ALFONSO BACHILLER SOLER
RAMÓN CANO GONZÁLEZ
MIGUEL ÁNGEL GONZÁLEZ CAGIGAL

CIRCUITOS ELÉCTRICOS. TEOREMAS

Teoría y problemas resueltos



Edward Lawry Norton
(1898-1983)



Léon Charles Thévenin
(1857-1926)

DIAZ DE SANTOS

Circuitos Eléctricos. Teoremas

Teoría y Problemas resueltos

Alfonso Bachiller Soler
Ramón Cano González
Miguel Ángel González Cagigal
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla

© 2024. Alfonso Bachiller Soler, Ramón Cano González, Miguel Ángel González Cagigal

Reservados todos los derechos.

«No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.»

Ediciones Díaz de Santos
E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com
Internet: www.editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-520-3 (edición digital)

ISBN: 978-84-9052-519-7 (edición papel)

Diseño de cubierta: P55 Servicios Culturales CB.

Diseño de maquetación (LaTeX): F. Javier Payán Somet.
Impreso en España

A nuestros alumnos

Índice

Índice III
Prólogo 1

Teoremas **3**
1. Circuitos lineales 3
2. Superposición y proporcionalidad 4
3. Circuitos equivalentes 7
4. Teorema de Thévenin 10
   4.1. Circuitos de corriente continua 10
   4.2. Circuitos de corriente alterna 13
5. Teorema de Norton 15
   5.1. Circuitos de corriente continua 15
   5.2. Circuitos de corriente alterna 16
6. Relación entre el teorema de Thévenin y el teorema de Norton 17
7. Teorema de máxima transferencia de potencia 20
   7.1. Máxima transferencia de potencia desde una fuente real de tensión de continua 20
   7.2. Máxima transferencia de potencia desde una fuente real de intensidad de continua 21
   7.3. Máxima transferencia de potencia desde una fuente real de tensión de alterna 23
   7.4. Máxima transferencia de potencia desde una fuente real de intensidad de alterna 25
8. Modelo de bobinas acopladas 27

Problemas resueltos **29**
P. 1. Superposición 29
P. 2. Proporcionalidad y superposición 30
P. 3. Superposición 31

P. 4. Proporcionalidad y superposición 32
P. 5. Superposición 33
P. 6. Superposición 35
P. 7. Proporcionalidad y superposición 37
P. 8. Proporcionalidad y superposición 39
P. 9. Proporcionalidad y superposición 40
P. 10. Equivalentes 42
P. 11. Equivalentes 44
P. 12. Equivalentes 46
P. 13. Equivalentes 48
P. 14. Equivalentes 49
P. 15. Equivalentes Thévenin y Norton 51
P. 16. Equivalente Thévenin 53
P. 17. Equivalente Thévenin 55
P. 18. Equivalentes Thévenin y Norton 58
P. 19. Equivalentes Thévenin y Norton 60
P. 20. Equivalentes Thévenin y Norton 62
P. 21. Equivalentes Thévenin y Norton 65
P. 22. Equivalentes Thévenin y Norton 67
P. 23. Equivalentes Thévenin y Norton 70
P. 24. Equivalentes Thévenin y Norton 72
P. 25. Equivalentes Thévenin y Norton 76
P. 26. Equivalentes Thévenin y Norton 78
P. 27. Equivalentes Thévenin y Norton 81
P. 28. Equivalentes Thévenin y Norton 85
P. 29. Equivalentes Thévenin y Norton 87
P. 30. Equivalentes Thévenin y Norton 90
P. 31. Equivalentes Thévenin y Norton 94
P. 32. Equivalentes Thévenin y Norton 98
P. 33. Equivalentes Thévenin y Norton 100
P. 34. Impedancia equivalente 102
P. 35. Impedancia equivalente 104
P. 36. Impedancia equivalente 105
P. 37. Máxima transferencia de potencia 107
P. 38. Máxima transferencia de potencia 109
P. 39. Máxima transferencia de potencia 111
P. 40. Máxima transferencia de potencia 113
P. 41. Máxima transferencia de potencia 115
P. 42. Máxima transferencia de potencia 117
P. 43. Máxima transferencia de potencia 120
P. 44. Máxima transferencia de potencia 123

P. 45. Máxima transferencia de potencia 125
P. 46. Máxima transferencia de potencia 126
P. 47. Máxima transferencia de potencia 127
P. 48. Máxima transferencia de potencia 128
P. 49. Máxima transferencia de potencia 131
P. 50. Máxima transferencia de potencia 136
P. 51. Máxima transferencia de potencia 138
P. 52. Máxima transferencia de potencia 139
P. 53. Máxima transferencia de potencia 142
P. 54. Máxima transferencia de potencia 144
P. 55. Máxima transferencia de potencia 148
P. 56. Máxima transferencia de potencia 150
P. 57. Máxima transferencia de potencia 151
P. 58. Máxima transferencia de potencia 155
P. 59. Máxima transferencia de potencia 158
P. 60. Máxima transferencia de potencia 161
P. 61. Máxima transferencia de potencia 163
P. 62. Máxima transferencia de potencia 167
P. 63. Máxima transferencia de potencia 171
P. 64. Máxima transferencia de potencia 173
P. 65. Máxima transferencia de potencia 177
P. 66. Máxima transferencia de potencia 179
P. 67. Máxima transferencia de potencia 182
P. 68. Máxima transferencia de potencia 185
P. 69. Máxima transferencia de potencia 189

Prólogo

La Teoría de Circuitos es una de las ciencias básicas de la Ingeniería, por lo que el estudio de sus conceptos básicos está presente en todos los estudios de grado en Ingeniería bajo alguna de sus múltiples denominaciones (Teoría de Circuitos, Electrotecnia, Tecnología Eléctrica, etc.). En este sentido, existe un amplia variedad de libros que abordan los conceptos básicos de la Teoría de Circuitos, normalmente con cierto enfoque según el alumnado al que va dirigida la obra, lo cual, de alguna manera, desvirtúa el conocimiento de los principios generales que gobiernan cualquier circuito eléctrico.

La presente obra aborda una parte nuclear de la Teoría de Circuitos, como son los teoremas fundamentales de la misma: consecuencias de la linealidad en circuitos eléctricos, circuitos equivalentes, máxima transferencia de potencia, así como las aplicaciones del acoplamiento magnético en circuitos. Es, por tanto, un libro de especial interés al estar enfocado al estudio teórico y práctico de las propiedades de los circuitos eléctricos, base fundamental para profundizar en otros aspectos más prácticos, como son el régimen transitorio y permanente, ecuaciones para la resolución de circuitos, circuitos en alterna y trifásicos, etc.

Los autores de esta obra, Alfonso Bachiller Soler, Ramón Cano González y Miguel Ángel González Cagigal, son doctores en Ingeniería con una amplia experiencia docente en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sevilla. Su profundo conocimiento de la Teoría de Circuitos no se debe sólo a su acreditada experiencia docente en diversas titulaciones de grado en Ingeniería, sino a sus relevantes contribuciones en investigación y transferencia de tecnología a la industria, contribuciones que ponen de manifiesto su dominio de la Teoría de Circuitos como ciencia básica de la Ingeniería, especialmente de la Ingeniería Eléctrica. Dicha experiencia respalda la elaboración del presente libro de texto que constituye, sin lugar a dudas, una obra con el rigor exigible y de gran valor formativo para los estudiantes de Ingeniería que deban abordar el estudio de los conceptos básicos de los circuitos eléctricos.

José Luis Martínez Ramos
Catedrático de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla
En Sevilla, a 19 de enero de 2024

Teoremas

A la hora de resolver un circuito eléctrico, hay una serie de teoremas que permiten simplificar el cálculo y ayudan a tener un mejor entendimiento del funcionamiento del mismo. Tal es el caso del teorema de superposición, teorema de Thévenin, teorema de Norton o teorema de máxima transferencia de potencia, que son los que se tratarán en este libro.

En primer lugar se recordará la propiedad de linealidad aplicada a los circuitos eléctricos para, posteriormente, describir una serie de teoremas aplicables a circuitos lineales.

1. Circuitos lineales

La linealidad es una propiedad de un elemento que describe una relación lineal entre causa y efecto. Esta característica es una combinación de la propiedad de homogeneidad (proporcionalidad) y la propiedad aditiva. La propiedad de proporcionalidad establece que si la excitación (fuentes independientes) se multiplica por una constante, la respuesta (cualquier tensión o intensidad de un determinado elemento) aparece multiplicada por la misma constante. La propiedad aditiva establece que la respuesta a una suma de excitaciones es igual a la suma de las respuestas a cada excitación por separado.

Considérese un circuito lineal donde x denota el valor de la excitación, e y la tensión o intensidad de un determinado elemento de dicho circuito. La relación entre causa y efecto (entre excitación y respuesta) se puede expresar matemáticamente según:

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

Como se trata de un circuito lineal entonces $f(x)$ debe de ser una función lineal y, por tanto, tendrá las propiedades de proporcionalidad y aditividad:

1. $f(kx)=kf(x)$

2. $f(x_1 + x_2)=f(x_1) + f(x_2)$

Ambas propiedades se pueden combinar de la siguiente forma:

$$f(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1f(x_1) + k_2f(x_2) \tag{1.2}$$

En el caso, por ejemplo, de una resistencia (elemento lineal), la relación tensión-intensidad es $u{=}Ri$, de modo que $f(i){=}Ri$. Si

$$i = k_1 i_1 + k_2 i_2 \tag{1.3}$$

entonces se puede comprobar que cumple la propiedad de proporcionalidad y aditividad:

$$f(k_1 i_1 + k_2 i_2) = R(k_1 i_1 + k_2 i_2) = k_1 R i_1 + k_2 R i_2 = k_1 f(i_1) + k_2 f(i_2) \tag{1.4}$$

Sin embargo, la potencia disipada en una resistencia no es una función lineal ni de la intensidad ni de la tensión. Si $p{=}Ri^2$ es la potencia en una resistencia, expresada en función de la intensidad, entonces $f(i){=}Ri^2$. Si

$$i = k_1 i_1 + k_2 i_2 \tag{1.5}$$

entonces:

$$f(k_1 i_1 + k_2 i_2) = R(k_1 i_1 + k_2 i_2)^2 \neq k_1 R i_1^2 + k_2 R i_2^2 \tag{1.6}$$

La misma conclusión se obtiene si se expresa la potencia en función de la tensión de la resistencia.

A modo de resumen, un circuito es lineal si consta únicamente de elementos lineales: resistencias, bobinas, condensadores, fuentes dependientes, fuentes independientes, etc. Y por tanto, cumple con la propiedad de proporcionalidad y aditividad (que mas adelante se plasmará en el teorema de superposición).

2. Superposición y proporcionalidad

En un circuito lineal formado por elementos pasivos, fuentes dependientes y fuentes independientes [1], la respuesta (tensión y/o intensidad) debido a la acción simultánea de todas las fuentes independientes es igual a la suma (superposición) de las respuestas parciales obtenidas aplicando separadamente cada una de dichas fuentes independientes, siendo anuladas el resto de fuentes independientes (Figura 1). Conviene indicar que una fuente independiente de tensión se anula cortocircuitando sus terminales, mientras que una fuente independiente de intensidad se anula dejando sus terminales en circuito abierto. Las fuentes dependientes nunca se anulan.

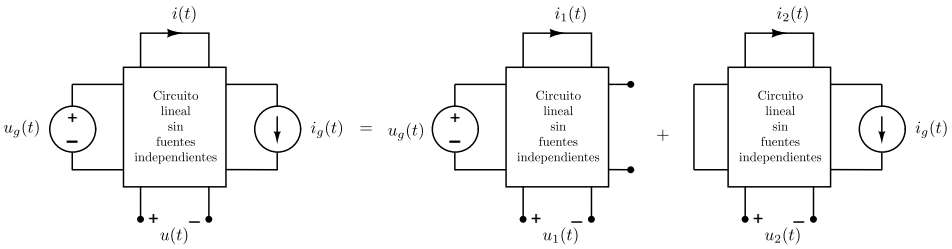


Figura 1. Aplicación de superposición [2].

En la Figura 2 se muestra la aplicación del principio de proporcionalidad y de superposición a un determinado circuito genérico. De esta forma, la tensión $u(t)$ y la intensidad $i(t)$ se obtienen de la siguiente forma:

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \;\; ; \;\; i(t) = \alpha i_1(t) + \beta i_2(t) \tag{2.1}$$

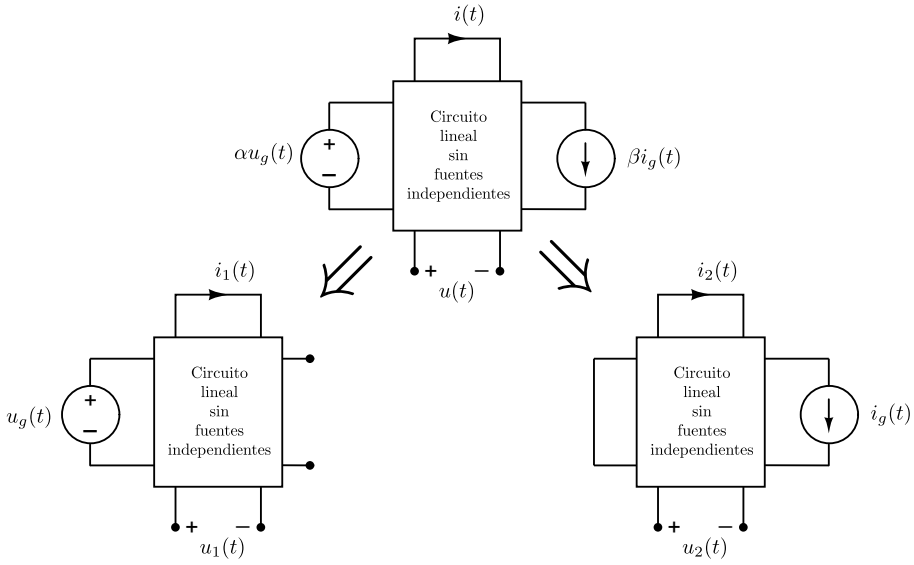


Figura 2. Aplicación de proporcionalidad y superposición.

La superposición se aplica tanto en el análisis como en el diseño de circuitos [3]. Al analizar un circuito complejo con múltiples fuentes independientes de tensión y de intensidad, normalmente habrá un número menor de ecuaciones y éstas serán más simples de resolver cuando se consideren por separado los efectos de las distintas fuentes independientes. Por tanto, la aplicación de la superposición puede simplificar el análisis de los circuitos. Sin embargo, hay circuitos donde el uso de la superposición es necesario, tal es el ejemplo de circuitos excitados por fuentes de corriente alterna de distinta frecuencia o los circuitos excitados por fuentes de alterna y de continua.

En el caso del diseño, la superposición se aplica para sintetizar una respuesta deseada de un circuito que no puede conseguirse utilizando una única fuente. Esta técnica permite trabajar con varios diseños simples en lugar de con un diseño complejo.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que la superposición se basa en la linealidad, por lo que, tal y como se ha comentado anteriormente, no se obtendrá una potencia total correcta sumando las potencias que se deben a cada fuente que actúa por separado. No obstante, la superposición se puede usar de manera indirecta para calcular la potencia, ya que tanto la tensión como la intensidad se pueden calcular mediante superposición. La aplicación de la superposición tampoco llevará a respuestas correctas para circuitos que contengan elementos no lineales, tales como determinados elementos electrónicos, por ejemplo el diodo.

Ejemplo 2.1. En el circuito de la Figura 3, calcular la tensión U aplicando superposición, así como la potencia de la resistencia de $1\,\Omega$.

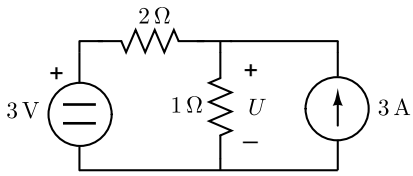


Figura 3.

Solución. Aplicando superposición, el circuito de la Figura 3 se puede representar como la suma de los dos circuitos que se muestran en la Figura 4.

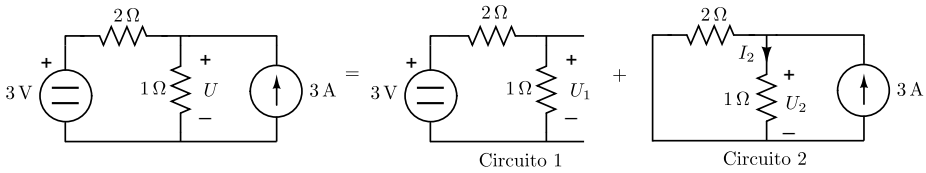


Figura 4.

Considerando el circuito 1 de la Figura 4, aplicando el concepto de divisor de tensión:

$$U_1 = 3 \cdot \frac{1}{2+1} = 1\,\text{V}$$

Por otro lado, según el circuito 2 de la Figura 4, aplicando el concepto de divisor de intensidad, resulta:

$$I_2 = 3 \cdot \frac{1}{1+1/2} = 2\,\text{A} \;\Rightarrow\; U_2 = 1 \cdot I_2 = 1 \cdot 2 = 2\,\text{V}$$

En consecuencia, aplicando superposición, la tensión U es la siguiente:

$$U = U_1 + U_2 = 1 + 2 = 3\,\text{V}$$

La potencia de la resistencia de $1\,\Omega$ es la siguiente:

$$p = \frac{U^2}{1} = \frac{3^2}{1} = 9\,\text{W}$$

Se puede comprobar que, debido a la no linealidad de la potencia, si se calcula su valor en la resistencia de $1\,\Omega$ mediante la suma de la potencia que absorbe en el circuito 1 y la que absorbe en el circuito 2 el resultado, erróneo, es el siguiente:

$$p' = p_1 + p_2 = \frac{U_1^2}{1} + \frac{U_2^2}{1} = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{1} = 5\,\mathrm{W}$$

3. Circuitos equivalentes

En ocasiones no interesa el análisis completo de un circuito sino exclusivamente el comportamiento de uno o varios de sus elementos. En este caso es de gran utilidad el uso de circuitos equivalentes. Un circuito equivalente es aquel cuya característica de tensión-intensidad es idéntica a la del circuito original.

En la Figura 5 se muestra un circuito lineal original que tiene una determinada característica tensión-intensidad en sus terminales $f_o[u(t),i(t)]$. Este circuito lineal original se quiere sustituir por un circuito lineal equivalente [2]. En este sentido, es necesario que la característica tensión-intensidad del circuito lineal equivalente ($f_e[u(t),i(t)]$) coincida con la del circuito lineal original, sea cual sea el circuito exterior:

$$f_o[u(t),i(t)] = f_e[u(t),i(t)] \tag{3.1}$$

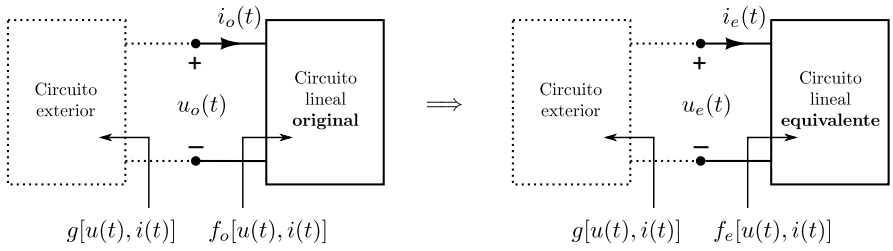


Figura 5. Circuitos equivalentes.

Aplicando el concepto de circuito equivalente se pueden obtener las relaciones entre los parámetros de una fuente real de tensión y una fuente real de intensidad para que sean equivalentes entre si. En la Figura 6 se muestra una fuente real de tensión de corriente continua y una fuente real de intensidad de corriente continua.

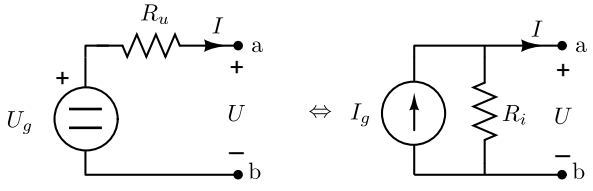


Figura 6. Equivalencia de fuentes reales.

La relación tensión-intensidad desde los terminales a y b de la fuente real de tensión es la siguiente:

$$U = U_g - R_u \cdot I \;\; \Rightarrow \;\; U + R_u \cdot I - U_g = 0 \tag{3.2}$$

Por otro lado, la relación tensión-intensidad desde los terminales a y b de la fuente real de intensidad es la siguiente:

$$I = I_g - \frac{U}{R_i} \;\; \Rightarrow \;\; U + R_i \cdot I - R_i \cdot I_g = 0 \tag{3.3}$$

Para que las fuentes reales de la Figura 6 sean equivalentes es necesario que ambas relaciones sean iguales. Por tanto:

$$R_u = R_i = R \;\; ; \;\; U_g = R \cdot I_g \tag{3.4}$$

Hay problemas de análisis de circuitos que se simplifican mediante transformaciones de fuentes, es decir, sustituyendo una fuente real de tensión por su fuente real de intensidad equivalente o viceversa.

En el caso de una fuente de tensión conectada en paralelo con una fuente de intensidad, dicha fuente de intensidad no tiene ningún efecto sobre el circuito equivalente desde los terminales a y b, tal y como se muestra en la Figura 7. Lo mismo se puede decir cuando se conecta una fuente de tensión en paralelo con un elemento pasivo.

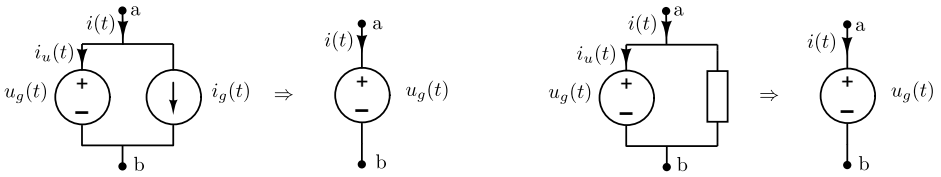


Figura 7. Circuitos equivalentes que contienen una fuente de tensión en paralelo con un elemento pasivo o con un elemento activo.

De la misma forma, en el caso de una fuente de intensidad conectada en serie con una fuente de tensión, dicha fuente de tensión no tiene ningún efecto sobre el circuito equivalente desde los terminales a y b, tal y como se muestra en la Figura 8. Lo mismo ocurre cuando se conecta una fuente de intensidad en serie con un elemento pasivo.

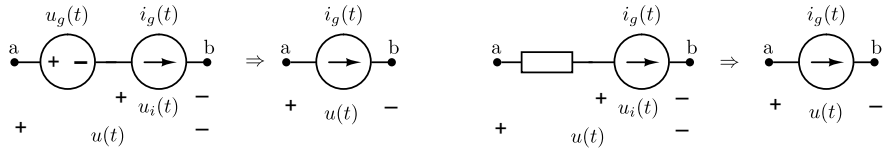


Figura 8. Circuitos equivalentes que contienen una fuente de intensidad en serie con un elemento pasivo o con un elemento activo.

Es importante destacar que, atendiendo a la Figura 7 y Figura 8, tanto la fuente de tensión equivalente como la fuente de intensidad equivalente no son las fuentes originales.

A continuación se analizará el caso de que se tengan dos circuitos (C1 y C2) conectados en paralelo a una fuente de tensión tal y como se muestra en la Figura 9. Teniendo en cuenta los equivalentes mostrados en la Figura 7, entonces el circuito de la Figura 9 se puede analizar resolviendo por separado el circuito C1 y el circuito C2 junto con la fuente de tensión, tal y como se muestra en la Figura 10. Obsérvese que la intensidad que circula por la fuente de tensión se calcula como suma de $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

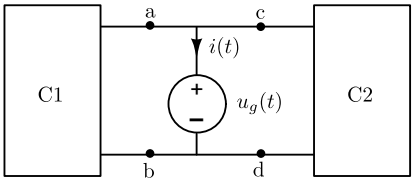


Figura 9. Dos circuitos conectados en paralelo a una fuente de tensión.

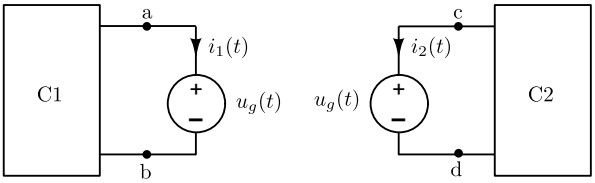


Figura 10. Equivalente de dos circuitos conectados en paralelo a una fuente de tensión.

Análogamente, en la Figura 11 se muestran dos circuitos (C1 y C2) conectados en serie con una fuente de intensidad.

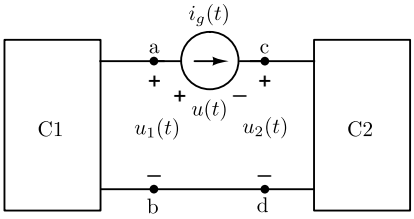


Figura 11. Dos circuitos conectados en serie a una fuente de intensidad.

Teniendo en cuenta los equivalentes mostrados en la Figura 8, entonces el circuito de la Figura 11 se puede analizar resolviendo por separado el circuito C1 y el circuito C2 junto con la fuente de intensidad, tal y como se muestra en la Figura 12. Obsérvese que la tensión de la fuente de intensidad se calcula a partir de las tensiones $u_1(t)$ y $u_2(t)$:

$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) \tag{3.5}$$

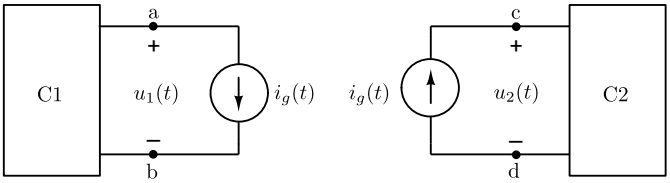


Figura 12. Equivalente de dos circuitos conectados en serie a una fuente de intensidad.

Por último, es también interesante mostrar el circuito equivalente en el caso de varias fuentes de tensión conectadas en serie y el circuito equivalente en el caso de varias fuentes de intensidad conectadas en paralelo, tal y como se muestra en la Figura 13.

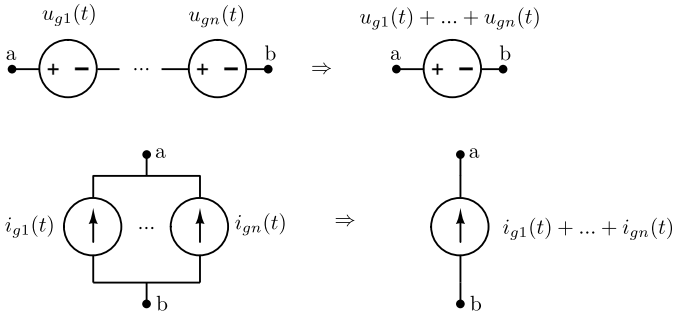


Figura 13. Circuitos equivalentes de fuentes de tensión conectadas en serie y fuentes de intensidad conectadas en paralelo.

4. Teorema de Thévenin

El teorema de Thévenin establece que un circuito lineal formado por elementos pasivos lineales, fuentes independientes y fuentes dependientes, puede ser reemplazado (es equivalente) por una fuente real de tensión.

4.1. Circuitos de corriente continua

Sea un circuito formado por resistencias y fuentes de continua todo lo extenso y complejo que se quiera, al cual se denominará CA. Pues bien, el teorema de Thévenin establece que, desde los terminales a y b, dicho circuito es equivalente a una fuente real de tensión tal y como se muestra en la Figura 14. La tensión de Thévenin, U_{th}, es la que resulta entre los terminales a y b del circuito original a circuito abierto (Figura 15).

La resistencia Thévenin, R_{th}, es la que se se obtiene entre los terminales a y b del circuito original al eliminar de éste las fuentes independientes. En este caso hay varias formas de abordar el cálculo de la resistencia Thévenin:

1. Mediante asociación de resistencias del circuito pasivo. Esta forma solo se puede aplicar si el circuito no contiene fuentes dependientes.