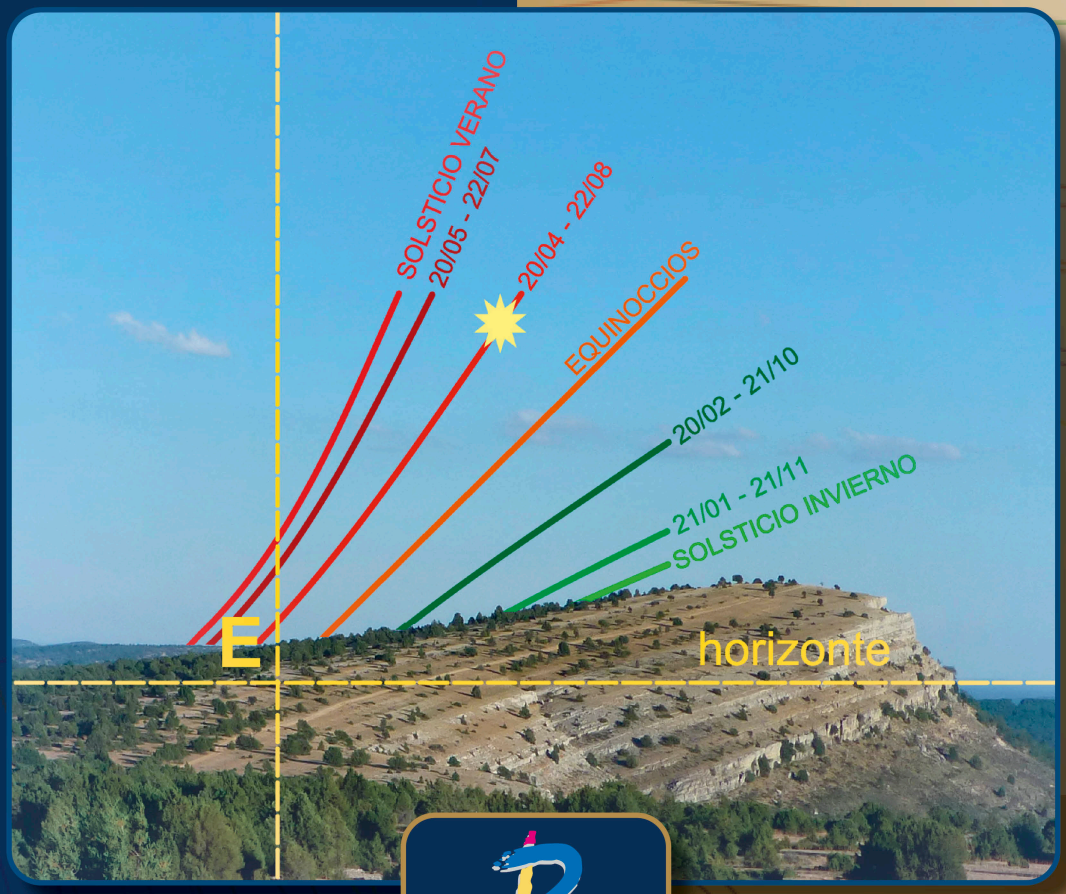
MARTÍN ANTONIO PEREA ÁLVAREZ DE EULATE

ANÁLISIS DE LA TRAYECTORIA APARENTE DEL SOL

Guía para ingenieros, arquitectos y tecnólogos solares



DIAZ DE SANTOS

ANÁLISIS DE LA TRAYECTORIA APARENTE DEL SOL

Guía para ingenieros, arquitectos y tecnólogos solares

MARTÍN ANTONIO PEREA ÁLVAREZ DE EULATE

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Doctor en Ingeniería Agraria, Alimentaria, Forestal
y del Desarrollo Rural Sostenible

ANÁLISIS DE LA TRAYECTORIA APARENTE DEL SOL

Guía para ingenieros, arquitectos y tecnólogos solares

Nociones teóricas y procedimientos
de cálculo para diferentes precisiones

DIAZ DE SANTOS

Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

© Martín Antonio Perea Álvarez de Eulate, 2025 (edición ebook)

Reservados todos los derechos.

“No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.”

Ediciones Díaz de Santos
Internet: http//www.editdiazdesantos.com
E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com

ISBN: (edición papel): 978-84-9052-552-4
e-ISBN: (edición digital): 978-84-9052-553-1

Fotocomposición y diseño de cubiertas: P55 Servicios Culturales

A mi muy querida esposa Patricia,
con inmenso cariño y agradecimiento.
Sin su ayuda, este libro no habria
podido ser escrito

ÍNDICE

Dedicatoria V
Índice VII
Índice de Figuras XV
Índice de Tablas XXI
Introducción XXIII
Cómo utilizar esta obra: estructura y consejos al lector XXV

PARTE I
Fundamentos y cálculos en baja precisión

1. Conceptos básicos 3
1.1. Acimut y elevación solares 3
1.2. Proyecciones diédricas 4
1.3. Conceptos astronómicos básicos 6
1.4. Rotación y traslación terrestres 6
1.4.1. El efecto giroscópico de la rotación 7
1.4.2. Día solar y día sidéreo 8
1.4.3. Variaciones en el período de rotación de la tierra: ΔT 9
1.5. Dimensiones del Sol, la Tierra y la órbita. Elementos notables 10
1.5.1. Las leyes de Kepler 13
1.6. Solsticios y equinoccios 14
1.6.1. Solsticios, equinoccios y ejes de la elipse orbital 17
1.7. Variaciones en la dirección del eje de giro terrestre 18
1.7.1. Precesión 18
1.7.2. El punto Aries 20
1.7.3. La estrella polar 21
1.7.4. Variación de la oblicuidad de la eclíptica 23
1.7.5. La nutación 24
1.7.6. El movimiento polar 25
1.8. El giro del eje de ápsides 26
1.8.1. Efecto combinado con la precesión 27
1.9. Año trópico, año sidéreo y año anomalístico 29
1.10. Ángulos orbitales de referencia: longitud, argumento y latitud 31
1.10.1. Longitud y argumento orbitales. Anomalía verdadera 31
1.10.2. Latitud orbital 33
1.11. Modelos orbitales heliocéntrico y geocéntrico 34
1.11.1. El punto Aries en órbitas geocéntricas y heliocéntricas 36

2. Variables en función de la precisión requerida 39
2.1. Precisión: magnitudes 39
2.2. Cálculos en baja precisión 40
2.3. Cálculos en alta precisión 41
2.4. Cálculos en muy alta precisión 42
2.5. Cuadro resumen de características y variables en función de la precisión requerida 43

3. La declinación solar δ 47
3.1. Definición de declinación solar 47
3.2. Deducción vectorial de la declinación solar δ (órbita plana) 48
3.3. Variación de la declinación a lo largo del año 50
3.4. Obtención de la declinación δ para bajas precisiones 51
3.4.1. Tablas de declinación 51
3.5. Cálculo simplificado de la declinación 53
3.5.1. Fórmula de Perrin de Brichambaut 53
3.5.2. Fórmula de Cooper 54
3.5.3. Fórmula de Spencer 55
3.5.4. Comparativa entre métodos aproximados 55

4. Aplicaciones directas de la declinación 59
4.1. Trópicos y círculos polares 59
4.1.1. Eratóstenes y la determinación del radio terrestre 62
4.2. Altura del Sol al mediodía y latitud del lugar 63
4.3. Horas de sol aproximadas según fecha y latitud 64
4.3.1. Proceso de cálculo 65
4.4. Instantes de orto y ocaso 71
4.5. Duración de los días en diferentes latitudes a lo largo del año 72

5. Áreas terrestres iluminadas: el terminador 75
5.1. Relación entre terminador y meridiano del observador 75
5.1.1. Variación de t en el tiempo según la latitud 80
5.2. Terminador y mapas *day-night* 83
5.3. Puntos de alba u ocaso simultáneos 89

6. El plano del observador y la bóveda celeste 95
6.1. Conceptos generales 95
6.2. Simplificaciones dimensionales 98
6.3. Efecto de la rotación terrestre en la observación del sol 98
6.3.1. El mediodía en diferentes latitudes 106
6.4. Desviación de orto y ocaso con respecto a E-W (método directo) 108

7. Acimut y elevación solares 113
7.1. Definiciones 113
7.2. Concepto de ángulo horario 114
7.3. Deducción del acimut y elevación solares 115
7.3.1. Método vectorial 115
7.3.2. Método deductivo geométrico 123
7.3.3. Utilización preferente para las fórmulas de acimut y elevación 126
7.4. Resoluciones alternativas a problemas previos mediante γ y $\hat{e}$ 127
7.4.1. Desviación del orto β_O respecto al W mediante γ 127
7.4.2. Altura del Sol al mediodía mediante ê 128
7.4.3. Instantes de orto y ocaso mediante $\hat{e}$ y γ 128
7.4.4. Horas de sol diarias mediante $\hat{e}$ y γ 129
7.4.5. Sobre la constante 0°,833 en los cálculos 130
7.5. Crepúsculos 130
7.5.1. Duración de los crepúsculos 131
7.5.2. Crepúsculo civil: expresión simplificada para España 133

8. Cálculos aproximados en hora oficial 135
8.1. Hora solar local y hora oficial 22F local 136
8.1.1. Longitud geográfica del observador 136
8.1.2. Husos horarios 136
8.1.3. La ecuación del tiempo (conceptos básicos) 139
8.1.4. Relación entre hora solar y hora local oficial 142
8.1.5. Ángulo horario y hora oficial 143
8.1.6. Acimut y elevación en hora oficial 144
8.2. Horas de salida, mediodía y puesta de sol 145
8.3. Método abreviado NOAA para cálculos de la EoT en baja precisión 146
8.3.1. Subrutina para años bisiestos 148
8.4. Otros algoritmos simplificados para el cálculo de EoT en baja precisión 149

9. Aplicaciones de la elevación ê y el acimut γ 151
9.1. Incidencia de los rayos solares sobre un plano inclinado 151
9.1.1. Casos notables en función del acimut e inclinación del plano 154
9.2. Gráficos de salida y puesta de sol 155
9.3. Cartas solares de γ y $\hat{e}$ 157
9.3.1. Carta solar cartesiana 157
9.3.2. Diagramas polares 162
9.3.3. Gráficos móviles 167
9.4. La percepción del observador 170
9.5. Análisis gráfico de sombras 174

PARTE II
Cálculos en alta precisión

10. El tiempo continuo para altas precisiones 179
10.1. El tiempo universal 179
10.2. La fecha juliana (JD) como marco temporal 181
10.2.1. Fecha juliana, días naturales y días solares 182
10.2.2. Calendarios juliano y gregoriano y fecha juliana: confusiones 182
10.3. Conversión entre calendario gregoriano y JD 183
10.3.1. Conversión entre fecha gregoriana y día juliano 184
10.3.2. Conversión de fecha juliana a fecha gregoriana 187
10.3.3. Otros algoritmos simplificados 189
10.4. Simplificaciones para hojas de cálculo. El error del año 1900 191
10.5. Fenómenos asociados a largos intervalos de tiempo 192
10.6. Fracciones de día y cómputo astronómico 193

11. Variación de la excentricidad de la órbita *e* 195
11.1. La excentricidad e de la órbita y su variación en el tiempo 195
11.2. Cálculo de la variación de la excentricidad orbital 196

12. Cálculo analítico de la órbita terrestre 199
12.1. Descripción del problema 199
12.2. Hipótesis de órbita plana 199
12.3. La ecuación de Kepler: ángulos principales y deducciones 200
12.3.1. Anomalías y angulos notables. Definiciones 201
12.3.2. Demostración de la ecuación de Kepler 204
12.3.3. Cálculo de la anomalía verdadera en función de la excéntrica 209
12.3.4. La ecuación de centro C 212
12.3.5. Cálculo de la anomalía verdadera v a partir de la media M 215
12.4. Procedimientos clásicos de cálculo 215
12.4.1. Cálculo de L a partir de εg, ϖg y e conocido 215
12.4.2. Cálculo de L con εg, ϖg y e desconocidos 217
12.5. Métodos directos de cálculo de L 219
12.6. Ejemplos prácticos 220
12.6.1. Otras referencias de resultados 225

13. Oblicuidad media de la eclíptica ε_0 227
13.1. Propuesta de Lieske *et al.* (1977) 227
13.2. Propuesta de Laskar 228
13.3. Propuesta de Bretagnon y Chapront 230
13.4. Conclusiones 230

14. Análisis de la nutación 231
14.1. Componentes geométricas de la nutación 231
14.2. Ángulos característicos en la nutación 233
14.3. Cálculo numérico de la nutación 235
14.3.1. Propuesta NOAA 236
14.3.2. Propuesta de Jean Meeus 237
14.4. Elección de las expresiones más aconsejables 238

15. La aberración de la luz 239
15.1. La constante de aberración *k* 239
15.2. Utilización de *k* en los cálculos 242

16. Correcciones a L y ε_0 245
16.1. Correcciones a *L* 245
16.1.1. La aberración y la longitud 245
16.1.2. Nutación en longitud y *L* 246
16.1.3. Longitud aparente: *Lt* 248
16.2. Corrección de la oblicuidad de la eclíptica 248

17. Refracción atmosférica 251
17.1. Métodos directos (corrección de observaciones) 252
17.1.1. Fórmula de Bennett 252
17.1.2. Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid 253
17.2. Métodos inversos (correcciones para cálculos) 256
17.2.1. Aplicación NOAA (inversa) 256
17.2.2. Fórmula inversa de Saemundsson 257
17.3. Análisis comparativo 259
17.3.1. Distorsiones singulares 260
17.3.2. Recomendaciones sobre la presión atmosférica 262
17.4. Aplicación de la refracción a los cálculos de posición solar 263
17.4.1. Recomendaciones para cálculos con refracción 264

18. Ecuación del tiempo (EoT) 265
18.1.Introducción y nociones generales 265
18.2. La evolución aparente del mediodía 265
18.3. Definiciones para la ecuación del tiempo 269
18.4. Cuantificación aproximada : los dos términos de la EoT 269
18.4.1. Primer término de EoT (excentricidad orbital) 270
18.4.2. Segundo término de EoT (oblicuidad) y ascensión recta α 272
18.4.3. Resultado total de EoT en minutos 276
18.5. Cálculo de EoT mediante los algoritmos de Smart y Meeus 278
18.5.1. Algoritmo de Smart para la EoT 278
18.5.2. Algoritmo de Meeus para la EoT 279

18.6. Ejemplo de cálculo comparativo entre expresiones de EoT 280
18.7. Puntos singulares en la ecuación del tiempo 284
18.8. Variación de la EoT en largos períodos de tiempo.....286
18.9. Analemas solares.....288

19. Cálculo secuencial: *ê*, *γ*, orto, ocaso, mediodía 291
19.1. Método secuencial 291
19.2. Precisiones y limitaciones del método.....292
19.2.1. Precisión en instantes de orto y ocaso 292
19.2.2. Precisiones en declinación δ.....293
19.2.3. Precisiones en acimut γ_S y elevación $\hat{e}$ 293
19.2.4. La ausencia de ΔT en los cálculos.....293
19.2.5. Limitación temporal 294
19.2.6. Modelo orbital.....294
19.3. Calculo de elevación $\hat{e}$ y acimut γ_N 294
19.3.1. Datos de partida 295
19.3.2. Obtención de JD 296
19.3.3. Cálculos orbitales.....297
19.3.4. Oblicuidad y declinación 299
19.3.5. Ecuación del tiempo, hora solar verdadera y ángulo horario ω 300
19.3.6. Cálculos finales de elevación ê y acimut γ_N 301
19.4. Horas de salida, ocaso y mediodía solares 302
19.4.1. Instante del mediodía H_m. Método de M. Perea.....303
19.4.2. Instantes de orto y ocaso.....305
19.4.3. Incremento de precisión en orto y ocaso.....306
19.5. Consejos para programación mediante hojas de cálculo (Excel) 307

PARTE III
Cálculos para muy altas precisiones

20. Conceptos y algoritmos para muy alta precisión 313
20.1. Corrección al tiempo continuo: efemérides y ΔT.....313
20.1.1. Valores a partir del MICA (período 1800-2050) 314
20.1.2. Expresiones polinómicas.....316
20.1.3. Conclusiones y últimos valores reales obtenidos para ΔT 319
20.2. Fórmula general de la declinación solar con latitud orbital β 321
20.3. Cálculos orbitales: el método VSOP.....323
20.3.1. Obtención de la longitud verdadera L 324
20.3.2. Obtención de la latitud orbital $\widehat{B}$ 325
20.3.3. Obtención del radio vector *R*.....326
20.4. Teoría de la nutación (1980) 331
20.5. Ascensión recta en órbitas tridimensionales.....335

20.6. Ángulo horario y tiempo sidéreo 339
20.6.1. Algoritmo para el cálculo de T_S y el ángulo horario ω 342
20.7. Sistema topocéntrico: paralaje.....343
20.7.1. Definición geodésica simplificada del elipsoide terrestre 344
20.8. Declinación y la ascensión recta: variación por paralaje 347
20.9. Modificación del ángulo horario por paralaje 347
20.10. Ángulo de elevación topocéntrica 347
20.10.1. Corrección por refracción atmosférica 348
20.10.2. Elevación topocéntrica corregida 348
20.11. Acimut topocéntrico 349
20.12. Orto, ocaso y tránsito 349
20.12.1. Instante del tránsito en un punto de longitud *λ*.....349
20.12.2. Máxima precisión en determinación de orto, ocaso y tránsito..... 351

21. Secuencia de cálculos para muy alta precisión 355
21.1. Método secuencial (elevación y acimut).....355
21.1.1. Datos de partida 355
21.1.2. Cálculo de JD, JDE y JM.....356
21.1.3. Cálculos orbitales.....357
21.1.4. Posicionamiento topocéntrico y resultados ê, γ.....363
21.2. Instantes de orto, culminación y ocaso (Meeus-NREL) 367
21.3. Comentarios finales sobre el método 373

Referencias bibliográficas 377

ANEXOS

Anexo 1. Formulario básico de geometría y cálculo vectorial 385
A1.1. Teoremas del seno y el coseno.....385
A1.2. Producto vectorial de dos vectores 386
A1.3. Descomposición de un vector en x, y, z 386

Anexo 2. Propiedades de la elipse 387
A2.1. Elementos básicos.....387
A2.2. Círculo y elipse: proporcionalidad de áreas 388

Anexo 3. Tablas "1980 IAU Theory of Nutation" 391

Anexo 4. Cambio hora oficial: Directiva y fechas (1974-2030) 395

Anexo 5. Solsticios y equinoccios para el s. XXI.....399

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1. Acimut γ y elevación ê solares 3
Fig. 1.2. Proyección diédrica de la esfera terrestre 5
Fig. 1.3. Esquema clásico de la traslación terrestre 6
Fig. 1.4. Orientación del eje de rotación terrestre 7
Fig. 1.5. Día solar y día sidéreo 8
Fig. 1.6. Elementos principales de la órbita terrestre 10
Fig. 1.7. Solsticios y equinoccios 14
Fig. 1.8. Eje terrestre y plano de sombra: posiciones relativas 16
Fig. 1.9. Posición relativa de solsticios y equinoccios respecto a los ejes principales de la elipse orbital (año 2021) 17
Fig. 1.10. Precesión 19
Fig. 1.11. Precesión y avance de los equinoccios 20
Fig. 1.12. El punto Aries 21
Fig. 1.13. La Polar y la precesión 22
Fig. 1.14. Variación de ε 24
Fig. 1.15. La nutación 25
Fig. 1.16. Giro del eje de ápsides 27
Fig. 1.17. Arcos elípticos y tiempos de recorrido 28
Fig. 1.18. El punto Aries y los ángulos de referencia orbital 32
Fig. 1.19. Latitud orbital 33
Fig. 1.20. Traslación y giro aparente del Sol 34
Fig. 1.21. Equivalencias orbitales 35
Fig. 1.22. Latitud orbital: referencias heliocéntrica y geocéntrica 36
Fig. 1.23. Modelos heliocéntrico y geocéntrico: relaciones angulares y punto Aries 37
Fig. 3.1. Declinación δ 47
Fig. 3.2. Ángulos para el cálculo de δ (órbita plana) 48
Fig. 3.3. Variación de δ a lo largo del año 50
Fig. 3.4. Comparación de valores de δ para diferentes procedimientos de cálculo 57
Fig. 4.1. Trópicos y círculos polares 60
Fig. 4.2. Desplazamiento visible de la línea del trópico de Cáncer 61
Fig. 4.3. Esquema del cálculo de Eratóstenes 62
Fig. 4.4. Altura del sol al mediodía 64
Fig. 4.5. Análisis geométrico de las horas de sol 66
Fig. 4.6. Centro solar sobre el horizonte *vs.* corona solar tangente al horizonte 67

Fig. 4.7. Sol aparente por refracción atmosférica 67
Fig. 4.8. Ángulo σ de la línea Tierra-Sol con la visual a la corona solar e incremento angular σ' por refracción atmosférica.....68
Fig. 4.9. Relaciones geométricas para el terminador aparente.....69
Fig. 4.10. Horas de sol a lo largo del año en diferentes latitudes 73
Fig. 5.1. Relación angular entre el terminador y el meridiano en V.....76
Fig. 5.2. Ángulo terminador - meridiano sobre la superficie terrestre. Amanecer 12 abril 2017, φ = 41,87 (Hontoria del Pinar, Burgos). Elaboración propia superpuesta sobre imagen SIGPAC [13] 77
Fig. 5.3. Relaciones angulares para el cálculo de t.....*78*
Fig. 5.4. Valores para t en el orto (amanecer) a lo largo del año correspondientes a distintas latitudes 81
Fig. 5.5. Avances de las zonas de luz y sombra a nivel local.....82
Fig. 5.6. Definición del punto V del terminador mediante $\hat{u}$ y φ.....84
Fig. 5.7. Representación desarrollada sobre plano del terminador para δ = 15º.....85
Fig. 5.8. Zona sombreada bajo el terminador para declinaciones positivas 86
Fig. 5.9. Zona sombreada sobre el terminador para declinaciones negativas.....86
Fig. 5.10. Planisferio terrestre obtenido de la NASA [65].....87
Fig. 5.11. Ajuste de la Fig. 5 10 superpuesta sobre el planisferio de la NASA [65].....87
Fig. 5.12. Imagen de la USNO [17] para el 16/04/2017, 6:00 UT.....88
Fig. 5.13. Desplazamiento aparente del terminador por la rotación terrestre.....89
Fig. 5.14. Posición de un punto P sobre el terminador en amanecer (izquierda) y ocaso (derecha).....90
Fig. 5.15. Coincidencia en el instante del amanecer en el solsticio de verano.....92
Fig. 5.16. Salidas y puestas de sol en la Península Ibérica, en TU referido a Greenwich (Rafael Soler, [16]).....93
Fig. 6.1. Plano del observador, esfera terrestre y bóveda celeste 96
Fig. 6.2. Plano del observador y bóveda celeste.....97
Fig. 6.3. Movimiento aparente del Sol en rotación 99
Fig. 6.4. Giro aparente del Sol en la bóveda celeste 100
Fig. 6.5. Trayectoria aparente del Sol para una declinación δ (perspectiva libre) 101
Fig. 6.6. Límites de las trayectorias aparentes del Sol.....102
Fig. 6.7. El "movimiento de tornillo" aparente del Sol a lo largo del año 104
Fig. 6.8. Movimiento aparente del Sol en diferentes latitudes 105
Fig. 6.9. Trayectoria del Sol: latitud media, hemisferio sur 106
Fig. 6.10. El mediodía solar en diferentes latitudes 107
Fig. 6.11. Desviación de la línea E-W de orto y ocaso.....109
Fig. 6.12. Igualdad $\beta_O = \hat{t}$ 110
Fig. 6.13. Puestas de sol en solsticios y equinoccios (Madrid, España).....111
Fig. 6.14. Alineaciones solsticiales y equinocciales en salidas y puestas del Sol en Madrid, España. Las equinocciales coinciden con la alineación E-W.....112

Fig. 7.1. Definición de acimut y elevación 113
Fig. 7.2. Ángulo horario ω 114
Fig. 7.3. Relación plano ecuatorial-plano del observador. Los ejes X y x son perpendiculares al plano de la figura en O 115
Fig. 7.4. Relación ω, δ vector Tierra-Sol con plano ecuatorial 116
Fig. 7.5. Elevación y acimut sur en el plano del observador 117
Fig. 7.6. Discriminación de cuadrantes con la función ATAN2(y,x) 122
Fig. 7.7. Trayectoria del Sol en alzado. Relación con δ y φ 123
Fig. 7.8. Plano π paralelo al del observador por O' 124
Fig. 7.9. Situación relativa del acimut sur γ_S y el ángulo horario ω 125
Fig. 7.10. Relación entre γ_N y β_O 127
Fig. 7.11. Duración del crepúsculo civil en diferentes latitudes 132
Fig. 8.1. Mediodía solar: mismo instante en reloj de sol y reloj en hora oficial 135
Fig. 8.2. Husos horarios geográficos y oficiales en 2021. The world factbook,U.S. Central Intelligence Agency (CIA) [69] 137
Fig. 8.3. Ejemplos de estados o regiones fuera de su huso natural 138
Fig. 8.4. Subrutina años bisiestos 149
Fig. 9.1. Incidencia del Sol sobre plano inclinado 151
Fig. 9.2. Sistema de proyección de e y n 153
Fig. 9.3. Gráfico de horas de salida y puesta de sol 155
Fig. 9.4. Repercusión de la DST en amanecer y ocaso (Madrid) 156
Fig. 9.5. Carta solar cartesiana (proyección cilíndrica) para latitud 40º 158
Fig. 9.6. Carta para latitud de 25º 158
Fig. 9.7. Carta para latitud de 60º 159
Fig. 9.8. Superposición del landscape del entorno del observador 161
Fig. 9.9. Diagrama polar equidistante para 40º basado en [29] 163
Fig. 9.10. Diagrama polar equidistante *vs*. proyección ortogonal 163
Fig. 9.11. Principios de la proyección estereográfica 164
Fig. 9.12. Proyección estereográfica para latitud 40° 165
Fig. 9.13. Proyección ortogonal de las trayectorias solares (planta y alzado) 166
Fig. 9.14. Diagrama móvil ortogonal. Latitudes 20º N y 40º N 168
Fig. 9.15. Diagramas móviles estereográficos. Latitudes 20º N y 40º N 169
Fig. 9.16. Recorrido aparente del Sol para el observador situado en el plano perpendicular a la línea Cénit-Nadir que pasa por O. (Alzado). 170
Fig. 9.17. Visualización de la trayectoria aparente del Sol por proyección sobre planos perpendiculares a N-S (izda.) y E-W (dcha.) 171
Fig. 9.18. Visualización de las trayectorias aparentes del Sol en diferentes fechas. Observador en φ=40º dirigiendo su visual al W, hacia el horizonte 172
Fig. 9.19. Visualización de las trayectorias aparentes del Sol en diferentes fechas. Observador en φ=0º dirigiendo su visual al W, hacia el horizonte 172

Fig. 9.20. Visualización de las trayectorias aparentes del Sol en diferentes fechas. Observador en φ=90º dirigiendo su visual al W, hacia el horizonte 173
Fig. 9.21. Composición fotografías al Sol en ocaso. Cámara hacia el W geográfico 173
Fig. 9.22. Principios del análisis de sombras en diédrica.....174
Fig. 9.23. Sombra completa en planta (izda.) y representación en 3D del resultado (dcha.) 175
Fig. 10.1. Algoritmo general para el cálculo del día juliano en función de la fecha gregoriana.....186
Fig. 10.2. Conversión de día juliano a fecha gregoriana.....188
Fig. 11.1. Variación de la excentricidad de la órbita terrestre en un intervalo de 2.000.000 años. Miles en abscisas, con origen en 1850 A.D. J.Meeus, More Mathematical Morsels. Willman-Beel, Inc., 2002 [37] 195
Fig. 11.2. Evolución de la excentricidad orbital con el tiempo a corto plazo.....196
Fig. 12.1. Variación de la latitud astronómica de la Tierra en grados.....200
Fig. 12.2. Anomalías media (M), excéntrica (E) y verdadera (υ).....201
Fig. 12.3. Argumento del perihelio ϖ_g y longitud media ε_g en la época g.....202
Fig. 12.4. Diagrama de flujo para la obtención de E mediante cálculo iterativo (calculadora programable operando en grados sexagesimales) 207
Fig. 12.5. Relación entre E y v. Sistema de coordenadas con origen en F.....209
Fig. 13.1. Evolución de ε_0 a lo largo de 20.000 años, con centro en 01/01/2000.....229
Fig. 14.1. Representación gráfica de los componentes de la nutación 232
Fig. 14.2. Composición de la nutación y la precesión 232
Fig. 14.3. Combinación precesión + nutación. Errores conceptuales 233
Fig. 14.4. Ángulos considerados en la nutación 234
Fig. 14.5. Carácter cíclico de la correción de la longitud L por nutación $\Delta\Psi$ y de la inclinación del eje ε, $\Delta\varepsilon$ 237
Fig. 15.1. Aberración de la luz: el caso del Sol.....240
Fig. 16.1. Representación geométrica de $\Delta\tau$.....246
Fig. 16.2. Posición genérica de la Tierra. Ángulo η 247
Fig. 16.3. Comparación de orientaciones del eje de rotación 247
Fig. 17.1. Esquema de la reflexión de la luz en la atmósfera 251
Fig. 17.2. Variación de la corrección $\Delta\hat{e}$ por refracción.....260
Fig. 18.1. Diferentes velocidades de traslación según posición orbital 270
Fig. 18.2. Primer término de la ecuación del tiempo (año 2017) 272
Fig. 18.3. Análisis geométrico de la diferencia entre mediodía solar.....273
Fig. 18.4. La ascensión recta α y la declinación δ de un astro 274
Fig. 18.5. Relaciones angulares entre Lt (sobre el plano de la eclíptica) y α 274
Fig. 18.6. Segundo término ecuación del tiempo 2017 276

Fig. 18.7. Representación de la ecuación del tiempo para 2017 277
Fig. 18.8. Evolución de la ecuación del tiempo a lo largo de los años 286
Fig. 18.9. Ecuación del tiempo para 2025.....287
Fig. 18.10. Analema solar 16:30 latitud 40º,45, longitud -3º,63,
TZ = 1. Observación al suroeste (acimut 230º) 288
Fig. 18.11. Carta solar para punto de observación en Madrid,
obtenida de [29] 290
Fig. 20.1. Evolución de ΔT (1800 y 2050) basada en MICA 315
Fig. 20.2. Valores registrados desde 2005 en ΔT a 1 de enero 0:00 Greenwich..... 321
Fig. 20.3. Cálculo de δ con latitud β. Método vectorial 322
Fig. 20.4. Esfera terrestre y posición aparente del Sol con latitud $\hat{B}$ 336
Fig. 20.5. Determinación de la ascensión recta en órbitas alabeadas.....337
Fig. 20.6. Ascensión recta, declinación y ángulo horario.....340
Fig. 20.7. Ángulo horario, tiempo sidéreo y ascensión recta 341
Fig. 20.8. Tiempo sidéreo y tiempo solar: γ (Aries) y el Sol.....341
Fig. 20.9. Ángulo de paralaje 343
Fig. 20.10. Latitud terrestre geocéntrica φ' y latitud geográfica φ 345
Fig. 20.11. Culminación solar en Preferida a 0:00 Greenwich.....349

NOTA: todas las figuras son de elaboración propia del autor, propietario del copyright de las mismas, salvo las expresamente indicadas en los pies de aquéllas obtenidas de terceras fuentes.

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Tipo del cálculo: variables según la precisión requerida (I) 44
Tabla 2.2. Tipo del cálculo: variables según la precisión requerida (y II) 45
Tabla 3.1. Valores medios declinación 2001-2050 52
Tabla 5.1. Puntos geográficos en el terminador de Finisterre en amanecer y anochecer en el solsticio de verano 91
Tabla 8.1. Valores medios Ecuación del Tiempo en minutos..... 141
Tabla 9.1. Pares de fechas notables con similar declinación..... 160
Tabla 17.1. Corrección de la refracción atmosférica, entradas por grados..... 254
Tabla 17.2. Corrección de la refracción para ê entre 0° y 20°. Extraída d el Anuario Astronómico 2021. Instituto Geográfico Nacional [1].....255
Tabla 17.3. Comparativa para Δê por refracción atmosférica..... 261
Tabla 17.4. Equivalencias entre unidades de presión atmosférica 263
Tabla 18.1. Orto, ocaso y culminación en febrero y noviembre de 2021 267
Tabla 18.2. Orto, ocaso y culminación solares en diciembre de 2020 y enero de 2021 268
Tabla 18.3. Valores en minutos de la EoT para 2017 obtenidos del MICA [5]. (Valores para las 00:00 TU)..... 285
Tabla 20.1. Valores obtenidos del MICA entre 1800 y 2050, para los días 1 de enero a las 0:00 UT (Greenwich) 315
Tabla 20.2. Polinomios Espenak-Meeus. (Valores basados en [55])..... 317
Tabla 20.3. Valores históricos estimados para ΔT..... 318
Tabla 20.4. Valores reales registrados para ΔT..... 319
Tabla 20.5. Últimos valores de ΔT. Web del Naval Meteorology and Oceanography Command [58]..... 320
Tabla 20.6. Elementos periódicos de la órbita terrestre 327-330
Tabla 20.7. Términos para el cálculo de la nutación, basados en el VSOP 87. Autores: Reda, Ibrahim; Andreas, Afshin."Solar Position Algorithm". Solar Energy © Elsevier Ltd 2004. [23]..... 334

NOTA: todas las figuras son de elaboración propia del autor, propietario del copyright de las mismas, salvo las expresamente indicadas en los pies de aquéllas obtenidas de terceras fuentes.

INTRODUCCIÓN

La presente obra va dirigida a aquellos ingenieros, arquitectos y técnicos en general, que deseen enfrentarse al problema del cálculo de la trayectoria aparente del Sol sin contar con ningún tipo de formación astronómica previa. Para comprender todos los procesos deductivos y aplicaciones aquí presentadas, no será necesario estar familiarizado con la trigonometría esférica o las fórmulas de Bessel; tampoco seguir una lenta curva de aprendizaje para comprender los numerosos sistemas de coordenadas de la Astronomía clásica y las fórmulas de paso entre los mismos. Bastará con un manejo fluido de la trigonometría plana y un conocimiento elemental de análisis vectorial. Nada que no esté al nivel de un alumno de los primeros cursos de cualquier carrera universitaria de la rama técnica.

No ha sido una tarea fácil despojar a la Astronomía de aquellos elementos superfluos que implican obstáculos para el aprendizaje en lo relativo estrictamente al movimiento aparente del Sol, creando al mismo tiempo una guía progresiva, coherente y autosuficiente. Ha constituido una labor de años, a pesar de la sencillez que percibirá el lector al hojear el libro.

El mejor apoyo al estudioso para facilitarle la asimilación de los métodos y conceptos que aquí se exponen, es la gran profusión de gráficos inéditos y la propuesta de un método progresivo basado en la presentación de los elementos astronómicos de forma gradual, expuestos a medida que vayan a ser necesitados. Para ello, además, se ha dividido la obra en tres partes fundamentales: cálculos en baja precisión y conceptos básicos, cálculos en media y alta precisión y cálculos para precisiones muy elevadas. Cada parte presenta un grado de dificultad mayor que la anterior.

Igualmente, se ha tratado de que el lector siga los procedimientos deductivos de la forma más natural y sencilla, planteando los mismos con herramientas elementales y anticipándonos a las dudas que puedan surgirle para su aplicación directa. Algunas fórmulas se obtienen utilizando varios métodos diferentes, llegando a las mismas expresiones en capítulos distintos. El lector sabrá comprender que no se trata de redundancias innecesarias, sino de una forma adecuada de afianzar conocimientos de forma paulatina.

Tal vez esta obra no resulte en absoluto ortodoxa desde un punto de vista estrictamente astronómico. No nos preocupa: realmente, para un ingeniero tampoco resulta ortodoxa la inexplicable escasez de gráficos con que invariablemente se enfrenta al hojear cualquier tratado de Astronomía

clásica. Como es, precisamente, a los técnicos, a quienes va dirigida esta obra, se ha elaborado la misma teniendo siempre presentes las preferencias de estos a la hora de analizar los procesos deductivos y de mostrarles las representaciones gráficas que mejor pueden comprender.

Algunos gráficos son, como decíamos más arriba, totalmente novedosos: nunca antes se han utilizado en Astronomía, y presuponen un hito en la enseñanza de esta aplicada a la técnica: la generalización de la declinación o de la ascensión recta para órbitas alabeadas, etc.

Los ingenieros y arquitectos encontrarán en esta obra lo extremadamente sencilla que resulta la deducción de las fórmulas generales de acimut y elevación solares, inexplicablemente ausentes en muchos tratados de Astronomía, o cuán elemental es la representación en proyección cilíndrica de las zonas en sombra de nuestro planeta sin más datos que la declinación solar. Conceptos como la ecuación del tiempo se deducirán de una forma tan sencilla que el lector podrá representarlos gráficamente de forma inmediata sin ninguna duda.

También es nuestro objetivo que el lector pueda adquirir suficiente pericia en el manejo de las diferentes variables como para poder elaborar su propio software para cualquier nivel de precisión, incluso con unas herramientas tan comunes como las hojas de cálculo. Se le presentan también enlaces con los que acceder a través de la red a aplicaciones de cálculo que le serán de utilidad para sus estudios y comprobaciones.

Sólo nos resta desear al lector que esta obra le resulte útil y, sobre todo, suficientemente amena, con el fin de que pueda seguirla con interés hasta el último capítulo.

El autor.

CÓMO UTILIZAR ESTA OBRA: ESTRUCTURA Y CONSEJOS AL LECTOR

Este libro es el compendio de infinidad de procedimientos de cálculo para la caracterización del movimiento solar aparente, y comprende tanto una labor de búsqueda y recopilación como una exposición de métodos propios desarrollados por el autor.

Como decíamos en el punto anterior, la presentación de los diferentes cálculos es progresiva, y esto permite que el lector vaya adquiriendo de forma gradual la destreza para el dominio de esta materia hasta las máximas cotas de precisión: sistemas adoptados incluso en las aplicaciones presentadas en la web al público por parte de numerosos observatorios astronómicos.

Sin embargo, es posible que el lector no necesite, al menos en un primer momento, alcanzar tales grados de exactitud: tengamos en cuenta que el público objetivo de este libro lo constituyen técnicos, no astrónomos. Por ello, esta obra está estructurada de forma que las diferentes variables y sus expresiones matemáticas van apareciendo en función de la tolerancia en exactitud que se requiera.

Así, en la **PARTE I, Fundamentos y cálculos en baja precisión**, se le presentan el lector los principios y caracterización del movimiento terrestre y las variaciones en la orientación de su eje dentro del **CAPÍTULO 1, Conceptos básicos,** que es fundamental que conozca para seguir con éxito todos los desarrollos posteriores.

Dentro de esta **PARTE I,** en el **CAPÍTULO 2,** se sitúa al lector en el contexto de las precisiones que va a poder alcanzar en función de los métodos y variables utilizadas. Unas tablas-resumen le serán de gran utilidad para saber qué variables van a recomendarse en cada caso.

Los capítulos restantes de esta **PARTE I** desarrollan los conceptos de declinación solar y las deducciones de las expresiones de acimut y elevación solares con el auxilio exclusivamente de la geometría plana, para que el lector pueda realizar directamente cálculos en baja precisión relacionados con la trayectoria solar. En algunos casos se obtienen expresiones de forma

redundante mediante la aplicación de diferentes métodos de resolución, con propósitos meramente didácticos.

Todo ello será suficiente para gran cantidad de estudiosos: aprendizaje universitario, precálculos tecnológicos, etc.

Si el lector desea adentrarse en el dominio de las altas precisiones, válidas para cálculos tecnológicos serios, deberá seguir la **PARTE II Cálculos en alta precisión**, donde se irán desarrollando a lo largo de los capítulos que componen la misma toda una serie de conceptos y variables utilizados en los procedimientos de cálculo secuencial más utilizados.

Aquí encontrará desarrollados los métodos de obtención de variables tales como la fecha juliana continua, cálculos orbitales precisos, variación de la oblicuidad de la eclíptica, correcciones por nutación, oblicuidad y aberración, métodos de cálculo de las correcciones por refracción atmosférica, ecuación del tiempo… De la mayor parte de ellos, ya tendrá algunas nociones adquiridas desde el **CAPÍTULO 1** de la **PARTE I**.

Con el dominio de esta segunda parte, el lector habrá adquirido suficiente destreza como para estar en condiciones de crear sus propias aplicaciones o utilizar adecuadamente las que se le sugerirán mediante enlaces para la obtención de hojas de cálculo existentes en la red, de reconocido prestigio.

Finalmente, si el lector desea conocer los procedimientos más precisos de determinación de la posición solar, y sus propuestas de cálculo, en la **PARTE III, Cálculos para muy altas precisiones** encontrará una detallada descripción de las últimas variables necesarias y sus propuestas de obtención: ΔT, ascensión recta, caracterización de órbitas alabeadas, correcciones para cálculos topocéntricos, etc.

Tras el dominio de esta última parte, el lector estará en condiciones de realizar cálculos similares a los obtenidos, como indicábamos más arriba, en las aplicaciones públicas de multitud de observatorios astronómicos.

Los anexos incluidos al final del libro incluyen, a modo de repaso para los técnicos, formularios y deducciones básicas geométricas y vectoriales, tablas astronómicas y fechas singulares: cambios de hora oficial en España desde 1947 hasta 2030 y fechas de solsticios y equinoccios para todo el s. XXI.

Para la notación decimal utiliza la coma (,) y para la separación de miles el punto (.), como es habitual en países hispanohablantes, aunque las razones trigonométricas utilizadas siguen la denominación universal *sin, cos, tan.*

PARTE I.

Fundamentos y cálculos en baja precisión

1

CONCEPTOS BÁSICOS

En este primer capítulo, vamos a exponer brevemente los principales conceptos que se van a utilizar a lo largo de la presente obra. Aunque algunos de ellos han sido adquiridos desde los primeros años de nuestra educación primaria y ampliados posteriormente, recomendamos al lector no obviar las descripciones aquí realizadas pues, en ocasiones, uno de los procesos más enojosos dentro del campo de la Astronomía, lo constituye el deshacernos de simplificaciones asociadas a nuestros conocimientos previos, lo que, en ocasiones, llega a entorpecer sensiblemente nuestra curva de aprendizaje.

1.1 Acimut y elevación solares

La ***trayectoria aparente del Sol***, percibida desde un observador situado en un punto determinado de la superficie terrestre, viene dada por la variación continua de dos ángulos que definen cada punto de esta en cada instante dado. Estos ángulos son:

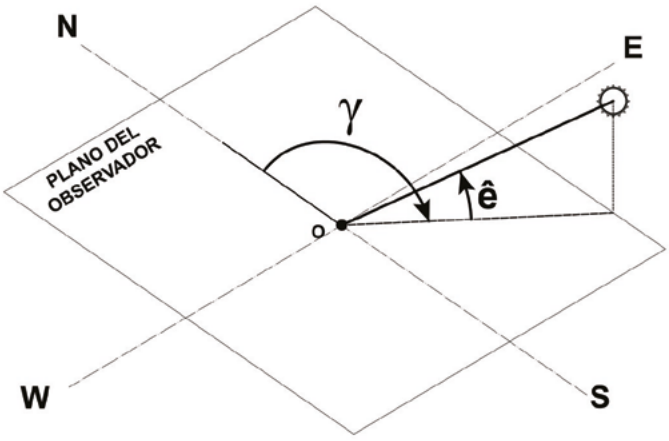


Fig. 1-1. *Acimut γ y elevación ê solares.*

Elevación ê, o ángulo que forma la visual al sol desde el observador terrestre con su proyección sobre el plano tangente a la superficie terrestre en el punto de observación[1].

Acimut γ, o ángulo que forma la proyección de la visual al sol con una dirección determinada, en general la línea Norte-Sur.

El fin último de la presente obra es la determinación del acimut y elevación en cualquier instante y para cualquier latitud y longitud, pudiendo utilizarse para ello diferentes métodos en función de la precisión requerida.

1.2 Proyecciones diédricas

Dado que esta obra va dirigida principalmente a técnicos (ingenieros, arquitectos, etc.), gran parte de los gráficos incluidos en ella utilizan el ***sistema diédrico de proyección*** para reflejar las posiciones de la Tierra en diferentes supuestos. Este método no ofrecerá ninguna dificultad para los profesionales o estudiantes de ramas técnicas; sin embargo, incluimos una sencilla aclaración gráfica acerca de alguna de las convenciones utilizadas, para facilitar su comprensión al lector generalista. En la **Fig. 1-2** se muestran las vistas utilizadas en diédrica para la representación de un cuerpo en planta y alzado.

Se ha tomado como ejemplo la imagen esquemática de nuestro planeta incluyendo su eje de rotación. La proyección ortogonal de la figura sobre el plano horizontal da como resultado la **planta** de esta. Análogamente para la proyección vertical (**alzado**). Así, el punto P del eje se proyectará sobre el plano horizontal como P' y sobre el vertical como P''. A lo largo de la presente obra, será muy común encontrarnos con una representación de la proyección horizontal de la esfera terrestre similar a la planta de la **Fig. 1-2**, con indicación de la dirección del eje terrestre en la misma mediante el vector proyectado tal y como se indica. La abreviatura P.N. se corresponderá con el polo Norte, que nos será de utilidad como referencia gráfica.

---

*[1] Es habitual denominar **α** a la elevación solar, sin que este criterio sea general. Preferimos utilizar ê en esta obra para no crear confusión al lector al utilizar más adelante la variable **α** para la* **ascensión recta** *en métodos de alta precisión.*

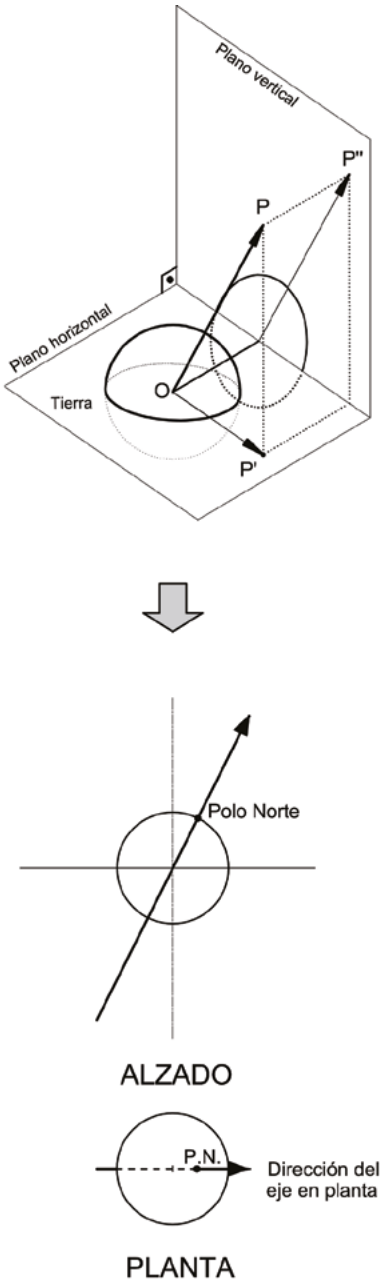


Fig. 1-2. *Proyección diédrica de la esfera terrestre y su eje de rotación.*

1.3 Conceptos astronómicos básicos

El acimut y la elevación solares dependen de la posición geográfica del observador: ***latitud φ***, medida desde el ecuador, positiva hacia el norte y negativa hacia el sur, y ***longitud λ***, medida desde el meridiano 0 o meridiano Greenwich, positiva hacia el este y negativa hacia el oeste. También dependen del instante de observación, debido a la posición orbital de nuestro planeta y de la rotación diurna, así como de una serie de variables astronómicas asociadas a sus movimientos y a la posición relativa de su eje, que vamos a caracterizar brevemente en los puntos siguientes.

1.4 Rotación y traslación terrestres

Como sabemos, los movimientos principales de la Tierra son dos: ***rotación*** alrededor de su eje de giro y ***traslación*** alrededor del Sol. El período de rotación es de un día, y el de traslación es de un año, aunque en otros apartados precisaremos más estas duraciones.

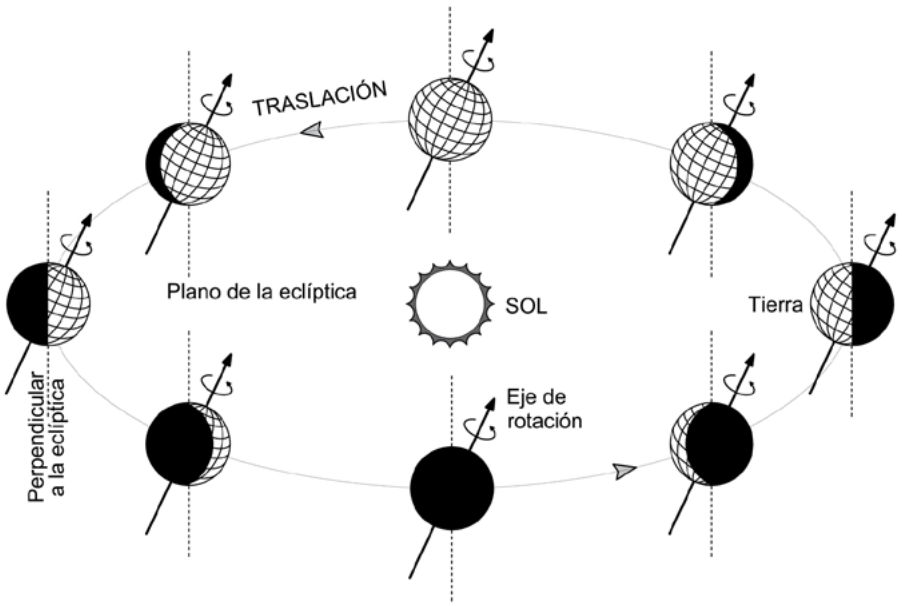


Fig. 1-3. *Esquema clásico de la traslación terrestre.*

Similares ilustraciones a la **Fig. 1-3** se repiten en todos los atlas escolares y contienen unos conceptos elementales sobre los que daremos una serie de indicaciones en este capítulo. Este sencillo esquema universalmente conocido es por sí mismo válido para el planteamiento y resolución de problemas de análisis de la trayectoria aparente del Sol desde la Tierra con una aproximación baja, pero suficiente para multitud de propósitos. Para procesos que requieran una mayor precisión, habrá que incorporar la cuantificación numérica de otros movimientos y perturbaciones de la dirección del eje terrestre, que se irán describiendo más adelante. La órbita de la Tierra, recorrida alrededor del Sol en un año, es elíptica, de acuerdo con las ***leyes de Kepler***, y, por tanto, está contenida en un plano ***(plano de la eclíptica)*** que pasa por el centro de aquel.

1.4.1 El efecto giroscópico de la rotación

La rotación de la Tierra confiere a su eje de giro una gran estabilidad, de acuerdo con las propiedades del movimiento giroscópico, cuyas características se describen en Mecánica Clásica, no siendo necesario su análisis en esta obra. Ello hace posible que el eje se mantenga paralelo a sí mismo a lo largo de la traslación, como queda representado en la **Fig. 1-3**. Dicho eje no es perpendicular al plano de la eclíptica formando con la vertical al mismo un ángulo ε, conocido como ***inclinación u oblicuidad de la eclíptica*** (**Fig. 1-4**).

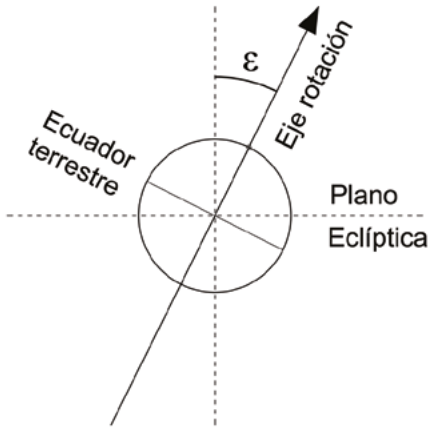


Fig. 1-4. *Orientación del eje de rotación terrestre.*

La inclinación del eje terrestre es la responsable de los ciclos estacionales en nuestro planeta, como veremos más adelante. La comunidad científica admite que el origen de esta inclinación, nula en los principios de la formación de los planetas del sistema solar a partir del desprendimiento de materia del nuestro astro central, pudo deberse al impacto posterior de un cuerpo celeste de grandes dimensiones sobre nuestro planeta. Ello habría provocado asimismo la proyección hacia el espacio de los materiales que, agrupados más tarde bajo la influencia gravitacional de la Tierra, dieron origen a la Luna.

1.4.2 Día solar y día sidéreo

Es necesario hacer unas precisiones sobre el movimiento de rotación terrestre y el concepto de **día**, asociado a dicho movimiento. Observemos la **Fig. 1-5**. En ella se han reflejado los giros de rotación y traslación vistos desde un punto exterior al plano de la eclíptica que permite divisar el polo norte terrestre. Ambos son antihorarios o, como se denomina en Astronomía giros directos. Se ha obviado la inclinación del eje terrestre, para mejor comprensión, y se ha situado el punto P sobre el ecuador terrestre.

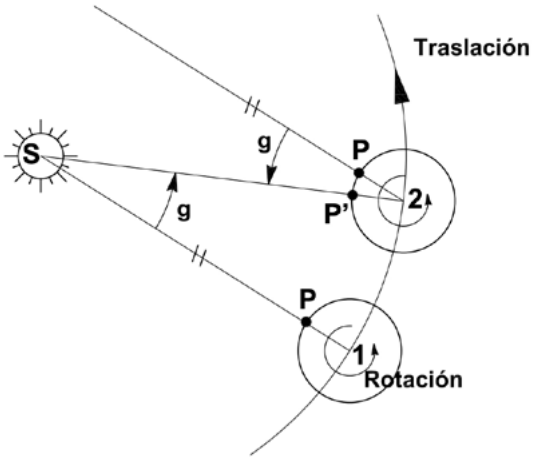


Fig. 1-5. *Día solar y día sidéreo.*

En un determinado instante 1, P estará situado sobre la línea Tierra-Sol. Al girar la Tierra respecto a su eje y desplazarse en traslación un ángulo ***g*** (instante 2), el punto P deberá situarse al día siguiente en P' para volver a estar en el instante del mediodía. Para ello, sobre el giro de 360º alrededor de su eje que lo llevaría nuevamente a P ***(día sidéreo)*** habrá que añadir un ángulo ***g***, del mismo valor que el ángulo girado en traslación. Así, el Sol se verá nuevamente desde P' en las mismas condiciones geométricas que el día anterior, es decir, situado otra vez sobre la línea Tierra-Sol. El tiempo transcurrido entre estos dos avistamientos consecutivos similares (mediodías solares) es de un ***día solar***, cuya duración media es de 24h. Como la Tierra tarda aproximadamente 365 días en recorrer los 360º de la órbita, tendremos que:

$$\hat{a} = \frac{360°}{365} = 0°,99 \cong 1°$$

Es decir, como el día solar medio es de 24 horas, el período de rotación sidéreo terrestre será de

$$T_{rot} = \frac{360°}{365} \cdot 24 = 23{,}93h \cong 23h56min$$

Con lo que el día sidéreo es aproximadamente 4 minutos menor que el día solar medio. A pesar de las simplificaciones indicadas, o incluso el hecho de que la velocidad de traslación varíe ligeramente, como veremos, la diferencia media obtenida es suficientemente aproximada.

1.4.3 Variaciones en el período de rotación de la tierra: ΔT

La duración de la rotación terrestre no es constante a lo largo del tiempo. Diferentes factores, como la distribución de masas de hielo sobre la Tierra, actividad sísmica, deriva continental y otros muchos, de cuantificación difícil y predicción excesivamente compleja, producen alteraciones en el período de rotación. Estas perturbaciones sólo se tienen en cuenta en cálculos de muy elevada precisión, y su caracterización numérica aproximada queda lejos del alcance de este capítulo. Digamos solamente que la cuantificación de estas variaciones da lugar a la variable ***ΔT***, cuyas expresiones, aproximaciones y valores propuestos analizaremos en los capítulos correspondientes.

1.5 Dimensiones del Sol, la Tierra y la órbita. Elementos notables

Es útil tener una idea clara sobre las dimensiones del Sol, la Tierra y los elementos geométricos de la órbita (**Fig. 1-6**) antes de entrar en procesos deductivos que requieren simplificaciones acordes con dichas magnitudes. Se indican a continuación los valores principales.

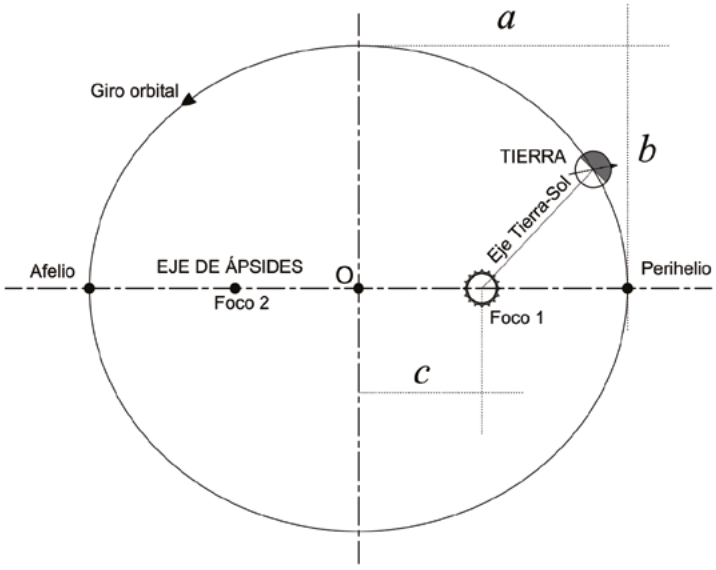


Fig. 1-6. *Elementos principales de la órbita terrestre.*

Los valores aproximados que se consignan a continuación se corresponden con los indicados en el Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid para 2021 [1].

Radio solar:	*695660 km*
Radio ecuatorial terrestre:	*6378,1366 km*
Excentricidad de la órbita:	*e = 0,01670007 (promedio para 2021)*
Distancia media Tierra-Sol = 1,000001018 UA (unidades astronómicas)	

La distancia Tierra-Sol es un valor medio, que coincide con el semieje mayor de la órbita, ***a*** (**Fig. 1-6**). En el pasado, la UA, cuyo valor es:

$$1\ \text{UA}^{2}\ = 149\ 597\ 871\ \text{km}$$

se identificaba con dicho semieje. Mediciones más precisas del mismo han dado como resultado el ajuste indicado más arriba, por lo que:

$$a = 1{,}000\ 001\ 018\ \text{UA} = 149\ 598\ 023\ \text{km}$$

Valor que, en el Anuario de 2021, se redondea al valor de 149 598 000 km.

La excentricidad de la elipse orbital varía muy lentamente, a lo largo del tiempo, en el intervalo **[0,005, 0,058]**, y en un ciclo completo superior a 400 000 años, con varios subciclos. A pesar de esta variación, la longitud de su eje orbital mayor permanece visiblemente constante, por lo que solo se modifica de forma continua la longitud del eje menor. Esta propiedad orbital es común a los otros planetas menores (Mercurio, Venus y Marte), según se recoge en [2]. El semieje mayor de la órbita, ***a***, se conoce, según decíamos más arriba, como ***distancia media de la Tierra al Sol***, entendiendo como tal la mitad de la suma de la distancia máxima más la distancia mínima. El eje imaginario sobre el que se sitúa el eje mayor se conoce como ***eje de ápsides***. La ***semidistancia focal***, ***c***, es la distancia que separa al Sol del centro ***O*** de la elipse orbital. El ***perihelio***, situado sobre la línea de ápsides, es el punto más cercano de la órbita al Sol. El ***afelio***, situado sobre la misma línea, es el punto más alejado de aquel. De acuerdo con las leyes de Kepler, la velocidad de traslación de la Tierra es máxima en el perihelio y mínima en el afelio. El eje menor de la elipse, ***b***, está relacionado con los valores anteriores mediante la expresión (véase Anexo 2, punto A2.1):

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

---

[2] Este valor será utilizado a lo largo de esta obra, de acuerdo con Simon, Bretagnon & alt., según [39]. Esta expresión es coherente con el resto de las fórmulas matemáticas extraídas del modelo VSOP que se analizará en otros capítulos, y por esa razón se mantiene en nuestros desarrollos.

Por lo que: $b = 0{,}99986054 \cdot a$

Lo cual indica que la órbita es casi circular, no pudiéndose apreciar en una representación gráfica la diferencia entre la órbita y un círculo circunscrito. No obstante, en lo que sigue adoptaremos frecuentemente la convención de exagerar gráficamente la diferencia entre ambos ejes para mejor comprensión de algunos fenómenos. Hay que hacer constar que, a pesar del aspecto cuasi-circular de la órbita, los fenómenos asociados a su forma elíptica se dejan observar de forma bien patente. Si queremos calcular la distancia actual entre el centro de la elipse orbital y el Sol:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 149{,}6 \cdot 10^6 \sqrt{(1 - 0{,}99986054^2)} \cong 2{,}5 \cdot 10^6 km$$

Con estos datos, podemos establecer una sencilla comparativa dimensional mediante objetos de uso cotidiano para analizar los órdenes de magnitud de los elementos descritos. Supongamos que el tamaño del Sol fuera el de un globo terráqueo como el que todos tenemos en nuestros hogares, con unos 25 cm de diámetro. El diámetro de la Tierra sería entonces de 2,30 mm, es decir, el de la sección menor de un grano de arroz. La distancia media entre ambos elementos sería de 27 metros, aproximadamente. Es decir, la distancia entre una ventana de un 8º piso con bajo y la acera de la calle. Con esta comparación podemos entender que los rayos del Sol lleguen a la Tierra prácticamente como haces paralelos, provocando que la Tierra presente un hemisferio iluminado y el otro en la oscuridad. En sentido estricto, la enorme diferencia de radios provoca que siempre sea ligeramente mayor la parte iluminada, como se verá en correcciones posteriores. Pero a efectos de descripción fenomenológica preliminar, no es necesario entrar aún en ese nivel de detalle. Finalmente, hay que resaltar que a pesar de que la distancia media Tierra-Sol es de unos 150 millones de kilómetros, esta magnitud es insignificante con respecto a la distancia entre la Tierra y cualquiera de las estrellas del firmamento, expresadas todas ellas en ***años luz*** (1 año luz = $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km). Por ejemplo, la más cercana a la Tierra, *Proxima Centauri*, dista de nosotros 4,24 años luz, mientras que la estrella Polar se encuentra a 447 años luz de nuestro planeta. La distancia Tierra-Sol antes indicada es de solo $1{,}59 \cdot 10^{-5}$ años-luz, es decir, 8,32 minutos luz.

1.5.1 Las leyes de Kepler

La traslación terrestre anteriormente descrita se rige por las tres leyes fundamentales de Kepler[3]:

1) ***Ley de la órbita:*** *Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de sus focos.* Los elementos fundamentales de la elipse terrestre se han indicado más arriba, aunque la órbita no es absolutamente plana en sentido estricto, presentando perturbaciones infinitesimales por efecto de la atracción gravitatoria del resto de planetas (especialmente los mayores). Estas perturbaciones, aunque mínimas, se cuantificarán en otros capítulos, siendo su cálculo necesario solo cuando se requieran muy altas precisiones.

2) ***Ley de áreas:*** *En tiempos iguales, el vector Sol-Tierra recorre áreas iguales.* Ello implica que cuanto más cerca se encuentra nuestro planeta del Sol, mayor es su velocidad orbital. Esta variación de velocidad, aunque pequeña, provoca que, de acuerdo con la definición de día sidéreo (1.4.2), la duración de los días también varíe en función de la posición orbital. Este es uno de los dos factores que conforman lo que conocemos como ***ecuación del tiempo***, que analizaremos en detalle en otros capítulos.

3) ***Ley de los períodos:*** El cuadrado del período de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita. Es decir:

$$\frac{T^2}{a^3} = C$$

Siendo T el período o tiempo que tarda el planeta en recorrer su órbita (generalmente expresada en años terrestres), a su semieje mayor (generalmente en unidades astronómicas UA), y C una constante idéntica para todos los planetas.
Newton se basó en esta tercera ley para enunciar la ley de gravitación

---

[3] Johannes Kepler, matemático y astrónomo alemán (1571 – 1630). Sus leyes sobre el movimiento de los planetas confirmaron y caracterizaron matemáticamente los principios del sistema heliocéntrico de Copérnico.

universal. Considerando el enunciado de esta, podemos escribir:

$$C = \frac{4\pi^2}{GM}$$

donde M es la masa del Sol, y G la constante de gravitación universal.

1.6 Solsticios y equinoccios

Como se desprende de la anterior **Fig. 1-3**, debido a la traslación terrestre, el plano que separa la zona iluminada de la Tierra, que mira hacia el Sol, y la zona de obscuridad, que denominamos en esta obra ***plano de sombra***[4], es siempre perpendicular al eje Tierra-Sol y al plano de la eclíptica.

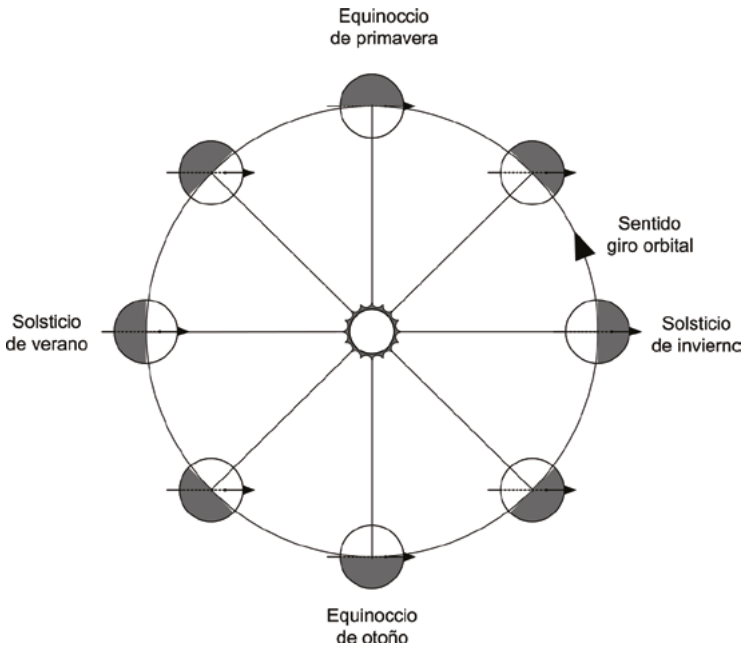


Fig. 1-7. *Solsticios y equinoccios.*

[4] *Esta denominación es propia del autor; no se utiliza en Astronomía general.*

Por esta razón, en determinados instantes, el plano de sombra contiene al eje de giro de terrestre. Estos instantes son el ***equinoccio de primavera*** y el ***equinoccio de otoño***.

En ellos, el eje Tierra-Sol corta al ecuador terrestre. Los instantes en los que el plano de sombra es perpendicular a la proyección del eje terrestre sobre el plano de la eclíptica son los ***solsticios***. En la figura esquemática en planta de la traslación terrestre (**Fig. 1-7**) se puede ver la proyección del eje terrestre en relación con el plano de sombra. En el ***solsticio de verano***, la línea Tierra-Sol corta a la esfera terrestre a la máxima altura sobre el ecuador, y en el ***solsticio de invierno***, el ángulo es máximo bajo el ecuador terrestre. Esto se observa claramente si cortamos la **Fig. 1-7** por planos determinados por la línea Tierra-Sol y el eje de giro de la tierra en los solsticios y equinoccios, tendremos a su vez la **Fig. 1-8**, que aclara estos conceptos. En los solsticios, los ángulos de la línea Tierra-Sol sobre el ecuador (verano) y bajo el ecuador (invierno) son, respectivamente, $+\varepsilon$ *y* $-\varepsilon$, como se verá más adelante. Es fácil observar que los solsticios y equinoccios en un hemisferio son opuestos a los del otro. Vemos en la **Fig. 1-8** que los puntos situados sobre la esfera terrestre por encima del ecuador, tiene más horas de sol que de oscuridad en el solsticio de verano, pero ocurre lo contrario en los puntos situados sobre el hemisferio Sur. Por ello, el solsticio de verano en el hemisferio boreal (norte) es el de invierno en el hemisferio austral, y viceversa. En lo sucesivo, utilizaremos la denominación de solsticios y equinoccios coherente con el hemisferio norte. En los equinoccios las horas de sol son las mismas que las de oscuridad en todos los puntos del planeta. Basta con observar la posición del eje de rotación en estos instantes en la **Fig. 1-8**. El equinoccio de primavera marca el comienzo de la primavera, el solsticio de verano el inicio del verano, y así sucesivamente. Los rayos solares, en la práctica paralelos a la línea Tierra-Sol, inciden con diferente ángulo sobre la superficie de los hemisferios norte y sur en las distintas estaciones. En verano, su ángulo de incidencia es máximo en el hemisferio norte y mínimo en el sur, y viceversa. En invierno ocurre lo contrario. Esta circunstancia, unida a la distribución de horas de sol, es la que provoca que los veranos sean cálidos y los inviernos fríos. Por supuesto, influyen otros factores en las temperaturas medias estacionales, entre ellos la inercia térmica inducida por los océanos. En la **Fig. 1-8** también observamos que el ángulo que forma la línea Tierra-Sol con el plano del ecuador terrestre varía a lo largo del año. Este ángulo

fundamental, conocido como ***declinación solar***, se analiza en detalle en capítulos siguientes.

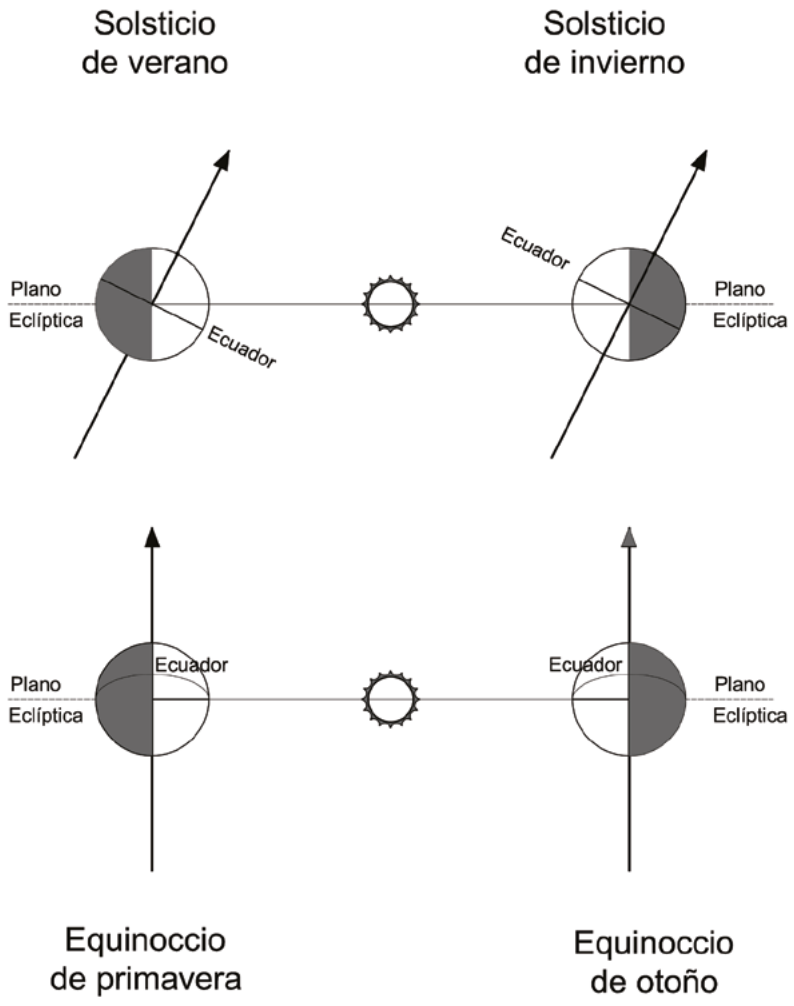


Fig. 1-8. *Eje terrestre y plano de sombra: posiciones relativas.*