. Cette figure est caractérisée par un interfrange i comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous.



1. Parmi les formules suivantes, déterminer laquelle (ou lesquelles) est (sont) dimensionnellement justes ?

$$i = \frac{a\lambda}{D} \qquad i = \frac{a}{\lambda D} \qquad i = \lambda D a \qquad i = \frac{\lambda D}{a}$$

2. A partir d'un raisonnement qualitatif, quelle formule est physiquement correcte ?

Exercice 6 – Chute libre

Une bille de masse m est lancée, sans vitesse initiale, depuis une hauteur H. Sa vitesse v juste avant l'impact sur le sol peut s'écrire sous la forme, si les frottements avec l'air sont négligés,

$$[v] = [m]^{\alpha}\,[H]^{\beta}\,[g]^{\gamma}$$

où g est le champ de pesanteur et α, β et γ sont des constantes sans dimension.

1. Déterminer les paramètres α, β et γ pour que la relation soit homogène.
2. Quelle remarque pouvez-vous faire ?
3. À partir d'un raisonnement vu en Terminale, retrouver la relation précédente.

Exercice 7 – Simple vitrage

La température, qui règne dans un appartement, est notée T_A. De la même manière, la température extérieure est notée T_0. En supposant qu'il fait plus froid dehors que dedans, on en déduit que $T_A > T_0$. Pour caractériser les fuites thermiques présentes dans une fenêtre simple vitrage d'épaisseur e et de surface S, on utilise la notion de résistance thermique R. Par définition, la résistance thermique de la fenêtre est, si on ne prend en compte que la conduction et si on néglige la convection et la radiation

$$R = \frac{e}{\lambda S}$$

où λ est la conductivité thermique du verre.

1. Rappeler la dimension du flux de chaleur φ traversant la fenêtre sachant que son unité, dans le système international, est le Watt.
2. Donner la dimension de la densité de flux de chaleur j qui est égal, par définition, au flux de chaleur φ traversant la fenêtre par unité de surface.

3. Donner la dimension de la conductivité λ sachant que la densité de flux de chaleur j est reliée au gradient de température par la loi empirique de Fourier

$$j = \lambda \frac{T_A - T_0}{e}$$

4. En déduire la dimension de la résistance thermique R de la fenêtre.

Exercice 8 – Pompe centrifuge

L'étude expérimentale des pompes centrifuges fait intervenir des coefficients de similitude appelés nombres de Râteau. L'un de ces coefficients est le nombre de puissance N_p, sans dimension, défini par

$$N_p = \frac{P_m}{\rho \omega^\alpha D^5}$$

où P_m est la puissance mécanique fournie par la roue de la pompe, de diamètre D, au liquide de masse volumique ρ. On rappelle que la vitesse angulaire ω avec laquelle tourne la roue s'exprime usuellement en tour par minute (tr.min^{-1}).

1. Rappeler la dimension d'une masse volumique.
2. Donner la dimension de la vitesse angulaire ω.
3. Montrer que la dimension de la puissance mécanique P_m est

$$[P_m] = M.L^2.T^{-3}$$

4. Que doit valoir le paramètre α pour que le nombre de puissance N_p soit effectivement sans dimension ?

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 9 – Io et Jupiter

Le satellite Io, de masse m, est en orbite circulaire de rayon R_J autour de Jupiter de masse M_J. La période de révolution du satellite autour de Jupiter est notée T_0 et la constante de gravitation universelle est notée $\mathcal{G}$.

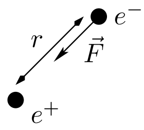
1. Rappeler l'expression de la norme de la force d'interaction gravitationnelle F de Jupiter sur Io.
2. En déduire la dimension de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$.
3. Proposer, par analyse dimensionnelle, une expression de T_0 en fonction de $\mathcal{G}$, M_J et R_J.
4. Comparer la relation précédente avec celle obtenue à l'aide de la troisième loi de Kepler, appelée aussi loi des périodes.

Exercice 10 – Constante de structure fine α

En physique des particules, la force d'interaction électrostatique entre un proton et un électron de charges respectives $+e$ et $-e$ a pour expression

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

où ε_0 est la permittivité du vide et r la distance entre les deux particules comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous.



En sus, la constante de structure fine α est une constante associée à l'interaction électromagnétique. Elle est définie par

$$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}$$

où e est la charge élémentaire, c est la célérité de la lumière dans le vide et h est la constante de Planck. Les valeurs numériques de ces différentes constantes sont les suivantes

Données :
$h = 6,626\,0701\,5.10^{-34}$ J.s
$c = 299\,792\,458$ m.s^{-1}
$e = 1,602\,176\,634.10^{-19}$ C
$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,82.10^{-12}$ F.m^{-1}

1. Donner la dimension de la constante de Planck h à partir des données.
2. Montrer que la constante de structure fine α est sans dimension.
3. L'inverse de la constante de structure fine est-il un nombre entier ?

Exercice 11 – Frottement visqueux

Une bille sphérique de masse m et de rayon R est plongée dans du miel de viscosité η et de masse volumique ρ. Lors de sa chute dans le miel, elle est soumise, lorsque sa vitesse $\vec{v}$ n'est pas trop importante, à une force de frottement $\vec{F}$, appelée force de Stokes, dont l'expression est

$$\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$$

L'écoulement du miel autour de la bille est caractérisé par un nombre, noté Re, appelé nombre de Reynolds, défini par

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v R}{\eta}$$

1. Rappeler la dimension de la force $\vec{F}$.
2. En déduire la dimension de la viscosité η du miel.
3. Donner la dimension du nombre de Reynolds Re.

Exercice 12 – Un peu d'électricité

Un générateur idéal de tension de force électromotrice E alimente un circuit constitué d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R placés en série. L'évolution temporelle de la charge $q(t)$ du condensateur, initialement déchargé, est

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{avec} \quad \tau = RC$$

1. Déterminer la dimension du paramètre τ.
2. Vérifier l'homogénéité de la relation.

Pour aller plus loin

Exercice 13 – Dualité onde-particule

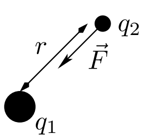
L'aspect ondulatoire d'un électron non relativiste de masse m et possédant une énergie cinétique E est caractérisé par sa longueur d'onde λ. On rappelle que la constante de Planck h vaut $6,62.10^{-34}$ J.s.

1. Donner la dimension de la constante de Planck h à l'aide de son unité.
2. Proposer une relation entre la longueur d'onde λ, la masse m, l'énergie cinétique E et la constante de Planck h.
3. Comparer la relation obtenue avec celle trouvée à l'aide de la formule de de Broglie pour laquelle à n'importe quelle particule de quantité de mouvement p peut être associée une onde de longueur d'onde λ avec

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Exercice 14 – Célérité de la lumière dans le vide

On considère deux particules, notées 1 et 2, de charges opposées respectives q_1 et q_2 comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous.



Si elles sont distantes de r, la force d'interaction électrostatique $\vec{F}$ de la première particule sur la seconde vaut

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e_r}$$

où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques et ε_0 la permittivité du vide. On rappelle que la perméabilité du vide μ_0 vaut $\mu_0 = 4\pi.10^7$ kg.m.A^{-2}.s^{-2}.

1. Donner la dimension de la permittivité du vide ε_0.
2. Monter qu'il existe une relation simple entre la permittivité ε_0, la perméabilité μ_0 et la célérité de la lumière dans le vide c.

Exercice 15 – Le QCM de fin

1. La dimension de l'intégrale d'une grandeur physique A par rapport à B a pour dimension

$$\left[\int A \mathrm{d}B\right] = \frac{[A]}{[B]}$$

☐ Vrai ☐ Faux

2. Une grandeur physique sans dimension n'a pas d'unités. ☐ Vrai ☐ Faux

3. La constante de gaz parfaits R a pour dimension $ML^2T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La dimension de la somme (ou de la différence) de deux grandeurs physiques A et B est égale à la dimension de A (et à la dimension de B) :

$$[A+B] = [A] = [B]$$

☐ Vrai ⊠ Faux

2. Toutes les énergies ont la même dimension. En effet, l'énergie potentielle de pesanteur a pour dimension

$$[E_p] = [mgz] = [m][g][z] = M \times LT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$$

⊠ Vrai ☐ Faux

3. Toutes ces grandeurs ont la dimension d'une longueur L. ⊠ Vrai ☐ Faux

4. Il manque l'intensité lumineuse J. En effet, toute grandeur physique A peut s'exprimer en fonction des sept grandeurs fondamentales suivantes : T (temps), L (longueur), M (masse), Θ (température), N (quantité de matière), I (intensité électrique) et J (intensité lumineuse).

☐ Vrai ⊠ Faux

Exercice 2 –

1. En utilisant quelques formules de base en physique, on aboutit à la dimension des différentes grandeurs. Ainsi, grâce à la définition de la vitesse d'un point matériel dans le cas unidimensionnel, il vient

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad [v] = \frac{[x]}{[t]} = LT^{-1}$$

À retenir

La dimension de la dérivée n-ième d'une grandeur physique A par rapport à B a pour dimension

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n A}{\mathrm{d}B^n}\right] = \frac{[A]}{[B]^n}$$

Dans le cas de la chute libre, l'accélération d'un point matériel est égale au champ de pesanteur.

Ainsi

$$\vec{g} = \vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad [\vec{g}] = [\vec{a}] = LT^{-2}$$

Par ailleurs, l'utilisation de la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique), on en déduit que

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad [\vec{F}] = [m][\vec{a}] = MLT^{-2}$$

À retenir

La dimension du produit de deux grandeurs physiques A et B est égale au produit des dimensions de A et B :

$$[A \times B] = [A] \times [B]$$

2. La pression P dans un fluide étant homogène à une force F par unité de surface S, on aboutit à

$$P = \frac{F}{S} \qquad \Rightarrow \qquad [P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}\,T^{-2}$$

À retenir

La dimension du quotient de deux grandeurs physiques A et B est égale au quotient des dimensions de A et B :

$$\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]}$$

La définition de l'énergie cinétique conduit à

$$\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\mathscr{E}_{\mathrm{c}}] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 = ML^2T^{-2}$$

À retenir

La dimension de la puissance n-ième d'une grandeur physique A est égale à la puissance n-ième de la dimension de A :

$$[A^n] = [A]^n$$

Exercice 3 –

1. Sachant que la vitesse v est homogène au rapport d'une longueur sur un temps, on en déduit que la dimension de l'énergie cinétique E_c est

$$\begin{aligned}[E_c] &= \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 \\ &= M.(L.T^{-1})^2 \\ &= M.L^2.T^{-2}\end{aligned}$$

Sachant que le champ de pesanteur g est homogène à une accélération et que l'altitude z est homogène à une longueur, on en déduit que

$$\begin{aligned}[E_{pes}] = [mgz] &= [m][g][z] \\ &= M.(L.T^{-2}).L \\ &= M.L^2.T^{-2}\end{aligned}$$

Sachant que la célérité de la lumière c est homogène à une vitesse, la dimension de l'énergie de masse du système est alors

$$\begin{aligned}[E_m] = [mc^2] &= [m][c]^2 \\ &= M.(L.T^{-1})^2 \\ &= M.L^2.T^{-2}\end{aligned}$$

Les trois grandeurs ont donc bien la même dimension. Elles sont toutes homogènes à une énergie.

2. Une énergie E est liée à une force F et à une distance D s'il existe des nombres sans dimension α et β tels que

$$[E] = [F]^\alpha [D]^\beta$$

Sachant qu'une force est, d'après la seconde loi de Newton, homogène au produit d'une masse et d'une accélération et en utilisant la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}M.L^2.T^{-2} &= (M.L.T^{-2})^\alpha.L^\beta \\ &= M^\alpha.L^{\alpha+\beta}.T^{-2\alpha}\end{aligned}$$

Par identification, on aboutit au système suivant

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha = -2 \end{cases}$$

La résolution du système d'équations donne immédiatement

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Finalement les trois grandeurs sont liées et une énergie est homogène au produit d'une force et d'une distance puisque

$$[E] = [F]^1 \times [D]^1 = [F] \times [D]$$

Exercice 4 –

1. La pulsation propre ω_0 a pour unité, dans le système international, le rad.s^{-1}. Elle est donc homogène au quotient d'un angle, qui n'a pas de dimension, et d'un temps. De la même manière, elle est reliée à la période propre T_0 des oscillations par la relation

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \Rightarrow \qquad [\omega_0] = \left[\frac{2\pi}{T_0}\right] = \frac{[2\pi]}{[T_0]} = T^{-1}$$

2. En outre, puisque le champ de pesanteur est homogène à une accélération, il vient

$$\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\right] = \sqrt{\left[\frac{g}{l}\right]} = \sqrt{\frac{[g]}{[l]}} = \sqrt{\frac{LT^{-2}}{L}} = T^{-1}$$

Les deux membres ont la même dimension. La relation est par conséquent homogène.

Méthode

Pour s'assurer qu'une équation est homogène, il suffit de vérifier que les deux membres de cette dernière ont même dimension. Par contraposition, si les deux membres de l'équation ont des dimensions différentes, elle est nécessairement fausse.

Exercice 5 –

1. Par définition, une longueur d'onde a pour dimension une longueur L. Il en est de même pour l'espacement entre les fentes a et pour la distance D entre l'écran et les fentes d'Young. Par ailleurs, l'interfrange étant la distance entre deux zones sombres (ou brillantes) successives, on en déduit qu'il est aussi homogène à une longueur L. Ainsi

$$[i] = L \qquad \left[\frac{a\lambda}{D}\right] = L \qquad \left[\frac{a}{\lambda D}\right] = L^{-1} \qquad [\lambda D a] = L^3 \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\lambda D}{a}\right] = L$$

Finalement, les seules formules qui soient homogènes sont

$$i = \frac{a\lambda}{D} \qquad \text{et} \qquad i = \frac{\lambda D}{a}$$

2. Plus l'écran est éloigné, plus l'interfrange i est important. De la même manière, plus l'espacement entre les fentes a est grand, plus l'interfrange i est faible car les effets ondulatoires sont peu marqués. En conclusion, la seule formule qui soit compatible avec ces deux constats qualitatifs est

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

Exercice 6 –

1. Sachant que la masse m de la bille a pour dimension M et que sa vitesse a pour dimension $\mathrm{L.T^{-1}}$, on en déduit que l'équation aux dimensions donne, puisque $[H]$=L,

$$\mathrm{L.T^{-1}} = \mathrm{M}^{\alpha}\,\mathrm{L}^{\beta}\,[g]^{\gamma}$$

Le champ de pesanteur étant homogène à une accélération, il vient finalement,

$$\begin{aligned}\mathrm{L.T^{-1}} &= \mathrm{M}^{\alpha}\,\mathrm{L}^{\beta}\,(\mathrm{L.T^{-2}})^{\gamma}\\ &= \mathrm{M}^{\alpha}\,\mathrm{L}^{\beta+\gamma}\,\mathrm{T}^{-2\gamma}\end{aligned}$$

Pour que cette relation soit homogène, il faut que les membres de gauche et de droite aient la même dimension. Ainsi il vient, par identification,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \end{cases}$$

La résolution du système d'équations donne immédiatement

$$\begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & \frac{1}{2} \\ \gamma & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, la vitesse v de la bille peut se mettre sous la forme

$$[v] = [m]^0\,[H]^{\frac{1}{2}}\,[g]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{[g][H]}$$

2. La vitesse de chute libre v est indépendante de la masse m de la bille.
3. Puisque la chute se fait sans frottement, la conservation de l'énergie mécanique implique que l'énergie mécanique initiale est égale à l'énergie mécanique juste avant l'impact. Par conséquent,

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mgH \\ \Rightarrow v^2 &= 2gH \\ \Rightarrow v &= \sqrt{2gH} \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat que celui obtenu dans l'avant-dernière question à l'exception du préfacteur $\sqrt{2}$ qui ne peut être obtenu par analyse dimensionnelle car il est sans dimension.

On aurait aussi pu retrouver ce résultat à l'aide de la seconde loi de Newton.

Exercice 7 –

1. La puissance est le rapport d'une énergie sur un temps. En utilisant la dimension d'une énergie, on aboutit alors à la dimension du flux de chaleur φ. Ainsi,

$$[\varphi] = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}$$

2. La densité de flux de chaleur j étant, par définition, $\varphi = jS$ où S est la surface de la fenêtre, on en déduit que

$$[j] = \frac{[\varphi]}{[S]} = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2} = MT^{-3}$$

3. D'après la loi de Fourier, la dimension de la conductivité thermique λ est

$$[\lambda] = \frac{[j][e]}{[T_A - T_0]} = \frac{MT^{-3} \times L}{\Theta} = MT^{-3}L\Theta^{-1}$$

4. En utilisant la définition de la résistance thermique, on en déduit que

$$[R] = \frac{[e]}{[\lambda][S]} = \frac{L}{MT^{-3}L\Theta^{-1} \times L^2} = M^{-1}T^3L^{-2}\Theta$$

Exercice 8 –

1. Une masse volumique étant, par définition, le rapport d'une masse sur un volume, on en déduit que sa dimension est
$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3} = M.L^{-3}$$
2. En utilisant l'unité usuelle rappelée dans l'énoncé, on peut affirmer qu'une vitesse angulaire est le rapport d'un angle par un temps. Un angle n'ayant pas de dimension, la dimension de la vitesse angulaire est par conséquent
$$[\omega] = \frac{1}{T} = T^{-1}$$
3. Sachant qu'une puissance est, d'un point de vue dimensionnel, le rapport d'une énergie E sur un temps T, on en déduit que
$$[P_m] = \frac{[E]}{T} = [E].T^{-1}$$
Pour déterminer la dimension d'une énergie E, on peut utiliser, par exemple, la définition de l'énergie cinétique. Par conséquent,
$$\begin{aligned}[P_m] &= \frac{\left[\frac{1}{2}mv^2\right]}{T} = \frac{\left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2}{T} \\ &= \frac{M.(L.T^{-1})^2}{T} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{T} = M.L^2.T^{-3}\end{aligned}$$
4. La grandeur $\frac{P_m}{\rho\omega^\alpha D^5}$ a pour dimension, puisque le diamètre de la roue est homogène à une longueur L,
$$\left[\frac{P_m}{\rho\omega^\alpha D^5}\right] = \frac{[P_m]}{[\rho][\omega]^\alpha[D]^5} = \frac{M.L^2.T^{-3}}{(M.L^{-3}).(T^{-1})^\alpha.L^5} = \frac{M.L^2.T^{-3}}{M.L^2.T^{-\alpha}} = T^{-3+\alpha}$$
Si α est égal à 3, la grandeur précédente est sans dimension et, par conséquent, le nombre de puissance est effectivement adimensionné.

Exercice 9 –

1. Par définition, la force d'interaction gravitationnelle de Jupiter sur Io est
$$F = \frac{\mathscr{G}mM_J}{d^2}$$
où d est la distance entre la planète et son satellite.
2. Sachant qu'une force a la même dimension que le produit d'une masse et d'une accélération, il vient, par analyse dimensionnelle,
$$[\mathscr{G}] = \left[\frac{Fd^2}{mM_J}\right] = \frac{MLT^{-2}\times L^2}{M\times M} = M^{-1}L^3T^{-2}$$
3. La période de révolution T_0 de Io peut se mettre sous la forme
$$[T_0] = [R_J]^A[\mathscr{G}]^B[M_J]^C$$

où A, B et C sont des nombres sans dimension que l'on cherche à déterminer. Sachant que la période de révolution a pour dimension T et en utilisant le résultat de la question précédente, il vient, par analyse dimensionnelle,

$$T = L^A (M^{-1}L^3T^{-2})^B M^C = L^{A+3B}M^{-B+C}T^{-2B}$$

Pour que cette relation soit homogène, il faut que les membres de gauche et de droite aient la même dimension. Ainsi il vient, par identification,

$$\begin{cases} A+3B &= 0 \\ -B+C &= 0 \\ -2B &= 1 \end{cases}$$

Après résolution du système, on aboutit à

$$\begin{cases} A &= \frac{3}{2} \\ C &= -\frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement, on parvient à la relation suivante

$$[T_0] = [R_J]^{\frac{3}{2}} [\mathcal{G}]^{-\frac{1}{2}} [M_J]^{-\frac{1}{2}}$$

Enfin, en élevant au carré la formule précédente, on aboutit à

$$\frac{[T_0]^2}{[R_J]^3} = \frac{1}{\sqrt{[\mathcal{G}][M_J]}}$$

4. D'après la troisième loi de Kepler, la période de révolution T_0 du satellite est reliée au rayon R_J de son orbite circulaire par la relation

$$\frac{T_0^2}{R_J^3} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{\mathcal{G}M_J}}$$

On retrouve bien la même formule que dans la question précédente. Il manque simplement le préfacteur $4\pi^2$ qui ne pouvait pas être obtenu par analyse dimensionnelle car il est adimensionné.

Exercice 10 –

1. Sachant que l'unité, dans le système international, de la constante de la Planck est J.s, on en déduit qu'elle est homogène au produit d'une énergie E et d'un temps T. Ainsi,

$$[h] = [E].T$$

En utilisant par exemple le définition de l'énergie cinétique, il est possible de déterminer la dimension d'une énergie. Par conséquent, la constante de Planck est homogène à

$$\begin{aligned}[h] &= \left[\frac{1}{2}mv^2\right].T = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2.T \\ &= M.(L.T^{-1})^2.T \\ &= M.L^2.T^{-1}\end{aligned}$$

2. En utilisant l'expression de la force d'interaction électrostatique, le rapport $\frac{e^2}{\varepsilon_0}$ est homogène au produit d'une force et d'une distance au carré car

$$\frac{e^2}{\varepsilon_0} = \left[4\pi r^2\vec{F}\right] = [4][\pi][r]^2[\vec{F}] = [r]^2[\vec{F}]$$

Sachant qu'une force est homogène au produit d'une masse et d'une accélération, on trouve

$$\left[\frac{e^2}{\varepsilon_0}\right] = L^2.(M.L.T^{-2}) = M.L^3.T^{-2}$$

En utilisant ce résultat ainsi que celui de la première question, la constante de structure fine α a alors pour dimension

$$\begin{aligned}[\alpha] &= \left[\frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}\right] = \frac{1}{[2][h][c]} \times \left[\frac{e^2}{\varepsilon_0}\right] \\ &= \frac{M.L^3.T^{-2}}{M.L^2.T^{-1}.(L.T^{-1})} \\ &= \frac{M.L^3.T^{-2}}{M.L^3.T^{-2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

La constante de structure fine α est donc effectivement adimensionnée.

3. La valeur numérique de l'inverse de la constante de structure fine est

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2\varepsilon_0 hc}{e^2} \simeq 137,...$$

On constate que cette valeur est pratiquement entière mais en toute rigueur ce n'est pas le cas.

> Longtemps, on a cru que l'entier 137 avait un statut très particulier en physique des particules.

Exercice 11 –

1. D'un point de vue dimensionnel, une force est le produit d'une masse et d'une accélération. Ainsi

$$[\vec{F}] = M \times LT^{-2} = MLT^{-2}$$

2. Sachant que le rayon R de la bille a la dimension d'une longueur et que la vitesse $\vec{v}$ de cette dernière est le quotient d'une longueur et d'un temps, il vient, par analyse dimensionnelle,

$$[\eta] = \frac{[\vec{F}]}{[6\pi R\vec{v}]} = \frac{[\vec{F}]}{[6\pi]\,[R]\,[\vec{v}]} = \frac{MLT^{-2}}{1 \times L \times LT^{-1}}$$

Finalement, la dimension de la viscosité est, après simplification,

$$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

3. Sachant que la masse volumique ρ est le rapport d'une masse sur une volume, on trouve

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$$

Le nombre de Reynolds a par conséquent pour dimension

$$[\mathrm{Re}] = \left[\frac{\rho v R}{\eta}\right] = \frac{ML^{-3} \times LT^{-1} \times L}{ML^{-1}T^{-1}} = \frac{L^{-1}}{L^{-1}} = 1$$

En conclusion, le nombre de Reynolds est sans dimension.

Exercice 12 –

1. En utilisant les relations tension-intensité pour le condensateur et pour le conducteur ohmique, il vient

$$u_R = Ri \qquad \text{et} \qquad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi

$$[RC] = [R][C] = \left[\frac{u_R}{i}\right]\left[\frac{i}{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}\right] = \frac{[u_R]}{[i]}\frac{[i][t]}{[u_C]} = [t] = T$$

Par conséquent, la constante τ est homogène à un temps.

2. Par définition, l'intensité i du courant est égale à la dérivée de la charge q par rapport au temps. Il vient alors

$$[i] = \left[\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{[q]}{T} = I$$

La charge a donc pour dimension le produit d'une intensité I et d'un temps T. De la même manière, puisque l'argument de l'exponentielle est sans dimension, on a

$$\left[CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] = [C][E]\left[1 - e^{-t/\tau}\right] = [C][E][1] = [C][E]$$

> **À retenir**
>
> L'argument des fonctions cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme, logarithme népérien, ... n'a pas de dimension.

D'après la question précédente, on a vu que l'intensité du courant qui traverse un condensateur est égal au produit de la capacité C et de la dérivée temporelle de la tension u_C. Par conséquent

$$[i] = I = \left[C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right] = [C]\frac{[u_C]}{[t]} = [C]\frac{[u_C]}{T} \quad \Rightarrow \quad [C][u_C] = IT = [C][E]$$

On en déduit alors que

$$\left[CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] = IT$$

Les deux membres ont la même dimension. L'équation est donc homogène.

Exercice 13 –

1. Sachant que l'unité de la constante de Planck h est J.s, on en déduit que sa dimension est le produit d'une énergie par un temps. Ainsi,

$$[h] = ML^2T^{-2} \times T = ML^2T^{-1}$$

2. On suppose que la longueur d'onde λ de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$[\lambda] = [m]^A [E]^B [h]^C$$

où A, B et C sont des nombres sans dimension que l'on cherche à déterminer. En utilisant la première question et puisque la longueur d'onde est homogène à une longueur et que l'énergie cinétique a la dimension d'une énergie, on en déduit que

$$L = M^A (ML^2T^{-2})^B (ML^2T^{-1})^C = M^{A+B+C}L^{2B+2C}T^{-2B-C}$$

Pour que cette relation soit homogène, il faut que les membres de gauche et de droite aient la même dimension. Ainsi, il vient, par identification,

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B+C & = & 0 \\ 2B+2C & = & 1 \\ -2B-C & = & 0 \end{array}\right.$$

Après résolution du système d'équations, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & -\frac{1}{2} \\ B & = & -\frac{1}{2} \\ C & = & 1 \end{array}\right.$$

Finalement, on aboutit à la relation suivante

$$[\lambda] = [m]^{-\frac{1}{2}} [E]^{-\frac{1}{2}} [h]^1 = \frac{[h]}{\sqrt{[m]\,[E]}}$$

3. D'après la relation de de Broglie, la longueur d'onde λ de l'électron vaut

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

où p est la quantité de mouvement de l'électron. Sachant que la quantité de mouvement est reliée à l'énergie cinétique par la relation

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

on en déduit que

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

c'est-à-dire, en isolant la longueur d'onde λ,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

On retrouve bien le même résultat que dans la question précédente. Il manque uniquement le préfacteur sans dimension $\sqrt{2}$ qui ne pouvait pas être obtenu par analyse dimensionnelle.

Exercice 14 –

1. Sachant qu'une charge a pour dimension le produit d'une intensité et d'un temps et qu'une force le produit d'une masse et d'une accélération, on en déduit que

$$[\varepsilon_0] = \frac{[q_1][q_2]}{[4\pi][\vec{F}_{1\to 2}][r^2]} = \frac{(IT)^2}{1 \times MLT^{-2} \times L^2} = \frac{I^2T^2}{ML^3T^{-2}}$$

Finalement, on obtient $[\varepsilon_0] = I^2T^4M^{-1}L^{-3}$

2. On recherche une relation entre la permittivité ε_0, la perméabilité μ_0 et la célérité de la lumière dans le vide c sous la forme

$$[c] = [\varepsilon_0]^A[\mu_0]^B$$

où A et B sont des nombres sans dimension que l'on cherche à déterminer. Sachant que la perméabilité du vide μ_0, grâce à son unité donnée dans l'énoncé, a pour dimension $MLI^{-2}T^{-2}$ et en utilisant le résultat de la question précédente, il vient, par analyse dimensionnelle,

$$LT^{-1} = (I^2T^4M^{-1}L^{-3})^A(MLI^{-2}T^{-2})^B = I^{2A-2B}T^{4A-2B}M^{-A+B}L^{-3A+B}$$

Pour que cette relation soit homogène, il faut que

$$\begin{cases} 2A - 2B &= 0 \\ 4A - 2B &= -1 \\ -A + B &= 0 \\ -3A + B &= 1 \end{cases}$$

Après résolution du système, on aboutit à $A = B = -1/2$. Les trois grandeurs sont liées et on a

$$[c] = [\varepsilon_0]^{-\frac{1}{2}}[\mu_0]^{-\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad [c] = \frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_0][\mu_0]}}$$

Exercice 15 –

1. La dimension de l'intégrale d'une grandeur physique A par rapport à B a pour dimension $\left[\int A\mathrm{d}B\right] = [A] \times [B]$ ☐ Vrai ☒ Faux

2. Certaines grandeurs physico-chimiques sans dimension, comme par exemple l'indice de réfraction n, le potentiel hydrogène pH ou la densité d'un gaz n'ont effectivement pas d'unités. Cependant, d'autres grandeurs, comme par exemple le niveau sonore ou un angle, n'ont pas de dimension mais possède une unité. En effet un angle peut se mesurer en degrés (°), en radians (rad), en minutes d'arc ('), en tours (tr), ... ☐ Vrai ☒ Faux

3. D'après la loi des gaz parfaits, on a $PV = nRT$. Puisque le produit PV est homogène au travail des forces pressantes, on en déduit que le produit d'une pression P et d'un volume V a la dimension d'une énergie. On aboutit alors à ☒ Vrai ☐ Faux

$$[R] = \frac{[PV]}{[n][T]} = \frac{ML^2T^{-2}}{N \times \Theta} = ML^2N^{-1}T^{-2}\Theta^{-1}$$

Outils mathématiques 2

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. La solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier (second) ordre à coefficients constants fait apparaître une (deux) constante(s) d'intégration. Pour le(s) déterminer, on peut utiliser la (les) condition(s) initiale(s).

☐ Vrai ☐ Faux

2. La solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

est de la forme, si le facteur qualité Q est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$,

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

où A et B sont deux constantes à déterminer.

☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 – Principe de superposition

On considère dans cet exercice f_1 et f_2 deux fonctions solutions d'une même équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

1. Montrer que toute combinaison linéaire de f_1 et f_2 est également solution de l'équation différentielle si elle est du premier ordre.
2. Montrer que toute combinaison linéaire de f_1 et f_2 est également solution de l'équation différentielle si elle est du second ordre.

Exercice 3 – Circuit RC série

Dans un circuit RC série alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice E, la tension u_C aux bornes du condensateur, initialement déchargé, vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique.
2. Sachant que $u_C(0) = 0$, en déduire l'évolution temporelle de la tension u_C.

Exercice 4 – Rails de Laplace

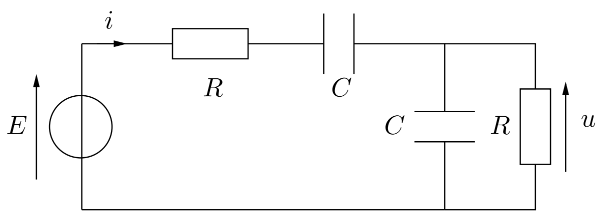
On considère une tige en cuivre de longueur L, de masse m et de résistance r qui peut se déplacer rectilignement. Elle est déposée sur des rails métalliques alimentés par un générateur idéal de tension de force électromotrice E. L'ensemble du circuit est soumis à un champ magnétique $\vec{B}$. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la tige, initialement immobile, est

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2L^2}{rm}v + \frac{EBL}{rm}$$

1. Mettre sous forme canonique l'équation différentielle et donner sa solution générale.
2. En déduire l'expression de la vitesse v de la tige en fonction du temps.

Exercice 5 – Filtre de Wien

En électricité, un filtre de Wien est constitué de l'association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C, eux-mêmes placés en série avec un condensateur de même capacité et un conducteur ohmique identique. Ces deux derniers sont mis en parallèle comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous.



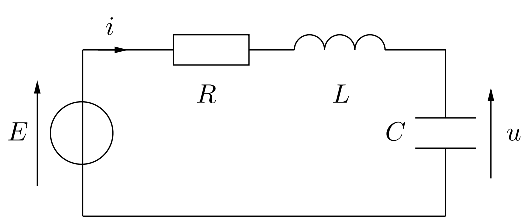
L'ensemble est alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice E. L'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du dipôle RC parallèle est alors

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2}u = 0$$

1. Déterminer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du circuit et mettre l'équation différentielle sous forme canonique.
2. Donner l'évolution temporelle de la tension u si les deux condensateurs sont initialement déchargés, c'est-à-dire si $u(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{E}{RC}$.

Exercice 6 – Circuit RLC série

Comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous, on considère un circuit constitué d'un condensateur idéal de capacité $C = 1\,\mu\text{F}$, d'un conducteur ohmique de résistance $R = 200\,\Omega$ et d'une bobine parfaite d'inductance $L = 10\,\text{mH}$ placés en série.



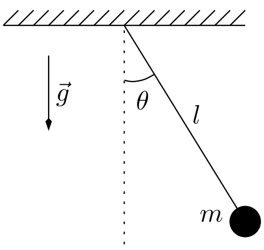
L'ensemble est alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice E. On admet que l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur est

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}$$

1. Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q du circuit ainsi que leurs valeurs numériques.
2. Donner l'évolution temporelle de la tension u si $u(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Exercice 7 – Pendule simple

Comme on peut le voir sur le schéma ci-contre, un solide de masse m, assimilé à un point matériel, est accroché, par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l, au plafond. Sa position est repérée par l'angle θ que fait le fil du pendule avec la direction verticale. On suppose qu'il est lancé avec une vitesse angulaire initiale positive $\frac{d\theta}{dt}(0) = \frac{v_0}{l}$ depuis la position angulaire $\theta(0) = \theta_0$. Si l'angle θ est petit, on admet que l'équation différentielle du second ordre vérifiée par ce dernier est



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

où g est le champ de pesanteur.

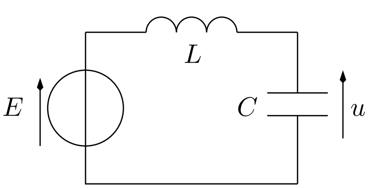
1. Donner la solution générale de l'équation différentielle.
2. Montrer que l'évolution temporelle de θ est

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0 l}\sin(\omega_0 t)$$

où ω_0 est une pulsation propre dont on donnera l'expression en fonction de l et g.

Exercice 8 – Circuit LC série

Un générateur idéal de tension de force électromotrice E est branché en série à une bobine parfaite d'inductance L et un condensateur de capacité C comme on peut le voir sur le schéma ci-contre. On admet que la tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants suivante



$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + u = E$$

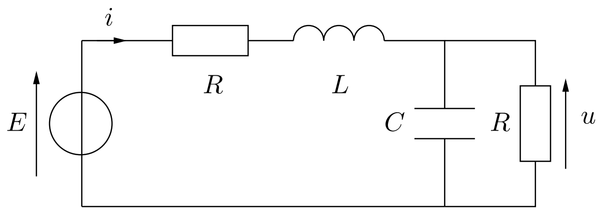
Enfin, on suppose qu'initialement le condensateur est déchargé, c'est-à-dire que $u(0) = 0$ et qu'aucun courant ne circule dans le circuit, c'est-à-dire que $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

1. Mettre sous forme canonique l'équation différentielle en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 du circuit.
2. Donner l'évolution temporelle de la tension u aux bornes du condensateur.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 9 – Circuit du second ordre et équation différentielle

Comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous, un circuit LC série réel est modélisé par une bobine réelle d'inductance L et de résistance interne R et par un condensateur réel lui-même représenté par l'association parallèle d'une capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R.



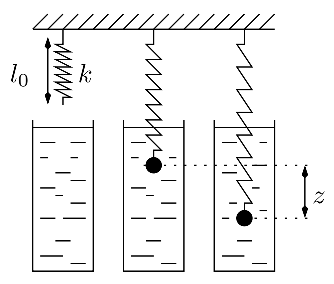
Pour simplifier les calculs, on suppose que $RC = L/R = \tau$. Le dipôle est alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice E. Enfin, on admet que la tension u aux bornes du condensateur réel vérifie l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\tau^2}u = \frac{E}{\tau^2}$$

1. Déterminer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du montage et mettre l'équation différentielle sous forme canonique.
2. En déduire l'évolution temporelle de la tension u si $u(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Exercice 10 – Oscillateur amorti

Une bille sphérique de masse volumique ρ et de rayon R est suspendue à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est, quant à elle, accrochée à un support fixe. Comme on peut le voir sur le schéma ci-contre, l'ensemble du dispositif est immergé dans du glycérol de viscosité η. On admet que l'altitude z de la bille par rapport à sa position d'équilibre vérifie l'équation différentielle



$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{9\eta}{2\rho R^2}\frac{dz}{dt} + \frac{3k}{4\pi\rho R^3}z = 0$$

Enfin, on suppose qu'elle est initialement écartée, sans vitesse, de sa position d'équilibre avec une altitude Z_0. Les conditions initiales sont alors $z(0) = Z_0$ et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

1. Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q du système en fonction de k, R, η et ρ et mettre sous forme canonique l'équation différentielle.
2. Donner une condition sur k en fonction de R, η et ρ pour obtenir un régime pseudo-périodique.
3. Résoudre l'équation différentielle à l'aide des conditions initiales.
4. Au bout d'un temps très long, que vaut l'altitude z de la bille dans le glycérol ?

Exercice 11 – Chute d'une balle

Une balle de ping-pong de masse m, assimilée à un point matériel, est lancée vers le sol dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}(0) = -v_0\vec{e_z}$ ($v_0 > 0$). Si elle subit une force de frottement visqueux avec l'air $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, on admet que sa vitesse $\vec{v} = v\vec{e_z}$ vérifie l'équation différentielle à coefficients constants du premier ordre suivante

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \lambda v = -mg$$

1. Mettre sous forme canonique l'équation différentielle et donner sa solution générale.
2. En déduire l'expression de la vitesse v de la balle en fonction du temps.

Pour aller plus loin

Exercice 12 – Lancer d'une balle de tennis

Une balle de tennis de masse m est lancée verticalement vers le haut dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Elle subit, en plus de son poids, une force de frottement $\vec{F}$ avec l'air quadratique de la forme $\vec{F} = -k \parallel \vec{v} \parallel \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la balle et k une constante positive. On admet que l'application du principe fondamental de la dynamique, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, donne l'équation différentielle suivante pour la vitesse de la balle lors de la phase d'ascension

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - kv^2$$

On rappelle que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

1. Montrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}(v_1^2 + v^2)$$

   où v_1 est une vitesse caractéristique dont on donnera l'expression en fonction de m, g et k.
2. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse v de la balle lors de la phase d'ascension.

Exercice 13 – Mouvement d'un pendule

L'énergie mécanique $\mathscr{E}_\mathrm{m}$ d'un solide de masse m relié à un fil inextensible de longueur l placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ est

$$\mathscr{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

où θ est l'angle fait par le pendule avec l'axe vertical. On rappelle qu'elle est conservée si les frottements avec l'air sont négligeables. On suppose également que le pendule est lâché sans vitesse initiale en faisant un angle θ_0 par rapport à l'axe vertical. Enfin, on donne, si a est positif, une primitive de l'intégrale suivante

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$$

1. Établir l'équation différentielle non linéaire du premier ordre vérifiée par l'angle θ.

2. Si l'amplitude du mouvement est faible, montrer que $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$.

Exercice 14 – Cycliste

Un cycliste de masse m fournit, sur son vélo, une puissance $\mathscr{P}$ supposée constante pour avancer à la vitesse v. Sachant qu'il est soumis à une force de frottement avec l'air quadratique dont la puissance est $-hv^3$ (où h est une constante qui dépend principalement des caractéristiques du cycliste et de l'air), on admet que l'équation différentielle non linéaire du premier ordre vérifiée par sa vitesse est, d'après la théorème de la puissance cinétique,

$$mv^2\frac{dv}{dx} = \mathscr{P} - hv^3$$

où x est la distance parcourue par le cycliste sur la route.

1. Montrer que le cycliste atteint une vitesse limite v_∞ qu'on exprimera en fonction de h et $\mathscr{P}$.
2. Si on pose $V = \frac{v}{v_\infty}$, donner l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de h et m pour que l'équation différentielle devienne, en fonction de la variable adimensionnée $X = \frac{x}{L}$,

$$V^2\frac{dV}{dX} = 1 - V^3$$

3. Sachant que la vitesse initiale du cycliste est nulle, exprimer V en fonction de X.

Exercice 15 – Le QCM de fin

1. La solution de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E \times t}{\tau}$$

est, si la condition initiale vaut $u(0) = 0$, ☐ Vrai ☐ Faux

$$u(t) = E\left(t + \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\right)$$

2. L'équation différentielle du premier ordre non linéaire

$$\frac{dC}{dt} + kC^2 = 0$$

admet pour solution, si $C(0) = C_0$, ☐ Vrai ☐ Faux

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + kC_0 t}$$

3. L'équation différentielle homogène à coefficients constants du second ordre

$$\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{2}{\tau}\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau^2} = 0$$

☐ Vrai ☐ Faux

admet pour solution générale $f(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}$ où A et B sont deux nombres réels.

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. La proposition est vraie. En revanche, si l'équation différentielle à résoudre a un second membre, il faut veiller à n'utiliser la (ou les) condition(s) initiale(s) qu'après avoir déterminé la solution de l'équation homogène et une solution particulière de cette équation.

☒ Vrai ☐ Faux

2. Si $Q > \frac{1}{2}$, la solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre s'écrit sous la forme

$$x(t) = [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et où A et B sont deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales par exemple. En revanche, si le facteur qualité Q est égal à $\frac{1}{2}$, la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants est bien

☐ Vrai ☒ Faux

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

où A et B sont deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales par exemple.

Exercice 2 –

1. Si f_1 et f_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients a et b constants ($a \neq 0$)

$$af' + bf = 0$$

alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ (où λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels) est également solution car

$$a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' + b(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) =$$

$$a\lambda_1 f_1' + a\lambda_2 f_2' + b\lambda_1 f_1 + b\lambda_2 f_2 =$$

$$\lambda_1(af_1' + bf_1) + \lambda_2(af_2' + bf_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0$$

2. De la même manière, si f_1 et f_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients a, b et c constants ($a \neq 0$)

$$af'' + bf' + cf = 0$$

alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ (où λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels) est également solution car

$$a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'' + b(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' + c(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) =$$

$$a\lambda_1 f_1'' + a\lambda_2 f_2'' + b\lambda_1 f_1' + b\lambda_2 f_2' + c\lambda_1 f_1 + c\lambda_2 f_2 =$$

$$\lambda_1(af_1'' + bf_1' + cf_1) + \lambda_2(af_2'' + bf_2' + cf_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0$$

D'un point de vue mathématique, cette propriété est appelée principe de superposition.

Exercice 3 –

1. En posant $\tau = RC$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions u_{C_1} telles que, pour tout t,

$$u_{C_1}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

où A est une constante réelle.

> **Cours**
> Les solutions de l'équation différentielle homogène
>
> $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = 0$$
>
> sont les fonctions f_1 telles que $\forall t, f_1(t) = Ae^{-t/\tau}$ où A est une constante réelle.

Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction u_{C_2} telle que, pour tout t,

$$u_{C_2}(t) = E$$

> **Cours**
> Une solution particulière de l'équation différentielle
>
> $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = \mathscr{C}$$
>
> où $\mathscr{C}$ est une constante, est la fonction constante f_2 telle que $\forall t, f_2(t) = \mathscr{C}\tau$.

Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction u_C telle que, pour tout t,

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

où A est une constante réelle déterminée à l'aide de la condition initiale.

2. Le condensateur étant initialement déchargé, il vient, par continuité de la tension aux bornes de ce dernier, $u_C(0) = 0$.
En utilisant cette condition initiale, on en déduit que $A+E = 0$ et par conséquent $A = -E$. La solution de l'équation différentielle est

> Dans la méthode de résolution, il faut toujours finir par la condition initiale. En particulier, il faut veiller à ne pas utiliser la condition initiale juste après l'écriture de la solution de l'équation homogène.

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, il suffit de
- Trouver toutes les solutions de l'équation homogène f_1.
- Trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre f_2.
- Sommer les solutions de l'équation homogène et la solution particulière $f = f_1 + f_2$.
- Utiliser la condition initiale $f(0)$ pour déterminer la constante d'intégration.

Exercice 4 –

Mettre sous forme canonique l'équation différentielle en faisant apparaître le temps caractéristique τ.

1. En posant $\tau = \frac{rm}{B^2L^2}$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{E}{BL\tau}$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions v_1 telles que, pour tout t,

$$v_1(t) = Ae^{-t/\tau}$$

où A est une constante réelle. Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction v_2 telle que, pour tout t,

$$v_2(t) = \frac{E}{BL}$$

Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction v telle que, pour tout réel t

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{BL}$$

2. La tige étant initialement immobile, sa vitesse est nulle. Il vient alors $A + \frac{E}{BL} = 0$ et par conséquent $A = -\frac{E}{BL}$. La solution de l'équation différentielle est finalement

$$v(t) = \frac{E}{BL}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Exercice 5 –

1. L'équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{3}$$

2. Puisque Q est inférieur à $\frac{1}{2}$, les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions u_1 telles que, pour tout t,

$$u_1(t) = Ae^{r_1t} + Be^{r_2t}$$

avec $r_1 = -\frac{\omega_0}{2}(3 + \sqrt{5})$ et $r_2 = -\frac{\omega_0}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Cours

Si $Q < \frac{1}{2}$, les solutions de l'équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 f = 0$$

sont les fonctions f_1 telles que, pour tout réel t,

$$f_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2})$, $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q}(1-\sqrt{1-4Q^2})$ et où A et B sont deux constantes réelles.

L'équation différentielle étant sans second membre, la solution particulière u_2 est la solution nulle. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction u telle que pour tout réel t

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + 0$$

où A et B sont deux constantes réelles. Les deux conditions initiales étant $u(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \omega_0 E$, on en déduit que ces deux constantes vérifient le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + B &=& 0 \\ Ar_1 + Br_2 &=& \omega_0 E \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = \frac{\omega_0 E}{r_1 - r_2} = -\frac{E}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{\omega_0 E}{r_1 - r_2} = \frac{E}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

La solution de l'équation différentielle est finalement

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(e^{\frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t} - e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t}\right)e^{-\frac{3}{2}\omega_0 t}$$

En utilisant la définition de la fonction sinus hyperbolique, on peut aussi écrire la solution sous la forme

$$u(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)e^{-\frac{3}{2}\omega_0 t}$$

Exercice 6 –

1. L'équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E\text{, avec } \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4\ \mathrm{rad.s}^{-1} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

2. Puisque le facteur de qualité Q est égal à $\frac{1}{2}$, les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions u_1 telles que, pour tout t,

$$u_1(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

Cours

Si $Q = \frac{1}{2}$, les solutions de l'équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 f = 0$$

sont les fonctions f_1 telles que, pour tout réel t,

$$f_1(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

où A et B sont deux constantes réelles.

Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction u_2 telle que $\forall t$, $u_2(t) = E$.

Cours

Une solution particulière de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 f = \mathscr{C}$$

où $\mathscr{C}$ est une constante, est la fonction f_2 telle que pour tout réel t, $f_2(t) = \frac{\mathscr{C}}{{\omega_0}^2}$.

Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction u telle que pour tout réel t

$$u(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + E$$

où A et B sont deux constantes réelles à déterminer à l'aide des conditions initiales. Sachant que $u(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$, ces deux constantes vérifient le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u(0) = B + E = 0 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = A - \omega_0 B = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = -\omega_0 E \\ B = -E \end{array}\right.$$

La solution de l'équation différentielle est finalement

$$u(t) = E\left(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right)$$

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, il suffit de
- trouver toutes les solutions f_1 de l'équation homogène selon la valeur du facteur de qualité Q.
- trouver une solution particulière f_2 de l'équation différentielle avec second membre.
- sommer les solutions de l'équation homogène et la solution particulière $f = f_1 + f_2$.
- utiliser les conditions initiales $f(0)$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0)$ pour déterminer les constantes d'intégration.

Exercice 7 –

1. Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants de type oscillateur harmonique.

Cours

Les solutions de l'équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 f = 0$$

sont les fonctions f_1 telles que pour tout réel t, on a

$$f_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où ω_0 est la pulsation propre du système et où A et B sont deux constantes réelles. Cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est l'équation canonique d'un oscillateur harmonique. Dans un tel système, la dissipation est nulle et le facteur de qualité Q est infini.

La solution générale de cette dernière est, puisqu'elle est homogène,

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constantes réelles déterminées avec les conditions initiales.

2. Sachant que $\theta(0) = \theta_0$ et que la vitesse angulaire initiale vaut $\frac{d\theta}{dt}(0) = \frac{v_0}{l}$, on en déduit que les constantes A et B vérifient le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \theta(0) = A = \theta_0 \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0 = \frac{v_0}{l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \theta_0 \\ B = \frac{v_0}{\omega_0 l} \end{cases}$$

Finalement on trouve

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0 l}\sin(\omega_0 t)$$

Exercice 8 –

1. En posant la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants de type oscillateur harmonique.

2. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions u_1 telles que, pour tout t,

$$u_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constantes réelles. Par ailleurs, une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction u_2 telle que, pour tout t,

$$u_2(t) = E$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle est la fonction u telle que, pour tout réel t,

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + E$$

où A et B sont déterminées à l'aide des conditions initiales. Ces deux dernières amènent au système linéaire suivant

$$\begin{cases} u(0) = A + E = 0 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -E \\ B = 0 \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle est finalement

$$u(t) = E[1 - \cos(\omega_0 t)]$$

Exercice 9 –

1. L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants peut se mettre sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = \frac{E}{\tau^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\tau} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Puisque le facteur de qualité Q du circuit est supérieur à $\frac{1}{2}$, les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions u_1 telles que pour tout réel t

$$u_1(t) = [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

où $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Cours

Si $Q > \frac{1}{2}$, les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 f = 0$$

sont les fonctions f_1 telles que, pour tout réel t,

$$f_1(t) = \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

où $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et où A et B sont deux constantes réelles.

Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction u_2 telle que $\forall t, u_2(t) = E/2$. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction u telle que pour tout réel t

$$u(t) = \left[A\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right) + B\sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right)\right]e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t} + \frac{E}{2}$$

où A et B sont deux constantes réelles. À l'aide des conditions initiales, ces deux constantes vérifient le système linéaire suivant

$$\begin{cases} u(0) = A + \frac{E}{2} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}A + \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{E}{2} \\ B = -\frac{E}{2} \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle est finalement

$$u(t) = \frac{E}{2}\left(1 - \left[\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right) + \sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t\right)\right]e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t}\right)$$

Exercice 10 –

1. En posant $\omega_0^2 = \frac{3k}{4\pi\rho R^3}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{9\eta}{2\rho R^2}$, c'est-à-dire $\omega_0 = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{3k}{\pi\rho R}}$ et $Q = \frac{1}{3\eta}\sqrt{\frac{\rho R k}{3\pi}}$, l'équation différentielle se met sous la forme canonique suivante

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0$$

2. On obtient un régime pseudo-périodique si le facteur de qualité Q est supérieur à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si,

$$\frac{1}{3\eta}\sqrt{\frac{\rho R k}{3\pi}} > \frac{1}{2}$$

En isolant la constante de raideur k du ressort, on obtient un régime pseudo-périodique si

$$k > \frac{27\pi\eta^2}{4\rho R}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants sont les fonctions z_1 telles que, $\forall t$,

$$z_1(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

où $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ est appelée pseudo-pulsation des oscillations. L'équation différentielle à résoudre n'ayant pas de second membre, elle est homogène et il n'y a pas de solution particulière à trouver. Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle z est simplement égale à la solution de l'équation homogène. Ainsi, pour tout réel t,

$$z(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

où A et B sont des constantes réelles déterminées avec les conditions initiales. Sachant que la bille est lâchée depuis l'altitude Z_0 sans vitesse initiale, les conditions initiales amènent au système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} z(0)=A=Z_0 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)=B\Omega-\frac{\omega_0}{2Q}A=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=Z_0 \\ B=\frac{\omega_0}{2Q\Omega}A \end{array}\right.$$

On en déduit alors que les constantes A et B valent

$$A=Z_0 \quad \text{et} \quad B=\frac{\omega_0}{2Q\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}Z_0=\frac{Z_0}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}=\frac{Z_0}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

La solution de l'équation différentielle est finalement

$$z(t)=Z_0\left(\cos(\Omega t)+\frac{\sin(\Omega t)}{\sqrt{4Q^2-1}}\right)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

4. En prenant la limite de la solution de l'équation différentielle obtenue dans la question précédente lorsque le temps t est infini, on obtient, puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées,

$$\lim_{t\to+\infty} z(t)=0$$

La bille est revenue à la position d'équilibre au bout d'un moment car son mouvement est amorti. En effet, à cause du frottement fluide engendré par le glycérol, les oscillations s'amortissent progressivement.

Exercice 11 –

1. En posant le temps caractéristique τ défini par $\tau=\frac{m}{\lambda}$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v}{\tau}=-g$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène à coefficients constants sont les fonctions v_1 telles que $\forall t, v_1(t)=Ae^{-t/\tau}$ où A est une constante réelle.

Sauf mention contraire, il n'est pas nécessaire de redémontrer les solutions de l'équation homogène.

Une solution particulière de l'équation différentielle est la fonction v_2 telle que $\forall t, v_2(t)=-g\tau$. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle est la fonction v telle que, pour tout réel t :

$$v(t)=Ae^{-t/\tau}-g\tau$$

2. La vitesse initiale de la balle étant $v(0)=-v_0$, il vient $A-g\tau=-v_0$ et par conséquent $A=g\tau-v_0$. La solution de l'équation différentielle est finalement

$$v(t)=g\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)-v_0e^{-t/\tau}$$

Exercice 12 –

1. En posant $v_1^2=\frac{mg}{k}$, l'équation différentielle non-linéaire du premier ordre peut se mettre sous la forme suivante

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{k}{m}(v_1^2+v^2)$$

2. En séparant les variables v et t, il vient

$$\frac{\mathrm{d}v}{v_1^2 + v^2} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

En intégrant entre l'instant initial et un instant t, on obtient, en utilisant la primitive donnée dans l'énoncé,

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}V}{v_1^2 + V^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}T \Rightarrow \frac{1}{v_1}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{V}{v_1}\right)\right]_{v_0}^{v(t)} = -\frac{k}{m}[T]_0^t$$

L'évolution temporelle de la vitesse v est alors la suivante :

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{v(t)}{v_1}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{v_0}{v_1}\right) = -\frac{k}{m}t$$

Finalement, en inversant la relation, on aboutit à :

$$v(t) = v_1 \tan\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{v_0}{v_1}\right) - \frac{k}{m}t\right]$$

Méthode

Si une équation différentielle du premier ordre reliant les variables x et t peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)g(x)$$

où f et g sont deux fonctions quelconques, il est alors possible de séparer les variables x et t en réécrivant

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = f(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la condition initiale $x(0)$, on obtient, en intégrant par rapport à chacune des variables X et T,

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}X}{g(X)} = \int_0^t f(T)\,\mathrm{d}T$$

Exercice 13 –

1. Puisqu'il n'y a pas de frottement, la conservation de l'énergie mécanique implique que

$$\mathscr{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = 0 + mgl(1-\cos\theta_0)$$

En isolant la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, on aboutit à l'équation différentielle non-linéaire du premier ordre suivante pour l'angle θ

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

En ne gardant que la vitesse angulaire négative car, au démarrage, l'angle θ décroît avec le temps, on parvient à

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

2. Si le mouvement du pendule est de faible amplitude, les angles sont petits et on peut utiliser les approximations suivantes

$$\cos\theta \underset{0}{\sim} 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos\theta_0 \underset{0}{\sim} 1 - \frac{{\theta_0}^2}{2}$$

En séparant les variables θ et t, il vient alors

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{{\theta_0}^2 - \theta^2}} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\mathrm{d}t$$

En utilisant la condition initiale $\theta(0) = \theta_0$, on obtient après intégration par rapport à θ et t

$$\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{{\theta_0}^2 - \theta^2}} = -\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

La primitive, rappelée dans l'énoncé, conduit alors à

$$\left[\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\right]_{\theta_0}^{\theta(t)} = -\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Finalement, l'évolution temporelle de l'angle θ vérifie l'équation suivante

$$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\theta(t)}{\theta_0}\right) - \frac{\pi}{2} = -\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

c'est-à-dire, en inversant la relation,

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(-\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Exercice 14 –

1. Si le cycliste atteint une vitesse limite, sa vitesse v est constante. Elle ne dépend alors plus de x et par conséquent, sa dérivée par rapport à x est nulle. En utilisant l'équation différentielle, il vient alors

$$mv_\infty^2 \times 0 = \mathscr{P} - hv_\infty^3$$

La vitesse limite vaut donc

$$v_\infty = \left(\frac{\mathscr{P}}{h}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2. En remplaçant par l'expression de la vitesse limite obtenue dans la question précédente, l'équation différentielle devient

$$mv^2\frac{dv}{dx} = h(v_\infty^3 - v^3)$$

c'est-à-dire, en mettant en facteur par v_∞,

$$\frac{m}{h}v^2\frac{dv}{dx} = v_\infty^3\left[1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^3\right]$$

En introduisant la longueur caractéristique L définie par $L = \frac{m}{h}$, il vient

$$L\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 \frac{d\left(\frac{v}{v_\infty}\right)}{dx} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^3$$

Si on pose la vitesse adimensionnée V définie par $V = \frac{v}{v_\infty}$ et la longueur adimensionnée X définie par $X = \frac{x}{L}$, on en déduit que

$$\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 \frac{d\left(\frac{v}{v_\infty}\right)}{d\frac{x}{L}} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^3$$

c'est-à-dire

$$V^2 \frac{dV}{dX} = 1 - V^3$$

3. En séparant les variables, il vient

$$\frac{V^2}{1 - V^3} dV = dX$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{3} \times \frac{-3V^2}{1 - V^3} dV = dX$$

En intégrant cette équation, entre la position initiale et une position quelconque, il vient

$$-\frac{1}{3}\int_{V(0)}^{V(X)} \frac{-3V^2}{1 - V^3} dV = \int_0^X dX'$$

soit

$$-\frac{1}{3}\left[\ln(1 - V^3)\right]_{V(0)}^{V(X)} = X - 0$$

Sachant qu'initialement la vitesse du cycliste est nulle, on en déduit que $V(0) = 0$ et

$$-\frac{1}{3}\ln(1 - V(X)^3) = X$$

En inversant cette relation grâce à la fonction exponentielle, on trouve

$$1 - V(X)^3 = e^{-3X}$$

c'est-à-dire

$$V(X)^3 = 1 - e^{-3X}$$

Finalement, la vitesse V a pour expression

$$V(X) = \left(1 - e^{-3X}\right)^{\frac{1}{3}}$$

On peut noter qu'on a trouvé l'expression analytique de la vitesse adimensionnée V du cycliste en fonction de la distance adimensionnée X qu'il a parcourue. En revanche, nous n'avons pas déterminé son expression en fonction du temps.

Exercice 15 –

1. La solution générale de l'équation différentielle homogène à coefficients constants du premier ordre est

$$u_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad A \in \mathbb{R}$$

De plus, une solution particulière de l'équation différentielle est $u_2(t) = E(t-\tau)$. Puisque la solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière, il vient

☐ Vrai ☒ Faux

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E(t-\tau) \qquad A \in \mathbb{R}$$

où A est une constante déterminée avec la condition initiale. Sachant que $u(0) = 0$, on en déduit que $A - E\tau = 0$, c'est-à-dire $A = E\tau$. Finalement, on aboutit à $u(t) = E\Big(t - \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\Big)$.

2. L'équation différentielle étant non linéaire, on obtient, en séparant les variables,

$$\frac{dC}{C^2} = -kdt$$

En intégrant la relation précédente entre l'instant initial et un instant t quelconque, on aboutit à

$$\int_{C(0)}^{C(t)} \frac{\mathrm{d}C}{C^2} = -k\int_0^t \mathrm{d}t'$$

☒ Vrai ☐ Faux

Après avoir calculé les deux intégrales, il vient

$$\left[-\frac{1}{C}\right]_{C(0)}^{C(t)} = -k[t']_0^t$$

$$\frac{1}{C(0)} - \frac{1}{C(t)} = -kt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C(t)} = kt + \frac{1}{C_0} = \frac{1+kC_0t}{C_0}$$

Finalement, on obtient $C(t) = \frac{C_0}{1+kC_0t}$.

3. On recherche des solutions exponentielles de l'équation différentielle sous la forme $f(t) = \mathscr{C}e^{rt}$ où $\mathscr{C}$ est une constante. La fonction f est solution de l'équation différentielle si r vérifie le polynôme caractéristique suivant

$$r^2 - \frac{2}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

Le discriminant de ce polynôme étant égal à 0, la solution double de l'équation est $r_0 = \frac{1}{\tau}$. La solution générale, exponentiellement divergente, de l'équation différentielle homogène est alors

☐ Vrai ☒ Faux

$$f(t) = (At+B)e^{r_0t} = (At+B)e^{\frac{t}{\tau}}$$

où A et B sont deux constantes qui peuvent être déterminées, par exemple, avec les conditions initiales.

Modèle de l'optique géométrique 3

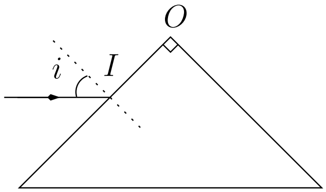
Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

1. Le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre par rapport au rayon incident lorsqu'on passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent.	☐ Vrai	☐ Faux
2. Un rayon incident dans l'eau, d'indice de réfraction n, peut se propager dans l'air quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence i.	☐ Vrai	☐ Faux
3. Un rayon lumineux du Soleil, pénétrant dans une gouttelette d'eau sphérique d'indice $n = 1,33$, ne peut être réfracté avec un angle supérieur à 48,9°.	☐ Vrai	☐ Faux
4. Un rayon lumineux incident donne toujours naissance à un rayon réfléchi et un rayon réfracté quand il rencontre une surface dioptrique.	☐ Vrai	☐ Faux

Exercice 2 – Prisme rectangle isocèle

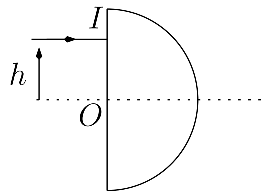
Un rayon lumineux monochromatique arrive dans l'air, avec un angle d'incidence i au point I, sur la face d'entrée d'un prisme rectangle isocèle en O comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous. L'indice de réfraction du prisme en verre est noté n et celui de l'air est égal à 1.



1. En supposant qu'un rayon émerge, donner, en fonction de n et i, l'angle d'émergence i' de ce rayon.
2. À quelle condition sur l'angle d'incidence i un rayon peut-il émerger sur l'autre face du prisme ?

Exercice 3 – Émergence d'une demi-sphère

Une demi-sphère en verre de rayon R, de centre O et d'indice de réfraction n est placée dans l'air. Un rayon lumineux arrive en incidence normale avec une altitude h au niveau du point I sur la face d'entrée de la demi-sphère comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous. L'indice de l'air est pris égal à 1 dans cet exercice.

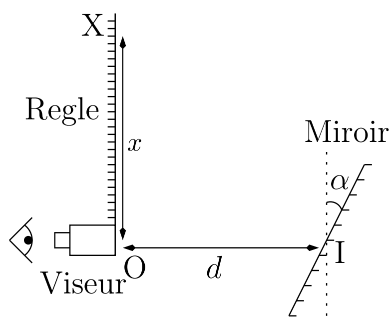


1. Montrer qu'un rayon lumineux émerge de la demi-sphère à condition que $h \leqslant \frac{R}{n}$.
2. Établir, quand la condition précédente est vérifiée, que l'angle de déviation D du rayon émergent, par rapport au rayon incident, est

$$D = \text{Arcsin}\left(\frac{nh}{R}\right) - \text{Arcsin}\left(\frac{h}{R}\right)$$

Exercice 4 – Méthode de Poggendorff

On considère le dispositif suivant constitué d'un miroir plan, d'un viseur et d'une règle graduée éclairée. Le viseur permet d'observer l'image de la règle graduée donnée par le miroir. Initialement le miroir est perpendiculaire au viseur et la distance entre les deux est notée d. Au travers du viseur, la graduation affiche alors 0. Lorsque le miroir tourne d'un angle α, l'image de la graduation défile dans le viseur jusqu'à la graduation X après avoir parcouru une longueur x (par rapport à la position de référence) comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous.



1. Donner une relation entre x, d et α.
2. Montrer que la lecture de la graduation permet de mesurer directement l'angle α s'il est faible.

Exercice 5 – Enfant et miroir

On considère dans cet exercice un miroir plan, parfaitement réfléchissant, de hauteur H. Comme on peut le voir sur le schéma ci-dessous, un enfant de taille L souhaite se voir entièrement dans le miroir. Il est situé à une distance D de ce dernier.