

ECG1

# MATHS APPLIQUÉES

**1 DEVOIR CORRIGÉ  
PAR SEMAINE**



*avec corrigés commentés*

Olivier Arrigoni



ECCI

# MATHS APPLIQUÉES

**1** DEVOIR CORRIGÉ  
PAR SEMAINE



Olivier ARRIGONI  
Professeur en ECCI  
au lycée Camille Vernet (Valence)



**Conception graphique couverture :** Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-114517

Dépôt légal : juin 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

# Avant-propos

Aux concours des grandes écoles de commerce (Ecricone, EMLyon, HEC, EDHEC, ESSEC...), les mathématiques prennent une grande place avec une à deux épreuves de quatre heures par banque de concours. En général constituées de trois à quatre exercices, ces épreuves abordent le mieux toutes les parties du programme lors de sujets cohérents ; chaque exercice porte sur l'une des grandes parties du programme (algèbre linéaire des matrices, analyse des fonctions et suites, probabilités). On remarque également une progression de la proportion des questions d'informatique (langage Python) dans ces épreuves.

A l'exception du concours HEC, qui organise des épreuves orales d'admission, les candidats présentant la spécialités mathématiques appliquées en ECG seront uniquement interrogés sur ces épreuves écrites. Un travail spécifique au long cours est nécessaire pour aborder ce format d'épreuve. Plus que le programme des épreuves, c'est la longueur des exercices, leur articulation ou encore l'utilisation de questions antérieures qui sont à travailler.

Cet ouvrage ne s'intéresse qu'au programme de la première année. Même s'il y a peu de chance que les problèmes proposés puissent s'approcher d'un sujet des écrits de deuxième année, on s'intéresse à la maîtrise du programme de première année (bien nécessaire) et aux méthodes qui font des écrits réussis, comme on l'a décrit ci-avant.

Pour mettre en avant la régularité, on présente 35 problèmes d'écrits pour que chacun occupe une semaine de la première année de ECG, qui est une année bien remplie ! On peut considérer que deux problèmes constituent une épreuve de quatre heures de première année. Il faut plutôt en compter

trois pour estimer le volume d'une épreuve de concours de deuxième année. On en vient à l'organisation concrète de l'ouvrage.

- On propose tout d'abord un chapitre d'introduction sur les méthodes de travail et comment *apprendre à apprendre*. En particulier, on insiste sur le travail à réaliser tout au long de l'année avec le travail de problèmes d'écrit.
- La partie suivante présente le programme officiel de mathématiques appliquées en ECG1 avec une correspondance entre chaque notion de ce programme et un ou plusieurs problème(s) de cet ouvrage.
- Les énoncés de chaque problème sont présentés avec un titre, un thème général, un ensemble de mots clé à la fin et un niveau de difficulté qui se décline en trois catégories :

aucune étoile : **Facile**    ★ : **Moyen**    ★★ : **Difficile**

- Les corrigés sont soigneusement rédigés, aux détails près et sont parsemés de conseils, méthodes, remarques en encadrés pour que son utilisation aille bien au-delà de la simple correction dudit problème.

Le travail régulier et approfondi, tant sur les automatismes que sur une bonne rédaction d'une copie, est un travail qui paye vraiment. Un candidat qui aura réellement fait cet effort se démarquera des autres à coup sûr.

Bon travail à tous !

# Introduction aux méthodes de travail

On propose dans cette introduction des méthodes pour mener à bien un travail efficace en CPGE. On introduit ensuite quelques conseils pour bien utiliser l'ouvrage de problèmes qui suit.

## 1) Apprendre à apprendre

### a) Pourquoi apprendre à apprendre ?

L'entrée en classe préparatoire représente une transition majeure : la quantité et la technicité des notions à maîtriser s'accroissent et l'autonomie devient indispensable. Or, réussir dans ces classes ne consiste pas à suivre le rythme, mais à se l'approprier. Travailler efficacement, ce n'est pas travailler plus, c'est mieux comprendre ce qu'on fait, pourquoi on le fait, et comment on le fait.

En somme, pour avoir un apprentissage efficace en CPGE, il faut aller au bout de son cours, travailler l'articulation de celui-ci, la suite logique de son exposition. Tout ce qui y sera porté n'est pas superflu, même si certaines parties sont plus importantes que d'autres. Un apprentissage qui se limiterait aux seules formules ou à la seule répétition d'exercices types ne peut pas permettre de réussir.

### b) Les piliers d'un travail efficace en mathématique

Il faut comprendre plutôt que de mémoriser. La tentation est grande de vouloir apprendre les cours par cœur. Mais en mathématiques, la compréhension profonde des notions est la meilleure alliée : une définition comprise est plus facile à retrouver, un théorème bien saisi se démontre presque de lui-même. A ce titre, on insiste sur le fait que les démonstrations faites

en classe présentent un intérêt pédagogique majeur, dans le sens où elles peuvent constituer des modèles de raisonnement. Il ne faut d'ailleurs pas oublier son bon sens, même sur des notions compliquées et abstraites.

Un conseil lors de ses révisions est de réexpliquer à haute voix une notion ou une preuve comme si l'on était son propre professeur. Ce test simple révèle vite ce qui est vraiment acquis et ce qui mérite une attention plus particulière.

On ne le répètera jamais assez, il faut de la régularité dans son travail, au sens de la répétition des concepts. "Enseigner, c'est répéter", disait-on autrefois. C'est toujours d'actualité! Un apprentissage *en spirale* est celui qui est à terme le plus efficace, c'est-à-dire celui qui revient le plus régulièrement possible sur les notions et les formules.

Il faut avoir en tête que le travail en mathématiques est cumulatif. Il repose sur des bases solides, qui se consolident en avançant et en réinvestissant toujours les apprentissages passés. Travailler régulièrement, c'est éviter l'oubli, mais aussi gagner en profondeur à chaque retour sur une notion.

On ne peut que conseiller de prévoir chaque semaine des temps de reprise : relire ses erreurs, revoir un cours précédent, refaire un exercice difficile. Il ne faut surtout pas laisser une séance de côté en se disant qu'on y reviendra plus tard sans avoir fait au moins un retour.

### **c) L'actif contre le passif : on apprend en faisant**

En premier lieu, c'est le cours que l'on doit travailler activement. Lorsqu'on le révise, on doit avoir un crayon à la main pour ajouter une remarque, noter une question à poser, terminer un exemple laissé au lecteur. On se doit par la suite d'en faire une synthèse, sous la forme qui convient à soi-même (fiche, carte mentale...).

De la même façon, lire un corrigé, ce n'est pas faire un exercice. Le cerveau n'apprend que lorsqu'il tente, échoue, ajuste, réussit. Il y a en général peu de chance que l'on soit capable de reproduire ce que l'on n'a pas fait soi-même.

On conseille fortement de toujours commencer par chercher sans regarder la solution. Même un échec total est formateur s'il est analysé ensuite, notamment à l'aide de la correction. Il faut alors voir ce qui n'est manifestement pas connu et mettre les moyens pour le retravailler efficacement.

Si la peur de la "feuille blanche" est trop intense, on peut alors s'autoriser un peu d'aide. Il est tout à fait possible d'aller voir une partie du corrigé d'un problème pour se redonner les moyens de poursuivre.

Enfin, il faut appréhender ses erreurs. L'erreur n'est pas un obstacle, c'est en fait la motivation de l'apprentissage. Une erreur analysée devient une ressource précieuse. Ce qui importe, ce n'est pas de "ne pas se tromper",

mais de savoir pourquoi on s'est trompé. C'est d'ailleurs la meilleure façon de ne pas reproduire une telle erreur. Il faut bien avoir en tête que d'autres erreurs guetteront au fur et à mesure que l'année avance, alors faire en sorte que les premières ne reviennent pas est un enjeu majeur. Il n'y a rien de pire que de voir s'accumuler des difficultés, qui mèneraient inéluctablement au découragement.

On peut imaginer de tenir un carnet des erreurs. Une erreur notée, comprise et classée est une erreur qui ne revient plus.

On rappelle qu'un devoir en CPGE ne présente pas d'enjeu de réussite impérative comme lors d'un examen. Chaque énoncé doit être vu comme un outil de formation, quelque soit la réussite qui en découle à la première tentative.

## 2) Comment travailler avec cet ouvrage ?

### a) Construction de l'ouvrage

Ce livre est pensé comme un compagnon de progression. Le fait qu'il prévoit de traiter un problème par semaine montre une volonté d'accompagner et consolider les connaissances tout au long du parcours.

Même si la progression qui est prévue n'est pas celle que l'on trouvera dans sa classe avec son enseignant, les problèmes sont classés par ordre croissant d'outils mathématiques nécessaires pour être traités. On commence donc par des problèmes assez calculatoires, qui ne nécessitent souvent que des prérequis de spécialité mathématiques de Terminale (en plus approfondi) pour être abordés. Ensuite, on rentre de plus en plus dans le programme de mathématiques appliquées en ECG1, notamment dans les articulations entre les études de suites, des probabilités et du calcul matriciel.

La division selon les deux semestres est déjà un point de repère. Les 18 premiers problèmes sont très axés sur un travail de premier semestre, avec une transition sur les 14 à 18 vers des notions plus propres au second semestre. On remarquera également que les 6 derniers problèmes concernent des thèmes d'informatique. Bien que l'informatique est enseignée par un programme sur les deux semestres, la plupart des notions que ces problèmes utilisent sont des notions d'informatique et de mathématiques du second semestre, d'où leur placement en fin d'ouvrage. On peut considérer que les deux premiers d'entre eux (30 et 31) peuvent se traiter en fin de premier semestre.

## **b) Sur l'utilisation de chaque problème**

Chaque problème a sa difficulté propre. Mais ce que l'on cherche à avoir en commun, c'est un enchaînement des questions qui le différencie d'un simple exercice de TD. Certains problèmes peuvent même comporter plusieurs parties plus ou moins indépendantes.

Étant donné les longueurs choisies pour chaque, on peut considérer que deux problèmes parmi tous ceux proposés constituent une épreuve classique de 4 heures en première année. Le rythme étant supposé s'intensifier par la suite, c'est plutôt trois problèmes qu'il faut considérer pour un rythme de deuxième année. Au début, le rythme sera certainement difficile à tenir, mais l'entraînement régulier permettra d'aller plus vite.

Lorsque l'on traite un problème, il est fortement recommandé de lire l'intégralité du sujet. Lors de cette lecture, on doit repérer le mieux possible les notions du cours qui sont mobilisées, les formules, mais aussi les questions de cours qui seraient "déguisées" par des demandes de rappels. Même lors d'une épreuve chronométrée, ce n'est pas du temps de perdu.

## **c) Il faut aimer chercher...**

Le goût de l'effort intellectuel est un plaisir qui se cultive. il ne va pas toujours de soi, et il est vrai qu'on peut vite être découragé car on ne réussit pas aussi bien qu'on le pense, notamment vis-à-vis de l'investissement que l'on y met. Mais le moment où l'on trouve enfin la clé d'un problème est une récompense profonde. Ce plaisir est au cœur de la réussite en mathématiques.

Il ne faut jamais oublier que l'élève qui réussit, ce n'est pas celui qui comprend tout du premier coup. C'est celui qui n'abandonne pas la recherche et qui analyse ses démarches. On ne répètera jamais assez l'adage suivant : quand on trouve sans chercher, c'est qu'on aura longtemps chercher sans trouver.

# Sommaire

Introduction aux méthodes de travail.....	5
Index thématique du programme.....	11

## Devoirs

■ Devoir 1.....	17	■ Devoir 19.....	54
■ Devoir 2.....	19	■ Devoir 20.....	56
■ Devoir 3.....	21	■ Devoir 21.....	58
■ Devoir 4.....	23	■ Devoir 22.....	60
■ Devoir 5.....	25	■ Devoir 23.....	62
■ Devoir 6.....	27	■ Devoir 24.....	64
■ Devoir 7.....	29	■ Devoir 25.....	66
■ Devoir 8.....	31	■ Devoir 26.....	68
■ Devoir 9.....	34	■ Devoir 27.....	70
■ Devoir 10.....	36	■ Devoir 28.....	72
■ Devoir 11.....	38	■ Devoir 29.....	74
■ Devoir 12.....	40	■ Devoir 30.....	76
■ Devoir 13.....	42	■ Devoir 31.....	78
■ Devoir 14.....	44	■ Devoir 32.....	80
■ Devoir 15.....	46	■ Devoir 33.....	84
■ Devoir 16.....	48	■ Devoir 34.....	87
■ Devoir 17.....	50	■ Devoir 35.....	90
■ Devoir 18.....	52		

## Corrigés

■ Corrigé du devoir 1.....	97	■ Corrigé du devoir 11.....	146
■ Corrigé du devoir 2.....	101	■ Corrigé du devoir 12.....	151
■ Corrigé du devoir 3.....	107	■ Corrigé du devoir 13.....	156
■ Corrigé du devoir 4.....	111	■ Corrigé du devoir 14.....	161
■ Corrigé du devoir 5.....	117	■ Corrigé du devoir 15.....	165
■ Corrigé du devoir 6.....	121	■ Corrigé du devoir 16.....	170
■ Corrigé du devoir 7.....	126	■ Corrigé du devoir 17.....	176
■ Corrigé du devoir 8.....	131	■ Corrigé du devoir 18.....	181
■ Corrigé du devoir 9.....	136	■ Corrigé du devoir 19.....	187
■ Corrigé du devoir 10.....	141	■ Corrigé du devoir 20.....	191

■ Corrigé du devoir 21 .....	196	■ Corrigé du devoir 29 .....	235
■ Corrigé du devoir 22 .....	201	■ Corrigé du devoir 30 .....	240
■ Corrigé du devoir 23 .....	206	■ Corrigé du devoir 31 .....	245
■ Corrigé du devoir 24 .....	211	■ Corrigé du devoir 32 .....	250
■ Corrigé du devoir 25 .....	216	■ Corrigé du devoir 33 .....	254
■ Corrigé du devoir 26 .....	220	■ Corrigé du devoir 34 .....	259
■ Corrigé du devoir 27 .....	225	■ Corrigé du devoir 35 .....	264
■ Corrigé du devoir 28 .....	230		

# **Index thématique du programme**

## Enseignement de mathématiques du 1<sup>er</sup> semestre

Programme officiel	Problèmes correspondants
Éléments de logique. Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence. Notations $\Sigma, \Pi$ .	<b>5</b> <b>6</b>
Ensembles, applications entre ensembles	<b>7</b> <b>12</b>
Systèmes linéaires.	<b>8</b> <b>9</b>
Matrices réelles à $n$ lignes et $p$ colonnes : ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ;	<b>8</b> <b>9</b>
Graphes	<b>10</b>
Suites numériques. Suites usuelles. Comportement des suites.	<b>4</b> <b>14</b> <b>15</b> <b>16</b> <b>17</b>
Fonctions polynomiales.	<b>1</b> <b>2</b>
Fonctions usuelles : carré, racine carré, valeur absolue, partie entière.	<b>2</b> <b>3</b>
Fonctions logarithme et exponentielle ; puissances quelconques.	<b>3</b>
Limites d'une fonction. Continuité.	<b>3</b> <b>19</b>
Croissances comparées.	<b>3</b> <b>17</b> <b>18</b>
Étude globale des fonctions (parité, majoration, monotonie).	<b>18</b>
Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection.	<b>18</b>
Études statistiques.	<b>11</b>
Expériences aléatoires.	<b>12</b>
Coefficients binomiaux.	<b>7</b> <b>12</b>
Probabilité sur un univers fini. Probabilités conditionnelles. Indépendance.	<b>12</b> <b>13</b>

## Enseignement de mathématiques du 2<sup>nd</sup> semestre

Programme officiel	Problèmes correspondants
Espace $\mathbb{R}^n$ . Combinaisons linéaires.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">28</span>
Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ . Sous-espaces engendrés. Dimension et rang.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">28</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">29</span>
Application linéaire $X \mapsto MX$ . Noyau et rang.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">29</span>
Dérivation en un point. Inégalités des accroissements finis. Dérivées successives.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">19</span>
Fonctions convexes. Caractérisations. Utilisation. Étude graphique	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">20</span>
Équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">22</span>
Aire sous la courbe. Primitive. Intégration. Sommes de Riemann.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">21</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">27</span>
Séries numériques.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">23</span>
Probabilités sur un univers quelconque. Généralisation des probabilités conditionnelles et de l'indépendance.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">24</span>
Variables aléatoires réelles. Espérance et variance. Lois usuelles	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">25</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">26</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">27</span>

## Enseignement annuel d'informatique et algorithmique

Programme officiel	Problèmes correspondants
Recherche séquentielle dans une liste.	<b>30</b> <b>32</b>
Algorithmes dichotomiques, algorithmes gloutons. Algorithmes de tri.	<b>32</b>
Fichier de données simples.	En lien avec <b>11</b>
Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$ .	<b>33</b>
Connexité dans les graphes non-orientés. Recherche d'une plus court chemin dans un graphe pondéré (algorithme de Dijkstra).	<b>35</b>
Calcul des valeurs approchées d'une intégrale par la méthode des rectangles.	<b>31</b>
Simulation d'expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.	<b>34</b>

# DEVOIRS







## Étude d'un polynôme de degré quelconque

**Thèmes abordés :** Étude d'une fonction polynomiale. Racine des polynômes. Factorisation d'une expression polynomiale.

**Difficulté :** ★

### Énoncé du problème :

Pour tout entier  $n$ , on pose  $P_n(x) = 2x^{n+2} - (n+2)x^2 + n$ .

1. Calculer  $P'_n(x)$  et étudier son signe sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n > 0$ . On pourra distinguer les cas selon que  $n$  est pair ou impair.
2. En déduire les variations de  $P_n$  selon  $n$ .
3. Combien le polynôme  $P_n$  possède-t-il de racines dans  $\mathbb{R}$ ? Si possible, identifier ces racines.
4. Justifier que lorsque  $n$  est pair,  $P_n(x)$  est factorisable par  $x^2 - 1$ .

On étudie désormais la factorisation de  $P_n(x)$  par  $(x-1)^2$  pour tout entier  $n$ .

5. Factoriser  $P_1$  par  $(x-1)^2$ .
6. Montrer que pour tout entier  $n$  le polynôme  $P_n(x)$  est factorisable par  $x-1$ .  
Pour toute la suite, on admet que  $P_n(x)$  est factorisable par  $(x-1)^2$  pour tout entier  $n$ .
7. Exprimer  $P_{n+1}(x) - P_n(x)$  et factoriser cette expression par  $x-1$ .

8. Montrer que pour tout entier  $n$ , on a

$$2x^{n+2} - x - 1 = (x - 1)(2x^{n+1} + 2x^n + \cdots + 2x + 1).$$

9. En déduire que si  $Q_n(x)$  est le polynôme tel que

$$P_n(x) = (x - 1)^2 Q_n(x), \text{ on a pour tout entier } n$$

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x) + 2x^{n+1} + 2x^n + \cdots + 2x + 1.$$

10. Calculer une factorisation de  $P_6(x)$  par  $(x - 1)^2$ .

11. Factoriser, pour tout entier  $n$ , l'expression  $P_{n+2}(x) - P_n(x)$  par  $x^2 - 1$ .

12. En déduire la factorisation de  $P_n(x)$  par  $x^2 - 1$  lorsque  $n$  est pair.

### Mots clés

Degré des polynômes. Ensemble  $\mathbb{R}_n[x]$ . Racine  $a$  d'un polynôme et factorisation par  $(x - a)$ . Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection.



## Fonctions trinôme et composées d'un trinôme

**Thèmes abordés :** Etude d'une fonction : définition, variations, limites, notion d'asymptote.

### Énoncé du problème :

Pour tout réel  $x$ , on pose  $p(x) = x^2 - 8x + 15$ .

1. Déterminer le signe et les variations de  $p$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. On pose lorsque cela est défini  $f_1(x) = |p(x)|$ .
  - (a) Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_1$  de  $f_1$  et exprimer  $f_1(x)$ , selon les valeurs de  $x$ , sans valeur absolue.
  - (b) En déduire les variations de  $f_1$  sur  $\mathcal{D}_1$ .
  - (c) Tracer la courbe représentative de  $f_1$ .
  - (d) Pour tout réel positif, résoudre l'équation  $f_1(x) = a$ .
3. On pose lorsque cela est défini  $f_2(x) = \frac{1}{p(x)}$ .
  - (a) Déterminer  $\mathcal{D}_2$  l'ensemble de définition de  $f_2$  puis ses variations sur cet ensemble.
  - (b) Montrer qu'il existe des réels  $a$  et  $b$  (que l'on déterminera) tels que pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}_2$  on a  $f_2(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-5}$ .
  - (c) Déterminer les limites de  $f_2$  en toutes les bornes de  $\mathcal{D}_2$ .
  - (d) Tracer la courbe représentative de  $f_2$  en plaçant les asymptotes verticales et horizontales.

4. On pose lorsque cela est défini  $f_3(x) = \sqrt{p(x)}$ .
- (a) Déterminer  $\mathcal{D}_3$  l'ensemble de définition de  $f_3$  puis ses variations sur ce domaine.
  - (b) Etudier la limite de  $f_3(x) - (x - 4)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  puis  $f_3(x) - (-x + 4)$  en  $-\infty$ . Quel en est la conséquence graphique ?
  - (c) Tracer la courbe représentative de  $f_3$  ainsi que les droites d'équations  $y = x - 4$  et  $y = -x + 4$  sur le même graphique.
5. On pose lorsque cela est défini  $f_4(x) = \sqrt[3]{p(x)}$ . Déterminer  $\mathcal{D}_4$  l'ensemble de définition de  $f_4$  et ses variations sur cet ensemble.
6. On pose lorsque cela est défini  $f_5(x) = \lfloor p(x) \rfloor$ .
- (a) Déterminer le minimum de  $f_5$  et pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  il est atteint.
  - (b) Résoudre pour tout entier relatif  $n$  les inéquations  $p(x) < n$  et  $p(x) \geq n$ .
  - (c) En déduire sur quel(s) intervalle(s) on a  $f_5(x) = n$  si  $n$  est un entier relatif fixé.

### Mots clés

Racines d'un trinôme. Signe et variation d'un trinôme. Fonction racine  $n$ -ième et fonctions puissances. Fonction inverse. Fonction valeur absolue. Fonction partie entière et sa représentation graphique.



## Fonctions puissances quelconques à paramètre

**Thèmes abordés :** Étude d'une famille de fonctions à paramètres. Ensemble de définition, variations, limites.

**Difficulté :** ★

**Énoncé du problème :**

Pour tout réel  $t$  on note (lorsque cela est défini)  $f_t(x) = (x - t)^x$ .

1. Préciser le domaine de définition  $\mathcal{D}_t$  de  $f_t$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_t(x)$ .
2. Calculer  $\ell(t) = \lim_{x \rightarrow t^+} f_t(x)$  et préciser les valeurs de  $t$  pour lesquelles cette limite est finie.
3. Lorsque  $\ell(t)$  est finie, étudier la dérivabilité de  $f_t$  en  $t^+$  (en ayant posé  $f(t) = \ell(t)$ ) et calculer cette limite. En déduire la position de l'éventuelle tangente en  $t^+$ .
4. Déterminer la fonction  $u_t$  telle que pour tout  $x \in \mathcal{D}_t$  on ait  $(f_t)'(x) = u_t(x)f_t(x)$ .
5. Étudier les variations de  $f_0$ .
6. Montrer que  $u_t$  ne s'annule qu'une seule fois pour  $t < 0$  et étudier les variations de  $f_t$  dans ce cas.
7. On suppose dans cette question que  $t > 0$ . Dans tous les cas, donner les variations de  $f_t$ .
  - (a) Si  $t > e^{-2}$ , montrer que  $u_t$  est strictement positive.

- (b) Si  $t = e^{-2}$ , montrer que  $u_t$  est positive et s'annule en un point.
- (c) Si  $t < e^{-2}$ , montrer que  $u_t$  s'annule en  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que  $t < \alpha_1 < 2t < \alpha_2$ .
8. Tracer des courbes représentatives de  $f_t$  pour chaque cas de  $t$  traité dans ce problème.

### Mots clés

Fonctions puissances de type  $u(x)^{v(x)}$ . Croissances comparées. Taux d'accroissement.



## Étude d'une récurrence linéaire d'ordre 3 avec second membre

**Thèmes abordés :** Expression explicite de suites données par récurrence. Suites aux récurrences usuelles résolues dans le cours. Principe de linéarité d'une relation (solution homogène et solution particulière).

### Énoncé du problème :

On souhaite déterminer dans ce problème la suite  $(u_n)$  vérifiant  $u_0 = -1$ ,  $u_1 = -9$ ,  $u_2 = -3$  et la relation de récurrence

$$(R) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - u_{n+2} - 14u_{n+1} + 24u_n = 10n^2 - 16n - 32.$$

1. Déterminer une suite trinomiale  $v_n = an^2 + bn + c$  vérifiant  $(R)$ .
2. Si  $v_n$  est la suite de la question précédente, montrer que  $(w_n) = (u_n - v_n)$  vérifie la relation de récurrence

$$(R') : \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+3} - w_{n+2} - 14w_{n+1} + 24w_n = 0.$$

3. On pose alors  $z_n = w_{n+1} + 4w_n$  pour tout entier  $n$ .
  - (a) Montrer que  $(z_n)$  vérifie la relation de récurrence

$$(R'') : \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+2} - 5z_{n+1} + 6z_n = 0.$$

- (b) Déterminer l'expression générale de  $(z_n)$ .
4. On détermine dans cette question l'expression générale de  $(w_n)$ .

(a) Justifier qu'il existe des réels  $\alpha, \beta$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = -4w_n + \alpha \times 2^n + \beta \times 3^n.$$

(b) Déterminer une suite  $(y_n)$  sous la forme  $(\alpha_1 \times 2^n + \beta_n \times 3^n)$  vérifiant la relation précédente.

(c) Montrer que  $(w_n - y_n)$  est géométrique et en déduire l'expression de  $w_n$ .

5. On revient à l'expression de  $(u_n)$ .

(a) Montrer qu'il existe des réels  $\gamma, \delta, \omega$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \gamma \times 2^n + \delta \times 3^n + \omega \times (-4)^n + n^2 + n - 1.$$

(b) Avec  $u_0, u_1$  et  $u_2$ , déterminer  $\gamma, \delta$  et  $\omega$  et conclure sur l'expression de  $u_n$ .

6. Retrouver l'expression de  $u_n$  à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

7. La suite  $(u_n)$  possède-t-elle une limite pour  $n \rightarrow +\infty$  ?

8. Calculer pour tout entier  $n$  la somme  $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n$ .

### Mots clés

Récurrances linéaires. Récurrence d'ordre 2. Suites géométriques. Somme géométrique, somme des entiers, somme des carrés.



## Propriétés de la somme harmonique

**Thèmes abordés :** Raisonnement par récurrence. Somme de termes. Programmation Python.

**Difficulté :** ★

### Énoncé du problème :

Pour tout entier  $n \geq 1$  on pose

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On se propose de montrer que  $H_n$  peut se mettre sous la forme d'une fraction irréductible, au numérateur impair et au dénominateur pair pour  $n \geq 2$ .

1. Vérifier la propriété pour  $H_2, H_3, H_4$  et  $H_5$ .
2. Ecrire une fonction Python nommée  $H(n)$  qui calcule le terme  $H_n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .
3. Quelle est la forme générale d'un entier pair ? D'un entier impair ?
4. Déterminer, selon la parité de  $x$  et  $y$ , la parité de la somme  $x + y$  et du produit  $xy$ .

On démontre la propriété par récurrence forte sur  $n$ . On se donne un entier  $n > 2$  pour lequel on suppose que  $H_2, \dots, H_{n-1}$  sont tous des fractions irréductibles au numérateur impair et au dénominateur impair. On montre qu'il en est de même pour  $H_n$ .

5. On suppose que  $n = 2m + 1$  est impair. En écrivant  $H_{n-1} = \frac{2a+1}{2b}$ , montrer que  $H_n$  est bien de la forme voulue.
6. On suppose que  $n = 2m$  est pair.
- Justifier que  $H_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \frac{H_m}{2}$ .
  - Montrer que  $1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{p}{2q+1}$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers.
  - En utilisant alors la propriété de  $H_m$  ( $m \leq n - 1$ ), conclure sur la forme de  $H_n$ .
7. Est-il possible que  $H_n$  soit un entier pour  $n \geq 2$ ?
8. On se propose dans cette question de vérifier sur les premières valeurs de  $n$  la propriété démontrée, c'est-à-dire de programmer en Python le calcul de  $H_n$  sous forme irréductible.
- Toutes les fractions  $\frac{a}{b}$  seront représentées par une liste `[a,b]`. On admet le fait suivant : en effectuant l'importation de la fonction `gcd` par `from math import gcd`, pour toute fraction représentée par `[a,b]`, la fraction `[a//gcd(a,b),b//gcd(a,b)]` est la représentation irréductible de `[a,b]`.
- Si on note  $H_{n-1} = \frac{p_n}{q_n}$ , déterminer une écriture fractionnaire de  $H_n$  en fonction de  $n, p_n$  et  $q_n$ .
  - Écrire une fonction `Frac_Hn(n)` qui donne une écriture fractionnaire de  $H_n$  pour un entier  $n$  donné.
  - En déduire une fonction `Irred_frac_Hn(n)` qui donne une écriture irréductible de la fraction  $H_n$  pour un entier  $n$  donné.
  - Écrire un bloc d'instruction Python qui permet de vérifier la propriété démontrée dans ce problème pour tout entier  $n$  de `[[2; 1000]]`.

### Mots clés

Pratique du raisonnement par récurrence forte. Manipulation des entiers pairs et impairs. Structures générales de programmation `if` et `for` (boucle).