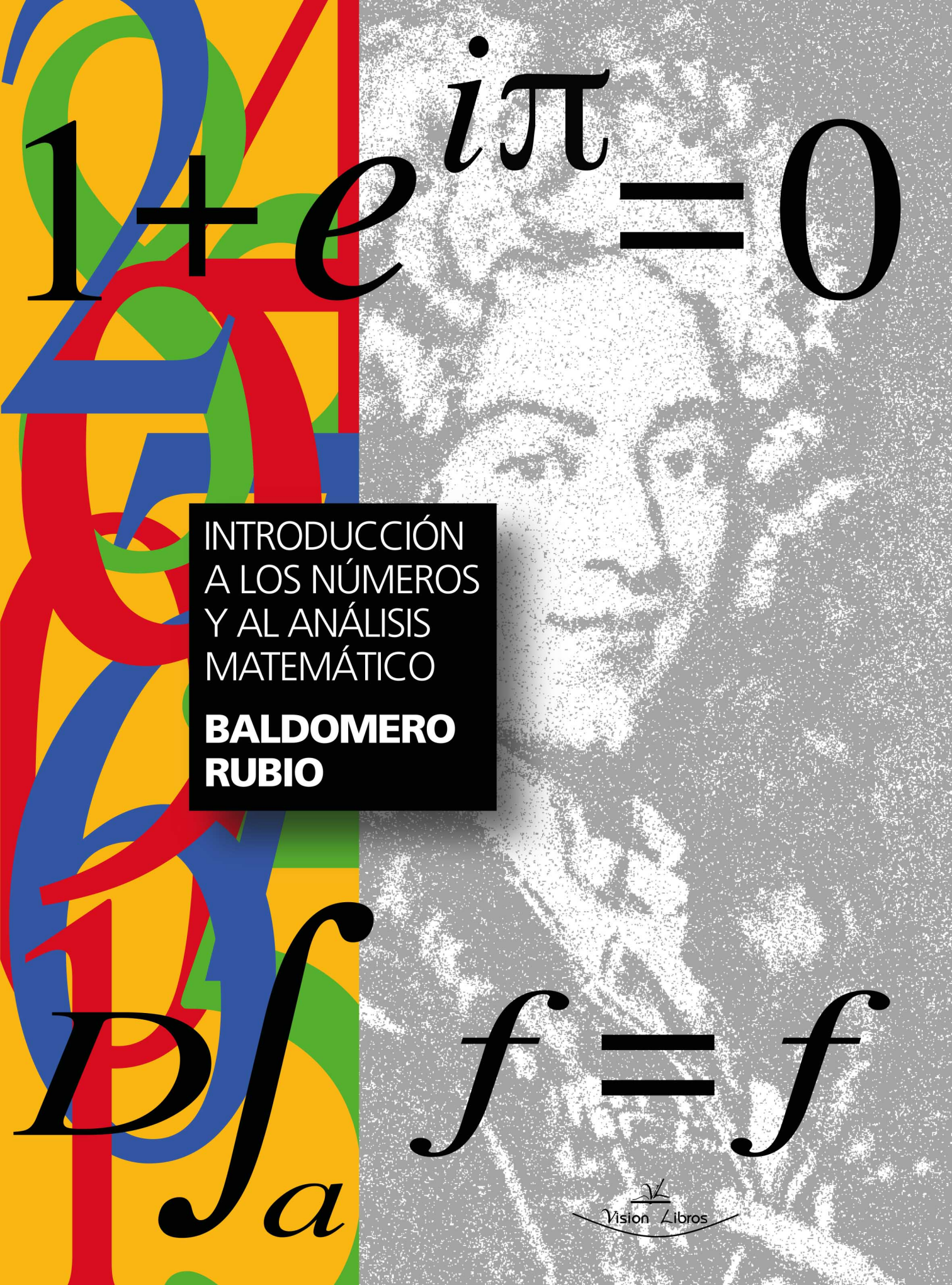


INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

BALDOMERO RUBIO

Vision Libros

Introducción a los Números y al Análisis Matemático

Baldomero Rubio

Vision Libros

© Obra: INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Primera edición: Marzo, 2024

© Autor: Baldomero Rubio

Diseño de cubierta: La Fábrica de diseño

ISBN: 978-84-10039-53-7

© Editado por VISION LIBROS www.visionlibros.com

Gestión, promoción y distribución: Grupo Editor Vision Net S.L.
C./ San Ildefonso 17, local, 28012 Madrid. España.
Tlf: 0034 91 3117696 // Email: pedidos@visionnet.es
www.visionnet-libros.com

Disponible en librerías físicas y online.

Las opiniones expresadas en este trabajo son exclusivas del autor. No reflejan necesariamente las opiniones del editor, que queda eximido de cualquier responsabilidad derivada de las mismas.

Queda prohibida, salvo excepción prevista por la ley cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de la propiedad intelectual. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.es o por teléfono 917021970) si necesita fotocopiar, escanear o utilizar algún fragmento de esta obra. Gracias por comprar una edición autorizada de esta obra y por respetar las leyes del copyright.

Índice general

Prólogo vii

1. Conceptos básicos del Análisis **1**
1.1. Números naturales 1
1.2. Expresión del razonamiento matemático 5
1.3. La inducción matemática 12
1.4. Sucesiones y series 15
1.5. Números racionales 21
1.6. El cardinal de $\mathbb{Q}$ 30
1.7. Sucesiones de números racionales 31
1.8. Representación de los números racionales 39
1.9. Ínfimo y supremo 43
1.10. Problemas 45

2. Números reales **53**
2.1. El intervalo real $[0, 1)$ 53
2.2. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales 56
2.3. Potencias y logaritmos de números positivos 67
2.4. Teorema de Bolzano-Weierstrass 78
2.5. Límites inferior y superior 80
2.6. La propiedad de Cauchy 87
2.7. Topología en $\mathbb{R}$. Teorema de Borel 90
2.8. Series de números reales 95
2.9. Productos infinitos 110
2.10. Problemas 115

3. Números complejos **129**
3.1. Construcción de los complejos 129
3.2. Las funciones trigonométricas y π 134
3.3. Potencias, polinomios y logaritmos 138
3.4. Conjuntos de números complejos 142
3.5. Sucesiones y series 144
3.6. Coordenadas polares 150
3.7. Funciones racionales 151
3.8. Problemas 160

4. Límites. Funciones continuas **163**
4.1. Límites de una función . . . 163
4.2. Caracterización $\varepsilon \to \delta$ del límite . . . 173
4.3. Comparación local de funciones . . . 176
4.4. Técnicas para el cálculo de límites . . . 178
4.5. Funciones continuas. Continuidad uniforme . . . 184
4.6. Continuidad y conjuntos abiertos . . . 200
4.7. Problemas . . . 201

5. Integrales y Derivadas **205**
5.1. Integral de una función continua . . . 206
5.2. Derivadas . . . 215
5.3. Cálculo de Primitivas . . . 245
5.4. Los operadores Derivada y Diferencial . . . 252
5.5. Teorema fundamental del Cálculo. Aplicaciones . . . 254
5.6. Teoremas de Wallis y de Stirling . . . 269
5.7. Estudio de sucesiones mediante una función . . . 273
5.8. La teoría de Lebesgue . . . 277
5.9. Integral de Riemann . . . 282
5.10. Problemas . . . 290

6. Sucesiones de funciones reales **299**
6.1. Definiciones y ejemplos . . . 299
6.2. Convergencia uniforme . . . 301
6.3. Series de potencias . . . 316
6.4. Aplicaciones . . . 326
6.5. Problemas . . . 332

7. Funciones con números complejos **337**
7.1. Funciones complejas de variable real . . . 337
7.2. Curvas planas . . . 344
7.3. Funciones de variable compleja . . . 351
7.4. Funciones exponencial y logaritmo neperiano . . . 355
7.5. Series de Fourier . . . 361
7.6. Problemas . . . 374

En recuerdo de Miguel de Guzmán

A mis estudiantes de todos los tiempos

Prólogo

Ejemplo 1

A y B son dos puntos corredores que van a realizar una carrera sobre una pista rectilínea que está numerada desde el $Km.0$ (punto de salida) hasta el $Km.1$. La competición se va a disputar mediante sucesivos desplazamientos desde 0 hacia 1 siguiendo estas normas: a) es una carrera por etapas numeradas $1, 2, 3, ...$ y cada una debe realizarse en el tiempo de una hora; b) a cada etapa se asigna un determinado avance, que es medio $Km.$ para la etapa 1 desde el punto de salida; para la etapa $r \geq 2$ es la mitad del avance asignado a la etapa $r-1$ y se produce desde las posiciones alcanzadas por A y por B al final de esta; c) A y B tienen libertad para hacer descanso en cualquier etapa e incluso en etapas sucesivas, sin que ello suponga avance desde la posición alcanzada en la etapa inmediatamente anterior en la que sí participaron; d) los corredores pueden hacer sin descanso intermedio todas las etapas consecutivas que deseen, pero tras cada etapa es necesario que lo hagan en alguna etapa posterior. La meta está situada en el $Km.1$. El triunfador es el corredor que alcance la posición más próxima a la meta al final de la carrera. Hay que advertir que se trata de una carrera de infinitas etapas.

Al comenzar la competición A y B se observaron mutuamente y cada uno optó por no hacer descanso si el compañero no lo hacía. Así trascurrieron unas horas de ir al mismo ritmo de avance. Pero justamente en la etapa r hizo B un descanso y A no. Entonces A se declaró a sí mismo vencedor y comenzó a darse jornadas de descanso. Observó (había estudiado matemáticas) que B ya no le podía adelantar en el futuro y además hizo una etapa posterior s que le aseguraba un sensible margen de ventaja. (Problema **3** de **2.10**).

Ejemplo 2

Ahora A y B son dos puntos saltadores situados de inicio en el $Km.0$ y se van a producir saltos mediante salidas y llegadas en unos puntos pintados de azul situados desde el $Km.0$ al $Km.1$. Son muchos puntos azules distribuidos de forma homogénea a lo largo de todo el trayecto, y los hay muy próximos unos a otros en cada tramo. Mezclados con los azules hay también otros puntos pintados de rojo. A vista de pájaro predomina el rojo sobre el azul. Los saltos se producen mediante avances (de 0 hacia 1) o retrocesos en el sentido inverso.

La competición tiene unas normas más complejas que las del ejemplo anterior. Se desarrolla también en etapas $1, 2, 3, ...$ de un minuto. En la etapa 1 saltan A y B desde 0 hasta posiciones azules a_1 y b_1 que pueden elegir libremente. En cada etapa r posterior A puede saltar desde la posición a_{r-1} en la que terminó la etapa $r-1$ a la nueva posición a_r; también puede optar por no saltar, en cuyo caso es $a_{r-1} = a_r$. Naturalmente, B tiene las mismas opciones con posiciones b_{r-1} y b_r.

Hay unas normas que cumplir: a) al ir avanzando las etapas la amplitud de los saltos debe disminuir muy drásticamente porque, fijado cualquier número positivo ε, que puede elegirse

muy pequeño, debe haber alguna etapa, r_1 para A y r_2 para B, tal que todos los saltos de etapas posteriores a r_1 que realice A deben producirse dentro de un tramo de longitud ε, y análogamente para B a partir de r_2; *b*) A y B pueden tener posiciones muy próximas o incluso iguales en el transcurso del tiempo, pero se ha fijado un número positivo δ que pone barreras a esta aproximación en el siguiente sentido: para cada etapa r debe existir una posterior s en la que las posiciones a_s y b_s deben tener una separación no inferior a δ.

La situación que se describe debe interpretarse, más que como una competición, como un juego en el que A y B dan saltos en cualquier sentido sin otra limitación que las reglas impuestas.

Algunas preguntas: ¿se puede asegurar que después de alguna etapa r las posiciones de A están sensiblemente separadas de las posiciones de B por existir algún $\lambda > 0$ que verifica $a_n - b_n \geq \lambda$, (o bien $b_n - a_n \geq \lambda$), para cada $n \geq r$? Y en la hipótesis de poder contestar afirmativamente a la pregunta anterior, ¿se puede determinar alguna etapa a partir de la cual ya está consolidada la situación final? (Problema **15** de **2.10**).

Ejemplo 3. La isla estrecha

En un lejano mar hubo una vez una isla tan estrecha que era conocida como la isla recta. Solamente sus dos extremos tocaban al mar y allí se habían instalado para siempre dos importantes personajes: Cero y Uno. Los demás no podían disfrutar de tal situación, pero se resignaban a su suerte y permanecían unos junto a otros en buena armonía sin moverse. Eran tantos que, aunque todos pensaban que debería haber alguien situado a su lado, sin embargo no sabían a ciencia cierta quién era, de tantos como había muy próximos. No se podía decir que tuvieran un régimen democrático, porque el señor Can dirigía sus vidas de forma permanente. Can era un personaje de prestigio por su gran habilidad para manejar colecciones enormes de cosas y saber distinguir muy bien unas de otras. Al parecer, no vivía en la isla. Tenía un padrón de todos los habitantes que asignaba nombre a cada uno sin que hubiera peligro de confusiones. Se trataba de un sistema muy ingenioso inventado por él que requería solamente tres signos que podían repetirse a conveniencia en cada nombre. Los nombres no eran otra cosa que listas más o menos largas confeccionadas con los tres signos, sin que fuera necesario utilizar los tres en todas ellas. Para la mayoría de los isleños su nombre era interminable.

Merece la pena citar los tres signos: uno era incoloro y redondo, otro era azul y el tercero era rojo. En principio esto no tenía connotaciones políticas, pero los acontecimientos que vinieron después pusieron de manifiesto que no era indiferente que en un nombre predominara el rojo o el azul, sobre todo en el caso de ser interminable y carecer de signo azul. Además, estaba prohibido que un nombre interminable tuviera una parte final completamente roja.

Unos habitantes de la isla eran nobles, otros no. Era característico de la nobleza tener nombres no interminables, y daba igual que prevaleciera el rojo o el azul. El más noble tenía nombre más corto. Quizás por esta razón Cero y Uno se habían instalado de inicio en su posición de privilegio. Por cierto, habíamos olvidado decir el nombre de Cero y el de Uno. Son dos nombres con un único signo, sin repetirse. El signo rojo simple estaba suprimido por razones técnicas: quizás porque Can lo reservaba para sí. El nombre de Uno era un único signo azul y el de Cero no tenía más remedio que ser el signo incoloro y redondo, por cuya razón pasó a denominarse como el noble que lo encarnaba: cero. Salvo el de Uno, todos los nombres comenzaban por cero.

Una vez llegó una gran tormenta que inundó la parte central de la isla y esta quedó partida en dos. Se produjo un gran desasosiego, pero algunos pensaron en positivo: al menos había dos habitantes más para poder instalarse en alguna de las dos nuevas posiciones junto al lago central. Allí se colocaron los dos más nobles que seguían a Cero y a Uno.

Lo curioso es que el fenómeno de la inundación se repitió al mismo tiempo en las dos islas, tras lo cual había ya cuatro y dos nuevos lagos con los consiguientes cuatro nuevos puestos junto a ellos, donde se colocaron enseguida los nobles siguientes en nobleza a los ya instalados.

En sucesivas etapas las islas que iban surgiendo sufrían el mismo tipo de inundación. Cada etapa significaba duplicar el número de islas y de lagos, así como el de nuevos puestos de privilegio reservados a los nobles. Los que ya estaban instalados observaron que las futuras inundaciones no les iban a afectar. No parecía que el azul o el rojo del nombre fuera relevante para tener más o menos opciones de alcanzar un sitio sin riesgos de inundación futuros, pero sí se constató que los nombres de los habitantes de las zonas que ya estaban inundadas tenían algún signo azul. Lo cual daba cierta tranquilidad a quienes solo tenían color rojo.

Así sucedió hasta el final de los tiempos; solo entonces los nobles que se habían salvado por lograr una posición junto a un lago comenzaron a pensar cuál habría sido el destino de otros nobles y el de quienes no lo eran. Al parecer no habían sido afectados por las inundaciones aquellos, nobles o no, cuyo nombre carecía de signo azul, aunque la mayor parte de ellos no había logrado abrigo junto a un lago.

El señor Can acudió a estudiar la situación. Como tenía el padrón de todos los habitantes de la primitiva isla y además había hecho un duplicado del mismo sin utilizar el signo rojo, pudo comprobar efectivamente que los que carecían de signo azul en sus nombres eran tantos como los que figuraban en el primitivo padrón.

¡Inexplicable!, clamaron al unísono los nobles que ocupaban situaciones junto a un lago, muchos de los cuales tenían nombre con algún signo azul.

¡Parecía que no hubo perjudicados por las inundaciones, e incluso había aumentado la población!

Solamente el señor Can pudo saber exactamente lo que había pasado, pero nadie más llegó a entenderlo. ¿Habían encontrado protección todos los nobles junto a un lago? ¿Quiénes y cuántos fueron realmente los afectados por las inundaciones? El señor Can hizo oídos sordos a estas preguntas y se limitó a recomendarles que estudiaran matemáticas.

Ofrezco los ejemplos anteriores como imágenes, pienso que lúdicas y sugerentes, sobre temas a los que se refiere este libro. El tercer ejemplo es un cuento que escribí con motivo de mi jubilación en 2008. Está relacionado con el conjunto ternario de Cantor (problema 2 del capítulo 2), y para más detalles se puede consultar el artículo de B. Rubio *Inundaciones en la isla estrecha: una imagen del conjunto de Cantor.* Boletín n^o 82 (junio de 2009) de la Sociedad "Puig Adam" de profesores de matemáticas.

La materia del curso al que pretende ir destinado este libro se puede interpretar de varias formas. Quizás el aspecto más controvertido se refiere al paso de los racionales a los reales. La posición más simple consiste en evitar ese paso y definir directamente los números reales mediante sus axiomas. Eso nunca me ha parecido aceptable por lo que tiene de hurtar un aspecto fundamental del pensamiento matemático a quienes están aprendiendo.

A partir de los números racionales se pueden introducir los reales mediante las cortaduras de Dedekind. En el problema 1 del capítulo 2 se dan las indicaciones oportunas acerca de cómo hacerlo. El método de las sucesiones de números racionales con la propiedad de Cauchy lo he utilizado en mis clases en numerosas ocasiones. Pero desde hace ya mucho tiempo la construcción de los reales la hago a partir de las representaciones, decimales o binarias, de los racionales. Trataré de dar algunos argumentos para justificar este procedimiento.

Las fracciones definen a los números racionales y el cálculo elemental con ellas es muy confortable. Sin embargo, su expresión mediante series de potencias de 10 con coeficientes del 0 al 9 es requerida para muchos propósitos. De forma análoga es admisible la representación binaria mediante series de potencias de 2 con coeficientes 0 o 1. El carácter periódico de tales representaciones hace que estas series sean casi como series geométricas. En mi opinión, estos son hechos que deben ser bien conocidos y justificados por estudiantes universitarios de matemáticas. En el ámbito de los números racionales hay algunas circunstancias para sugerir que no es el modelo adecuado que describa lo que se entiende como la recta real. Esta es la motivación para buscar los irracionales que, de forma sorprendente, son las mismas cosas que los racionales pero desprovistas de la periodicidad. Esto significa ir a los orígenes, mejor en mi opinión, en cuanto a lo que nos ocupa, que las elaboraciones posteriores.

Interpreto los racionales como un esqueleto, y los irracionales se unen a él para rellenarlo, tapar huecos y quitar deficiencias. Pero los racionales nunca deben perder su identidad de origen. Más al contrario: deben motivar y dirigir las construcciones que se realicen en el nuevo objeto conjunto, las cuales tienen que respetar la estructura del esqueleto. No es necesario que los racionales tengan que ser reinterpretados como objetos de otra naturaleza dentro del cuerpo común. Son los irracionales los que deben estar condicionados a los racionales.

El lector habrá observado, y en otro caso lo entenderá bien al comenzar a estudiar este libro, que los ejemplos 1 y 2 del principio se refieren respectivamente a representaciones binarias y a sucesiones con la propiedad de Cauchy.

Es bueno de las sucesiones de Cauchy que suma y producto conservan la propiedad, lo cual lleva de forma directa a suma y producto de dos números reales. Sin embargo, la ordenación no es inmediata: requiere la aritmética y la noción de sucesión *positiva.* Lo que sugiere la convergencia es un proceso dinámico en el que un punto se mueve sobre los términos de una sucesión aproximándose al número que es el límite de esta. Tal interpretación intuitiva no se aprecia bien a la vista de una sucesión de Cauchy de números racionales sin límite racional: que su límite sea esencialmente ella misma parece invitar poco a una interpretación dinámica de la convergencia. Las sucesiones de Cauchy no sugieren la idea de "puntos" de una recta al no estar ordenadas de inicio. El ejemplo 2 trata de ser una imagen a este respecto.

Representaciones decimal o binaria de un número racional x son sucesiones crecientes que tienen límite x. Aquí la interpretación dinámica de la convergencia y la idea de números como "puntos" es bien patente. Antes de entrar en la aritmética se obtiene la ordenación, lo cual permite no perder el aspecto geométrico de los números como puntos de la recta. Al definir la convergencia es la monotonía la situación más confortable. En realidad, desde una sucesión arbitraria se llega a sus límites inferior y superior, así como al posible límite, a través de sucesiones monótonas. Los grandes modelos de convergencia son los que se refieren a sucesiones monótonas o, como en el caso de las series alternadas de Leibniz, las que se desdoblan en dos; una creciente y otra decreciente.

También debe decirse que estas representaciones de los números ofrecen algunas dificultades, pero son mínimas. Al sumar o multiplicar sucesiones monótonas pueden obtenerse sucesiones que no lo son, lo cual da algún pequeño problema técnico. Pero para llegar a sumas y productos de números reales no es necesario obtener sus representaciones estrictas y, en cualquier caso, al hacerlo no se pierden las referencias adecuadas.

Mi experiencia de muchos años con los dos métodos puestos en confrontación ha hecho que me incline por desestimar las sucesiones de Cauchy como punto de partida para construir los

números reales. En 2.6 describo en grandes líneas cómo se realiza tal construcción, la cual, por otra parte, constituye un procedimiento muy interesante en otros contextos de la matemática.

En el capítulo 1 se ofrecen los conceptos básicos del Análisis. El comienzo no puede ser otro que una descripción intuitiva de la sucesión de los números naturales. Los axiomas de Peano dan enseguida entidad matemática a sumas y productos con sus propiedades. Sigue una descripción breve de los más importantes conceptos y formas de expresión del razonamiento matemático: axiomas, definiciones, teoremas, implicación, reducción al absurdo, cuantificadores, etc. Tras un análisis detallado de la inducción, se introducen las sucesiones y series para describir después de forma muy concisa las ideas esenciales que conducen a obtener los números enteros y los racionales. Sobre la marcha se va describiendo la fórmula de Newton y sus aplicaciones, la numerabilidad de los racionales y el método diagonal de Cantor. La representación decimal de los racionales se describe con todos sus detalles. Se introducen las nociones de límite para sucesiones de números racionales y las nociones de ínfimo y supremo, para llegar a las deficiencias que en este aspecto tienen los racionales.

El capítulo 2 comienza con la descripción del intervalo real $[0,1)$ obtenido al añadir al conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$ los números irracionales de la forma $0, a_1 a_2 ...$ Aparecen enseguida la ordenación en $[0,1)$ y las relaciones entre racionales e irracionales de este intervalo. Después viene la descripción del conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales y la ordenación de sus elementos, compatible con la previamente establecida en $\mathbb{Q}$. El teorema del supremo se demuestra mediante las representaciones binarias; a partir de él se define en primer lugar la suma de números reales y se obtienen sus propiedades, necesaria alguna de ellas para obtener después el producto. Se llega también a resultados relativos a potencias y logaritmos que permiten definir funciones básicas del Análisis.

El contenido descrito en los párrafos anteriores constituye lo que puede ser una diferencia importante con otros textos de similar naturaleza. No voy a hacer descripción pormenorizada del resto del contenido. Pero me parece conveniente añadir indicaciones sobre algún tema.

En 3.7 se incluye el teorema de descomposición de las funciones racionales reales como suma de un polinomio y funciones racionales simples. La demostración es constructiva y ofrece el procedimiento para obtener los coeficientes de la descomposición.

En el capítulo 5 se desarrolla lo fundamental del Cálculo infinitesimal. Se comienza con la integración en el ámbito de las funciones continuas y se muestran muchos ejemplos. Al poner la integral delante de la derivada he pretendido destacar la naturaleza estricta de este concepto separándolo inicialmente de considerar que el cálculo diferencial y las primitivas se utilizan para obtener integrales. Comenzar la teoría de la integración en el ámbito exclusivo de las funciones continuas lo justifico por creer que al principio se debe elegir el marco más sencillo y que menos complejidades técnicas tenga.

Tras esta primera incursión en la integral continúa el capítulo 5 con las derivadas. En la sección 5.5 se conectan integración y derivación mediante el teorema fundamental del Cálculo. A partir de él se amplían notablemente los resultados obtenidos antes en ambos campos, especialmente por lo que respecta a la integral. En la sección 5.8 se hace una breve introducción de la teoría de Lebesgue sobre integración, lo cual permite tratar en 5.9 con mejores herramientas la teoría de Riemann.

En cada capítulo se ofrecen muchos ejemplos, ejercicios resueltos y una colección amplia de problemas con los que se añaden algunos aspectos complementarios.

El libro contiene todo lo que puede considerarse necesario para un primer curso universitario

de Análisis matemático. Pero en muchos aspectos incluye prolongaciones que pueden hacerlo útil también en estudios más avanzados. Es suficiente leer el índice general para percatarse de ello.

Considero oportuno dar algunas indicaciones acerca del uso de este libro para las personas que inician el estudio de estas materias. La lectura de los capítulos debe hacerse en el orden natural. No es necesario en una primera lectura aprender todo el contenido. En el texto están las definiciones, que suelen ir precedidas de algunos comentarios acerca del concepto que se introduce, y los teoremas. Se intercalan ejemplos, ejercicios resueltos y consideraciones para armonizar el desarrollo de la teoría. Es a las definiciones a lo que hay que prestar en principio la mayor atención, pues cada una describe la naturaleza de un objeto y sin conocerlo con exactitud no se puede empezar a trabajar con él. Los ejemplos y ejercicios alrededor de una definición sirven para entenderla mejor y nunca se debe prescindir de ellos. Una buena parte de los ejemplos son situaciones concretas que hay que conocer bien, porque se trata de recursos que se utilizan con frecuencia como son las sucesiones y series más importantes y métodos usuales de razonamiento. De los teoremas hay que poner el énfasis en conocer lo que afirman y no conviene pasar de inmediato a su demostración. Es mejor en lo posible utilizarlos en alguna situación concreta. A veces, el ejercicio de la demostración supone un esfuerzo que dificulta la visión global del tema que se está tratando. Pero conforme se va avanzando en el estudio hay que sentir el gusto por entender las demostraciones. Debe tenerse en cuenta que hacer una demostración pone en contacto con las herramientas y métodos del razonamiento matemático, muy necesarios para hacer problemas. En la medida en que se sea capaz de resolver problemas de cierta entidad radica la eficacia del estudio realizado.

Quiero expresar mi agradecimiento a muchos compañeros del Departamento de Análisis Matemático, en especial a Carlos Fernández Pérez, Javier Gómez Gil, José Luis González Llavona y José María Martínez Ansemil por el estímulo y ayuda que he recibido de ellos. También a Miguel de Benito, que desde que fue mi estudiante hace varios años hemos tenido muy buena relación, él ha seguido con gran interés el proceso de elaboración de este libro y me ha hecho muy valiosas observaciones y sugerencias.

El libro lo dedico en el recuerdo de Miguel de Guzmán a mis estudiantes de todos los tiempos.

Madrid, primavera de 2011

Capítulo 1

Conceptos básicos del Análisis

1.1. Números naturales

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4} \quad \ldots$$

Aquí están los cuatro primeros términos de la sucesión de los números naturales. Los puntos suspensivos finales sirven para expresar que la línea se puede prolongar hacia la derecha sin interrupción.

La desigualdad *a es mayor que b*, $(a > b)$, significa que a está en la línea a la derecha de b. La desigualdad *a es menor que b*, $a < b$, significa lo mismo que $b > a$.

$$\mathbf{1} < \mathbf{2} < \mathbf{3} < \mathbf{4} < \cdots$$

Las desigualdades tienen las propiedades siguientes:

1) *Tricotomía: para cualesquiera números naturales* a y b *se verifica una y solo una de las relaciones* $a > b$, $a = b$, $a < b$.

2) *Transitiva:* $[a > b$ y $b > c]$ *implica* $a > c$.

La no interrupción de este proceso se presenta como oposición a lo que sucede para cualquier conjunto finito no vacío: sus elementos se pueden ir poniendo sucesivamente en una línea y aparecerá uno que es el último. Como oposición a esto, no hay un número natural que sea mayor que los demás; la línea que expresa a todos ellos no se puede leer de derecha a izquierda.

En el proceso indicado cualquier número natural n aparece tras una cadena finita de etapas. Inmediatamente a continuación está el *siguiente* de n, que en principio se va a designar n^+.

Tiene especial relevancia la implicación [$n \in \mathrm{L}$ implica $n^+ \in \mathrm{L}$] referida a un conjunto L de números naturales. Esta implicación es verdadera significa que $n^+ \in \mathrm{L}$ si $n \in \mathrm{L}$ (y no se afirma ni se niega que n^+ pertenezca a L cuando $n \notin \mathrm{L}$). Para el conjunto $\{3, 5, 6, 7\}$ y para el conjunto de los impares esta implicación es falsa. Es verdadera para el conjunto de todos los números mayores que 3.

Los números naturales se asignan a los conjuntos finitos, exceptuando el conjunto vacío. Siendo A uno de ellos, a A se asigna un determinado número natural denominado *cardinal* de A, $(\operatorname{card} A)$, con esta única prescripción: *dos conjuntos finitos tienen el mismo cardinal significa*

que hay alguna aplicación biyectiva de uno al otro. Conjuntos de cardinal 1 son los que tienen un único elemento; tienen cardinal 2 los que tienen solamente dos elementos, etc.

La desigualdad $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ para dos conjuntos finitos A y B se puede caracterizar así: *existen aplicaciones de A a B que son inyectivas y ninguna de ellas es biyectiva.*

Para cualquier conjunto X, finito o no, suelen denominarse subconjuntos *propios* los que son distintos del vacío y de él. El vacío y los conjuntos de cardinal 1 carecen de subconjuntos propios. Los conjuntos finitos A de cardinal mayor que 1 admiten la siguiente caracterización: *los subconjuntos propios de A tienen cardinal menor que* $\operatorname{card} A$. Se puede expresar también de otra manera: *para cada subconjunto propio P de A existen aplicaciones inyectivas de P a A y ninguna de ellas es biyectiva.*

El conjunto de los números naturales

El conjunto de los números naturales se designa $\mathbb{N}$. La primera importante observación sobre él es que no satisface la condición de conjunto finito expresada antes, porque el conjunto $\mathbb{P}$ de los números pares es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ y la aplicación de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{P}$ definida por $\{(n, 2n) : n \in \mathbb{N}\}$, así como su inversa de $\mathbb{P}$ a $\mathbb{N}$, son biyectivas.

Conjuntos infinitos son aquellos que no son finitos. $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

En las matemáticas existen muchos otros conjuntos infinitos. A cada uno de ellos se asigna también un cardinal con la misma única prescripción que la adoptada en el caso finito: *dos conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal significa que existe alguna aplicación biyectiva de uno al otro.*

Se define asimismo, también por analogía con el caso finito, la desigualdad $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$: *existen aplicaciones inyectivas de X a Y pero ninguna de ellas es biyectiva.*

En relación con $\mathbb{N}$ se observa que él y el subconjunto propio $\mathbb{P}$ de los números pares tienen el mismo cardinal.

Los conjuntos que tienen el mismo cardinal que $\mathbb{N}$ se denominan conjuntos *numerables*. Más adelante estudiaremos otros conjuntos infinitos con cardinal mayor.

Los axiomas de Peano

La observación de las características de la sucesión de los números naturales lleva a tres propiedades del conjunto $\mathbb{N}$ que permiten reconstruir esta, así como establecer las definiciones para desarrollar toda la teoría relativa a $\mathbb{N}$.

I. Hay en $\mathbb{N}$ un elemento especial, distinguido de los demás, que se designa 1.

II. Cada $n \in \mathbb{N}$ determina un único elemento $s(n)$ de $\mathbb{N}$, denominado el siguiente de n y designado también n^+. Se verifica

$$n^+ \neq 1 \text{ para cada } n, \quad n \neq m \text{ implica } n^+ \neq m^+.$$

(*s es una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ a* $\mathbb{N}$ - {1}).

III. Axioma de inducción:

Si un subconjunto L *de* $\mathbb{N}$ *verifica las dos propiedades*

$$1) \ \ 1 \in \mathrm{L}, \ \ 2) \ \ n \in \mathrm{L} \text{ implica } n^+ \in \mathrm{L},$$

entonces $\mathrm{L} = \mathbb{N}$.

Obsérvese que la frase "$n \neq m$ implica $n^+ \neq m^+$" equivale a "$n^+ = m^+$ implica $n = m$".

Para construir a partir de $\mathbb{N}$ la sucesión de los números naturales se empieza eligiendo el elemento especial 1. El axioma *II* asegura que 1 tiene su siguiente 1^+ que es distinto de 1, y 1^+ se designa 2. También 2 tiene su siguiente 2^+ distinto de 1, y 2^+ se designa 3. No puede ser $3 = 2$ porque en tal caso sería $2^+ = 1^+$ y el axioma *II* excluye esta posibilidad. Se prueba así que 3 es distinto de 1 y de 2. Ahora 3^+ se designa 4 y se prueba de forma análoga que 4 es distinto de 1, de 2 y de 3. Este programa se puede prolongar sin interrupción. Siendo L el conjunto de los números obtenidos mediante él, el axioma de inducción asegura que $\mathrm{L} = \mathbb{N}$.

Aritmética en $\mathbb{N}$

Para cada n y cada m se define

$$n + 1 = n^+ \quad \text{y} \quad n + m^+ = (n + m)^+.$$

El axioma de inducción permite asegurar que lo anterior constituye la definición de la suma de cualesquiera dos números naturales. El primer sumando, n, es un número arbitrario. Sea L el conjunto de los $m \in \mathbb{N}$ tales que se puede obtener la suma $n+m$ mediante la definición anterior. Resulta que $1 \in \mathrm{L}$ y que $m \in \mathrm{L}$ implica $m^+ \in \mathrm{L}$, por lo cual es $\mathrm{L} = \mathbb{N}$. (A partir de ahora n^+ puede sustituirse por $n + 1$).

Establecida pues la definición de $a+b$, el producto de dos factores se define de forma análoga:

$$n1 = n \quad \text{y} \quad n(m + 1) = nm + n.$$

Como en el caso de la suma, del axioma de inducción se deduce que así queda definido cualquier producto ab.

Puesto que las definiciones anteriores conciernen solamente a sumas y productos de dos números, se requiere ampliar la definición cuando es mayor que dos el número de términos. Para tres términos se define

$$a + b + c = (a + b) + c \quad \text{y} \quad abc = (ab)c.$$

Definidos la suma y el producto de n términos, la extensión a $n + 1$ términos es

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1},$$

$$a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} = (a_1 a_2 ... a_n) a_{n+1}.$$

De nuevo el axioma de inducción asegura que así quedan definidas sumas y productos de cualquier número de términos. En particular, fijado $a \in \mathbb{N}$, se consideran las potencias a^n de a para cualquier exponente natural n :

$$a^1 = a, \ a^2 = aa, \ \ldots \ a^{n+1} = a^n a.$$

Hay que decir que la explicación de la desigualdad $a > b$ hecha antes de formular los axiomas de Peano tiene solamente un carácter informal, intuitivo: la frase "a está situada en la línea a la derecha de b" no tiene valor matemático en sentido estricto. Pero las dos propiedades de esta desigualdad expresadas allí sí que tienen valor matemático.

Teorema 1

Sumas y productos de números naturales tienen las propiedades

asociativas: $(a+b)+c = a+(b+c) \quad y \quad (ab)c = a(bc)$

conmutativas: $a+b = b+a \quad y \quad ab = ba$

distributivas: $a(b+c) = ab+ac \quad y \quad (a+b)c = ac+bc$

de cancelación:

$a+c = b+c$ *implica* $a = b$, $ac = bc$ *implica* $a = b$.

La relación $a > b$ *equivale a la existencia de* n *tal que* $a = b+n$.

Además, $a > b$ *implica que* $a+c > b+c$ *y que* $ac > bc$.

Demostración

Es necesario seguir varios pasos en un determinado orden, porque en algunos pasos se requiere utilizar, además de las definiciones, resultados de pasos anteriores.

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$: sea C el conjunto de los números naturales c que verifican esta relación para cualesquiera a y b. Se verifica que $1 \in C$, pues

$$(a+b)+1 = (a+b)^+ = a+b^+ = a+(b+1).$$

Suponemos que $c \in C$, y entonces

$$(a+b)+c^+ = (a+b)+(c+1) = [(a+b)+c]+1 =$$

$$[a+(b+c)]+1 = [a+(b+c)]^+ = a+(b+c)^+ = a+(b+c^+),$$

lo cual expresa que $c^+ \in C$. Se cumplen las condiciones para aplicar el axioma de inducción y deducir que $C = \mathbb{N}$.

2) $a(b+c) = ab+ac$: sea C igual que en 1). $1 \in C$, pues

$$a(b+1) = ab^+ = ab+a = ab+a1.$$

Se supone que $c \in C$, y resulta

$$a(b+c^+) = a\,[b+(c+1)] = a\,[(b+c)+1] =$$

$$a(b+c)+a1 = (ab+ac)+a = ab+(ac+a) = ab+ac^+.$$

Se verifican pues las condiciones para deducir $C = \mathbb{N}$.

3) $(ab)c = a(bc)$: se define C como antes, y $1 \in C$ porque $(ab)1 = ab = a(b1)$. Si $c \in C$, entonces

$$(ab)c^+ = (ab)(c+1) = (ab)c+(ab)1 = a(bc)+ab = a(bc+b) = a(bc^+),$$

lo cual expresa que $c^+ \in C$. La conclusión es que $C = \mathbb{N}$.

4) $a+b = b+a$: sea ahora A el conjunto de los a que verifican la relación para $b = 1$. Entonces $1 \in A$ obviamente y, si $a \in A$, resulta

$$a^+ + 1 = (a+1)+1 = (1+a)+1 = 1+(a+1) = 1+a^+,$$

es decir, $a^+ \in A$, y se concluye otra vez que $A = \mathbb{N}$. Si B es el conjunto de los b tales que $a + b = b + a$ para cualquier a, se obtiene que $1 \in B$ por el resultado anterior y, suponiendo que $b \in B$, resulta

$$a + b^+ = a + (b + 1) = (a + b) + 1 = (b + a) + 1$$

$$= b + (a + 1) = b + (1 + a) = (b + 1) + a = b^+ + a,$$

es decir, $b^+ \in B$. De nuevo, $B = \mathbb{N}$.

5) $(a + b)c = ac + bc$: C es el conjunto de los c que verifican la relación para cualesquiera a y b. Entonces $1 \in C$, pues $(a + b)1 = a + b = a1 + b1$. Si $c \in C$, entonces

$$(a + b)c^+ = (a + b)(c + 1) = (a + b)c + (a + b) =$$

$$(ac + bc) + (a + b) = (ac + a) + (bc + b) = ac^+ + bc^+,$$

es decir, $c^+ \in C$ y $C = \mathbb{N}$.

6) $ab = ba$: sea A el conjunto de los a que verifican la propiedad para $b = 1$. Obviamente $1 \in A$ y, si $a \in A$, entonces

$$a^+1 = a^+ = a + 1 = 1 + a = 1 + 1a = 1(1 + a) = 1a^+,$$

por lo que $a^+ \in A$ y $A = \mathbb{N}$. Ahora B es el conjunto de los b tales que $ab = ba$ para cualquier a. Por lo anterior, $1 \in B$ y, si $b \in B$, resulta

$$ab^+ = a(b + 1) = ab + a1 = ba + 1a = (b + 1)a = b^+a,$$

y así $b^+ \in B$ y $B = \mathbb{N}$.

7) $a > b$ significa que a se obtiene a partir de b aplicando s de forma iterada. Si se aplica una vez, entonces $a = b + 1$. Si se aplica dos veces, entonces

$$a = (b + 1) + 1 = b + (1 + 1) = b + 2.$$

Análogamente, $a = b + 3$, o $a = b + 4$, etc.

8) Si es $a > b$, entonces existe n tal que $a = b + n$. De aquí resulta que $a + c = (b + c) + n$, es decir, $a + c > b + c$, y también $ac = bc + nc$, es decir, $ac > bc$.

Solo falta demostrar las propiedades de cancelación.

9) $a + c = b + c$ implica $a = b$, pues si fuera $a > b$ o $b > a$, por aplicación de 8) se obtendría $a + c \neq b + c$. De forma análoga se prueba que $ac = bc$ implica $a = b$. ■

La propiedad asociativa expresa que producen el mismo resultado las dos opciones posibles para definir la suma y el producto de tres términos respetando el orden de estos.

1.2. Expresión del razonamiento matemático

Hay varios elementos que juegan un papel muy importante en el desarrollo de una teoría matemática. En esta sección se explica el significado y la forma de utilización de los que pueden considerarse más importantes.

Definiciones, axiomas y teoremas

Las *definiciones* explican el significado de los nuevos términos o conceptos.

Ejemplo: número *primo* es un número natural mayor que 1 y no es el producto de dos números naturales ambos mayores que 1.

También se utiliza la palabra SIGNIFICA para destacar que se trata de atribuir a algo un significado: un número es *primo* significa que es un número natural mayor que 1 y no es el producto de dos números naturales mayores que 1.

Una construcción típica de la matemática consiste en considerar un conjunto desestructurado, es decir, no hay una estructura basada en relaciones de unos elementos con otros (como puede ser la presencia de una ley de composición interna) ni cualquier otro tipo de conexiones internas o en relación con otros conjuntos. Los *axiomas* son en tal situación las reglas o principios que se aceptan en virtud de los cuales el sistema empieza a producir resultados. A una colección de axiomas hay que exigirle que sean independientes entre sí, es decir, que no suceda que alguno de ellos se obtiene como consecuencia de otros.

Un ejemplo de construcción axiomática consiste en considerar en principio desestructurado el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Los tres axiomas de Peano son entonces los que confieren estructura a $\mathbb{N}$. Como se ha probado ya, con ellos se definen la suma y el producto, la noción de número primo, etc. En definitiva así comienza la teoría de los números naturales, llamada simplemente *Teoría de Números* y considerada como la reina de las matemáticas. Ahora bien, ¿de dónde proceden los axiomas de Peano? En el comienzo de este capítulo se presenta *la sucesión de los números naturales,* sin dar explicación a priori de qué significa *sucesión.* En realidad, lo que se presenta allí es una intuición que está impresa en la inmensa mayoría de las personas. Al empezar a hablar los humanos de lengua castellana surgen las palabras *uno, dos, tres* ... Esa intuición es la que pone en funcionamiento la matemática, podría decirse que es prematemática. Los axiomas de Peano son fruto de esa intuición. Es entonces cuando se puede afirmar que empieza la propia matemática.

En el álgebra se presentan modelos simples que son buenos ejemplos: un *grupo* es un conjunto dotado de una estructura que consiste en una ley de composición interna regulada por unos determinados axiomas.

Los *teoremas* son resultados que han sido probados como verdaderos y obtenidos directamente a partir de los axiomas, o a partir de otros teoremas, mediante una demostración. Teoremas que se presentarán más adelante son el de inducción y otro que se apoya en él: *cualquier número natural mayor que* 1 *es primo o es un producto de números primos.*

Proposiciones

Las proposiciones pueden entenderse como enunciados con significado matemático a los que se puede atribuir un valor de verdadero o de falso. Cada proposición P viene acompañada de su negación no$P$; la verdad de una es la falsedad de la otra. La negación de no$P$ vuelve a ser P. (En el lenguaje usual se admiten frases como "*no hay nadie que sea capaz de...*", a la que se atribuye como significado "*nadie es capaz de...*"; quizás la frase "*no hay alguien que sea capaz de...*" estaría más de acuerdo con el sentido matemático de la negación).

Se llama *contradicción* una proposición que es verdadera y también es falsa. Si en la matemática apareciera una proposición de tal naturaleza, ello constituiría un gran peligro porque entrañaría la no distinción entre verdad y falsedad, ya que de la existencia de una contradicción

resulta que todas las proposiciones lo son. No se ha probado la imposibilidad de que surja alguna contradicción en el desarrollo de la matemática, pero está admitido como mecanismo de demostración que no es así. Es decir, en ausencia de contradicciones la proposición que no es falsa es verdadera, y la que no es verdadera es falsa. O bien, una proposición es verdadera si su falsedad genera una contradicción, y es falsa si ser verdadera genera una contradicción.

Existen proposiciones matemáticas de las que en este momento no se ha podido probar su verdad ni su falsedad: son los problemas *abiertos* de la matemática. Un ejemplo: si p y $p+2$ son primos, se denominan primos gemelos. No se sabe si el conjunto de ellos es finito o no. Más sugestiva es la existencia de alguna proposición *indecidible*, de la cual está demostrado que no es posible probar su verdad ni su falsedad. Pero una tal proposición no es peligrosa, como sí lo sería una *contradicción*.

Demostración por reducción al absurdo

De una proposición o conjunto de proposiciones verdaderas que constituyen la hipótesis de partida se pretende deducir que también es verdadera una nueva proposición T. Lo primero que se tiene que intentar entonces es un método directo: razonar de forma constructiva para obtener que T es verdadera. Pero esto no es posible en muchas ocasiones en las que es imprescindible usar un método indirecto que suele denominarse de *reducción al absurdo.* Está basado en admitir la no existencia de una *contradicción*, es decir, que para una proposición no hay otra posibilidad que ser una y solo una de estas dos cosas: verdadera, falsa. No hay una tercera vía. La reducción al absurdo consiste en hacer un razonamiento a partir de suponer que T es falsa con el que se obtenga una proposición contradictoria. Siendo así, el método ha funcionado bien, hay que anular la hipótesis hecha de ser T falsa y resulta finalmente que T es verdadera. (Naturalmente, si de lo que se trata es de probar que T es falsa, entonces la reducción al absurdo consiste en suponer que T es verdadera y obtener una contradicción).

Ejemplo 1

Se probará en la sección siguiente que cada número natural mayor que 1 es primo o bien tiene un divisor primo. Se trata de demostrar que el conjunto de los números primos es infinito. Si se hace la hipótesis de ser finito, pueden considerarse el producto p de todos ellos y el número $n = p + 1$. Entonces la división euclídea de n por cada número primo da resto 1, por lo que n no tiene un divisor primo y debe ser primo. La contradicción es ser primo y ser mayor que cada número primo.

Ejemplo 2

Si a y b son números naturales que no tienen un divisor primo común, entonces es falso que sea $a^2 = 2b^2$. Se supone que es $a^2 = 2b^2$. Entonces a^2 es par y también a es par (porque el cuadrado de un número impar es impar: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$). Resulta así que existe un número natural h tal que $a = 2h$ y también $a^2 = 4h^2 = 2b^2$. De la última igualdad se obtiene $2h^2 = b^2$, lo cual expresa que b^2 es par, y b también es par como ya se ha probado antes. La contradicción obtenida es que a y b son los dos pares, es decir, tienen el divisor común 2, que contradice la hipótesis inicial.

Pruébese que también es falso que sea $a^2 = 2b^2$ cuando a y b tienen algún divisor primo común.

Conjunción y disyunción de proposiciones

Para dos proposiciones P y Q se pueden considerar también su conjunción $[P\ y\ Q]$ y su disyunción $[P\ o\ Q]$. Ejemplo: P es *Pedro es ingeniero*, Q es *Pedro es médico*. Entonces

$$[P\ y\ Q] \quad \text{es "}\textit{Pedro es ingeniero y médico}\text{"},$$

$$[P\ o\ Q] \quad \text{es "}\textit{Pedro es ingeniero o médico}\text{"}.$$

Se observa que $[P$ y $Q]$ solo es verdadera si lo son simultáneamente P y Q. $[P$ y $Q]$ es falsa cuando alguna es falsa y también cuando ambas son falsas . En cuanto a $[P$ o $Q]$, es falsa si lo son simultáneamente P y Q. Cuando solo alguna es verdadera y también cuando ambas son verdaderas, $[P$ o $Q]$ es verdadera. (Es usual interpretar que la verdad de la disyunción $[P$ o $Q]$ requiere la verdad de uno de los términos y la falsedad del otro, pero tal no es la acepción matemática).

Implicaciones

La implicación constituye el eslabón fundamental de un razonamiento matemático. En las secciones precedentes ya se han considerado varias implicaciones. Fijadas dos proposiciones P y Q, la implicación $[P$ implica $Q]$ suele expresarse $[P \implies Q]$. (Los corchetes pueden evitarse, pero es aconsejable su uso en determinadas circunstancias para evitar errores de sintaxis).

Ejemplo 3

A y B son conjuntos, P es $x \in A$, Q es $x \in B$. $P \implies Q$ es verdadera significa que cada elemento de A es también un elemento de B; ello constituye la definición de la inclusión $A \subset B$ y puede expresarse también de otras formas:

· $x \in B$ si $x \in A$ (y nada se dice sobre x cuando $x \notin A$),

· Si $x \in A$, entonces $x \in B$ (no se puede prescindir de la *coma*, y la palabra ENTONCES sirve para reforzar el objetivo de ser Q una consecuencia de P. Suprimir el ENTONCES podría significar que se añade una nueva condición a la primera.

Un error que suele cometerse es usar la frase [si $P \implies Q$] como expresión de $[P \implies Q]$. Pero tal frase requiere una continuación: si $P \implies Q$ ... Porque solo puede ser interpretada en el sentido "si $[P \implies Q]$ ..." y falta la conclusión requerida.

Una proposición puede ser consecuencia de la conjunción de varias. El axioma de inducción proporciona un buen ejemplo: $\mathrm{L} = \mathbb{N}$ es una consecuencia de las tres condiciones $\mathrm{L} \subset \mathbb{N}$, $1 \in \mathrm{L}$ y $[n \in \mathrm{L} \implies n^+ \in \mathrm{L}]$. El axioma puede expresarse

$$\left\{\mathrm{L} \subset \mathbb{N},\ 1 \in \mathrm{L}\ y\ \left[n \in \mathrm{L} \implies n^+ \in \mathrm{L}\right]\right\} \implies \mathrm{L} = \mathbb{N},$$

y también

$$si\ \mathrm{L} \subset \mathbb{N},\ si\ 1 \in \mathrm{L},\ si\ \left[n \in \mathrm{L} \implies n^+ \in \mathrm{L}\right],\ entonces\ \mathrm{L} = \mathbb{N}.$$

Es aconsejable explicitar el condicional *si* en cada una de las tres condiciones, pues es del conjunto de las tres de lo que se obtiene la conclusión final $\mathrm{L} = \mathbb{N}$.

Otra posible expresión del axioma es

$$\mathrm{L} = \mathbb{N}\ si\ \mathrm{L} \subset \mathbb{N},\ 1 \in \mathrm{L}\ y\ \left[n \in \mathrm{L} \implies n^+ \in \mathrm{L}\right].$$

Condiciones necesarias y condiciones suficientes

Cuando una implicación $P \implies Q$ es verdadera se expresa que P es una condición *suficiente* para Q y que Q es una condición *necesaria* para P. Las palabras necesaria y suficiente tienen en matemáticas el mismo sentido que en la vida común. Para que una persona viva al menos 85 años son condiciones necesarias que cumpla los 40, los 55, ... Es necesario también que cumpla los 85, y tal condición es a la vez necesaria y suficiente. Todo lo que viva además ya es suficiente pero no necesario para que se cumpla el objetivo previsto de vivir al menos 85 años. Igual es en las matemáticas. Al ir ampliando las condiciones necesarias para un objetivo se puede llegar a obtener una condición suficiente. Ampliar una condición que ya es suficiente puede resultar superfluo, aunque también puede hacerse con el propósito de facilitar una demostración.

Una cosa es necesaria para lograr un objetivo significa que si se carece de tal cosa el objetivo no se puede lograr. Al considerar las dos implicaciones

$$P \implies Q \quad y \quad \text{no}Q \implies \text{no}P$$

se observa que cada una implica la otra. Un ejemplo simple puede esclarecer la situación: P es *ser múltiplo* de 4, y Q es *ser múltiplo* de 2. Es obvio que $P \implies Q$ es verdadera, y ello es debido a que el conjunto de los múltiplos de 4 está contenido en el de los múltiplos de 2. Esto lleva a que el conjunto de los no múltiplos de 4 contiene al de los no múltiplos de 2, y por esta razón no$Q \implies$ no$P$. Si la que se supone verdadera es no$Q \implies$ no$P$, para obtener que $P \implies Q$ basta aplicar el mismo razonamiento a las proposiciones no$Q$ y no$P$.

Este es el motivo por el que cuando la implicación $P \implies Q$ es verdadera se expresa que Q es necesaria para P. En efecto, entonces no$Q \implies$ no$P$ también es verdadera y ello significa que del hecho de no cumplirse Q se deduce que tampoco se cumple P.

La doble implicación

Sucede en ocasiones que son verdaderas una implicación $P \implies Q$ y su inversa $Q \implies P$. Este hecho se expresa mediante $P \iff Q$. Entonces cada una de las dos proposiciones es condición necesaria y suficiente para la otra. Suele expresarse que se verifica una *si y solo si* se verifica la otra. Esta es la equivalencia lógica entre proposiciones.

La palabra SOLO tiene varias acepciones. Las que se utilizan con mayor frecuencia son el adverbio SOLAMENTE y la que expresa, en relación con una persona del género masculino, que está aislado, solo, sin compañía. Un reciente criterio de la Real Academia Española es que la palabra SOLO se escriba siempre sin tilde. En cualquier caso, cuando SOLO actúa como adverbio pueden evitarse muchas situaciones de ambigüedad en la interpretación sustituyendo SOLO por SOLAMENTE.

Ya se ha indicado antes que la inclusión de conjuntos $A \subset B$ se define por la implicación $x \in A \implies x \in B$. La igualdad $A = B$ se define por la equivalencia $x \in A \iff x \in B$. Debe observarse que de esta definición se deduce que carece de significado que en un conjunto haya elementos iguales entre sí. Siendo A el conjunto $\{a, b\}$ de dos elementos distintos a y b, escribir $B = \{a, a, b\}$ carecería de sentido porque es obvio que se verifica la equivalencia $x \in A \iff x \in B$, es decir, $A = B$. Cuando se trata de ternas (x, y, z) que son elementos de un producto $A \times A \times A$ sí que tienen sentido ternas como (a, a, b) o (a, a, a). Es una circunstancia muy distinta.

Otra situación de doble implicación a la que se ha aludido antes con un ejemplo es en relación con las implicaciones $P \implies Q$ y no$Q \implies$ no$P$:

$$[P \implies Q] \iff [\text{no}Q \implies \text{no}P]\,.$$

Supuesto que la primera es verdadera, para obtener la segunda hay que recurrir al método de reducción al absurdo: la hipótesis de partida es que son verdaderas $[P \implies Q]$ y no$Q$; se trata de probar que de ello se deduce que es verdadera no$P$. Si no$P$ fuera falsa, es decir, si P fuera verdadera, entonces por la hipótesis de partida de ser verdadera $[P \implies Q]$ resulta que Q también es verdadera. La contradicción obtenida es que no$Q$ y Q son ambas verdaderas. Para probar que

$$[\text{no}Q \implies \text{no}P] \implies [P \implies Q]$$

basta aplicar el mismo argumento a no$Q$ y no$P$.

Los cuantificadores $\forall$ y $\exists$

En el lenguaje matemático aparecen con mucha frecuencia las expresiones *para cada* y *existe algún*. Se utilizan los signos $\forall$ y $\exists$ para expresarlas. $\forall$ significa *para cada* y $\exists$ significa *existe algún.* Un ejemplo típico es el siguiente: A y B son conjuntos, y la frase F es "*para cada* λ *que pertenece a* A *existe algún* μ *que pertenece a* B *y verifica* P", (P es una determinada proposición). La expresión abreviada de F es

$$\forall \lambda \in A \quad \exists \mu \in B \quad \textit{tal que } \mu \textit{ verifica } P.$$

Significa que, elegido cualquier elemento λ en A, siempre hay alguno μ de B que verifica P. Hay que hacer notar que μ puede variar en B al variar λ en A. Y puede suceder también que, fijado λ en A, a λ corresponde un único μ de B que verifica P. Pero, si esa es la circunstancia y el razonamiento requiere que sea así, entonces hay que explicitarlo necesariamente. La negación no$F$ de la frase F anterior se expresa

$$\exists \lambda \in A \quad \textit{tal que} \quad \forall \mu \in B \;\; \mu \textit{ no verifica } P.$$

Hay que observar al mirar en paralelo F y no$F$ el cambio de $\forall$ por $\exists$ y de $\exists$ por $\forall$, así como que el final de F es μ *verifica* P, y el de no$F$ es μ *no verifica* P (o bien μ *verifica* no$P$). Obsérvese también la usual aparición de *tal que* después de $\exists$.

Si A es un conjunto de personas y se considera la frase $\forall \lambda \in A$ λ *tiene nacionalidad española,* entonces la negación de esta frase es $\exists \lambda \in A$ *tal que* λ *no tiene nacionalidad española.* Y si la frase es $\exists \lambda \in A$ *tal que la estatura de* λ *es mayor que* 2 *metros*, entonces la correspondiente negación es $\forall \lambda \in A$ *la estatura de* λ *no es mayor que* 2 *metros* (es menor o igual que 2 metros).

Finalmente, es usual que $\forall$ se interprete también como *para todo.* Siendo así, a la frase

$$\textit{para todo } \lambda \in A \quad \exists \mu \in B \quad \textit{tal que } \mu \textit{ tiene la propiedad } P$$

podría adjudicársele erróneamente como significado

$$\textit{para todos los elementos de } A \quad \exists \mu \in B \quad \textit{tal que } \mu \textit{ tiene la propiedad } P,$$

es decir, hay un elemento μ en B que "sirve" para cualquiera de los elementos de A. Esta no es la acepción de $\forall$. Es preferible usar el *para cada.*

Relaciones y aplicaciones

El producto $A \times B$ de los conjuntos A y B, que pueden ser iguales, es el conjunto cuyos elementos son los pares ordenados (a, b) siendo $a \in A$ y $b \in B$. Se establecen conexiones entre elementos de A y elementos de B que se expresan mediante subconjuntos R del producto $A \times B$. Ejemplo: A es el conjunto de los números naturales pares, B es el de los impares, y R tiene como elementos los pares (a, b) para los cuales se verifica que $a + b$ es un número primo. Entonces $(4, 1) \in R$ y $(8, 1) \notin R$.

Una relación de A a B es cualquier subconjunto R del producto $A \times B$. La inversa R^{-1} de R es la relación de B a A constituida por los pares (b, a) tales que $(a, b) \in R$.

Naturalmente, muchas relaciones carecen de interés. Pero otras permiten expresar conexiones útiles entre los elementos de ambos conjuntos.

Una función (o aplicación) es una relación φ de A a B tal que para cada x de A existe un único z de B que verifica $(x, z) \in \varphi$. El elemento z de B así determinado por x se denomina imagen de x mediante φ y se designa $\varphi(x)$.

Suele decirse que φ es una función con *dominio* A y *valores* en B, y se expresa $\varphi : A \to B$.

Una función φ es *inyectiva* significa que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ cuando x e y son dos elementos distintos de A. φ es *sobreyectiva* significa que cada elemento de B es imagen de algún elemento de A. φ es *biyectiva* significa que es inyectiva y también sobreyectiva.

Como relación que es, cada función $\varphi : A \to B$ tiene una inversa φ^{-1} que es una relación de B a A. Se observa fácilmente que φ^{-1} es aplicación si y solo si φ es biyectiva, y que en tal caso φ^{-1} también es biyectiva.

Ley de composición en A es una aplicación de $A \times A$ a A. La imagen del par (x, y) se expresa en este caso $x + y$ (suma), xy (producto), o bien utilizando alguna otra notación $x \circ y$.

Las relaciones de A a A tienen especial importancia. Una relación R de este tipo puede tener alguna o varias de las siguientes propiedades

reflexiva: para cada $x \in A$ se verifica que $(x, x) \in R$
de simetría: $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$
de antisimetría: $[(x, y) \in R$ y $x \neq y]$ implica $(y, x) \notin R$
transitiva: $[(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R]$ implica $(x, z) \in R$.

Relación de equivalencia es la que tiene las propiedades reflexiva, transitiva y de simetría.
Relación de orden es la que tiene las propiedades transitiva y de antisimetría.

Cada relación de equivalencia R en A permite obtener el denominado *conjunto cociente* de A respecto de R, que se designa A/R. Sus elementos son las *clases de equivalencia* caracterizadas así: la clase de equivalencia a la que pertenece un determinado x de A es el subconjunto de A

$$\{z \in A : (x, z) \in R\}.$$

Hay que observar que si $(x, y) \notin R$, entonces las clases de equivalencia de x y de y son subconjuntos disjuntos de A, y que si $(x, y) \in R$, entonces las clases correspondientes son iguales.

Las relaciones de orden producen ordenaciones entre los elementos de A. Exceptuando el conjunto de los números complejos, en los demás conjuntos de números (naturales, enteros, racionales y reales) se define la relación $a > b$ que además de la propiedad transitiva tiene la denominada propiedad de *tricotomía:* para cada par de números a y b se verifica una y solo

una de las relaciones $a > b$, $a = b$, $a < b$. Es fácil observar que esta propiedad implica la de antisimetría.

1.3. La inducción matemática

El axioma de inducción es una herramienta fundamental para la matemática. Son muchas las ocasiones en las que se trata de probar que todos los números naturales tienen una determinada propiedad P. Es imposible efectuar la comprobación oportuna para cada uno de ellos porque $\mathbb{N}$ es infinito. Se considera entonces el conjunto L cuyos elementos son todos los números que tienen la propiedad P. El axioma establece que se puede garantizar que es $\mathrm{L} = \mathbb{N}$ si se pueden hacer estas dos cosas: 1) *comprobar* que $1 \in \mathrm{L}$; 2) *demostrar* la implicación $[n \in \mathrm{L} \implies (n+1) \in \mathrm{L}]$. Hay que observar que para cualquier conjunto infinito de números naturales es imposible obtener mediante comprobación individual para cada uno, n, de sus elementos que el siguiente $n+1$ también pertenece a él. Lo que hay que hacer para demostrar la implicación $[n \in \mathrm{L} \implies (n+1) \in \mathrm{L}]$ es *suponer* que n pertenece a L (esto es lo que suele llamarse la *hipótesis de inducción*) y *demostrar* mediante alguna consideración, de tipo aritmético por ejemplo, relativa a n que también $n+1$ pertenece a L. Lo que no se puede dejar de hacer es el trabajo no con un elemento concreto de L sino con uno arbitrario que debe ser designado con una letra.

Ejemplo 1

Si A es un conjunto finito de cardinal n, entonces 2^n es el cardinal del conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A.

Sea L el conjunto de los números naturales que tienen esta propiedad. Es obvio que $1 \in \mathrm{L}$, porque los subconjuntos de $\{x\}$ son el vacío y el propio $\{x\}$.

Hipótesis de inducción: se supone que $n \in \mathrm{L}$, es decir, que un conjunto A de cardinal n tiene exactamente 2^n subconjuntos. (Se trata de una hipótesis, de suponer que es así; no se trata de comprobar ni demostrar algo).

Solo falta *demostrar* a partir de la hipótesis anterior que $n+1$ pertenece a L, es decir, que un conjunto B de cardinal $n+1$ tiene exactamente 2^{n+1} subconjuntos. En efecto, sea B el conjunto obtenido al añadir a A un nuevo elemento x. Los subconjuntos P de B los podemos separar en dos bloques, según que x pertenezca o no a P. Los del segundo bloque son los subconjuntos de A, y son 2^n debido a la hipótesis de inducción; los del primer bloque son también 2^n, puesto que se obtienen añadiendo x a cada uno del segundo bloque. Los subconjuntos de B son pues 2^{n+1}.

Hay que observar que el axioma de inducción no es la única vía para demostrar que un subconjunto L de $\mathbb{N}$ coincide con $\mathbb{N}$ y que, aunque ello sea cierto, sea posible siempre demostrarlo mediante la inducción.

Ejemplo 2

Se verifica que $2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n+1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y puede probarse fácilmente mediante inducción, pero un argumento aritmético elemental lo prueba también: los dos términos de la igualdad admiten como expresión una suma de n sumandos todos iguales a $n+1$.

Ejemplo 3

Se asocia a 1 el número 2, que se designará x_1 por estar asociado a 1. A cada $n \in \mathbb{N}$ se asocia x_n de acuerdo con la fórmula $2x_{n+1} = x_n + 2/x_n$. Es decir, $2x_2 = x_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ y $x_2 = 3/2$, etc. El axioma de inducción asegura que así se siguen obteniendo las fracciones x_n de numerador y denominador positivos que corresponden a cada $n \in \mathbb{N}$.

Se trata de demostrar que $x_n^2 > 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así sucede para x_1 y x_2. De la fórmula se obtiene

$$4x_n^2 = x_n^2 + 4 + 4/x_n^2.$$

De suponer $x_n^2 > 2$ no es posible deducir que $x_{n+1}^2 > 2$ porque ello requiere que sea $4x_{n+1}^2 > 8$, pero es

$$x_n^2 + 4 > 6 \;\text{ y }\; 4/x_n^2 < 2$$

de lo que es imposible obtener el objetivo previsto sin saber qué fracción es x_n. Esto significa que no se puede resolver el problema mediante inducción.

Sin embargo, basta observar que para cualquier fracción x de términos positivos se verifica

$$\left[x^2 + 4 + 4/x^2\right] - 8 = x^2 - 4 + 4/x^2 = (x - 2/x)^2 .$$

El último término de las igualdades anteriores es positivo porque solo puede ser 0 cuando es $x = 2/x$, es decir, cuando es $x^2 = 2$, lo cual se probó que no es posible en el ejemplo **2** de **1.2**.

El teorema de inducción

Como se acaba de observar, el axioma de inducción no es siempre la herramienta adecuada para demostrar que un determinado subconjunto L de $\mathbb{N}$ es igual que $\mathbb{N}$. Pero hay un resultado más potente que el axioma de inducción que consiste en sustituir la implicación $[n \in \mathrm{L} \implies (n+1) \in \mathrm{L}]$ que interviene en el axioma por esta otra:

$$\{1, 2, 3, ..., n\} \subset \mathrm{L} \textit{ implica } (n+1) \in \mathrm{L}.$$

Teorema 1
Si un subconjunto L *de* $\mathbb{N}$ *verifica las dos propiedades*

$$1)\;\; 1 \in \mathrm{L}, \quad 2)\;\; \{1, 2, ..., n\} \subset \mathrm{L} \textit{ implica } (n+1) \in \mathrm{L},$$

entonces $\mathrm{L} = \mathbb{N}$.

Demostración
Es por reducción al absurdo. Se supone que L es distinto de $\mathbb{N}$. Sea L' el conjunto (no vacío) cuyos elementos son los números naturales que no pertenecen a L. L' puede tener un único elemento a o bien tener más de uno; en la segunda opción hay en L' un elemento a que es mínimo, es decir, menor que cada uno de los demás. En cualquier caso, puesto que $1 \in \mathrm{L}$, es $a > 1$ y existe n tal que $n + 1 = a$. Resulta así que los números $1, 2, ..., n$ pertenecen a L y por la implicación 2) se obtiene que $n + 1$ también pertenece a L, es decir, $a \in \mathrm{L}$, lo cual es contradictorio con $a \in$ L'. ■

Sea r un número natural fijado. Algunas veces lo que se trata de probar es que a un conjunto H de números naturales mayores que r pertenecen todos los números naturales que son mayores que r. Lo que hay que hacer entonces es comprobar si el axioma o el teorema de inducción se puede aplicar al conjunto $\mathrm{L} = \{1, 2, ..., r\} \cup \mathrm{H}$.

Para que a L sea aplicable el axioma de inducción hay que poner a H dos condiciones:

$$1')\; (r+1) \in \mathrm{H}, \;\; 2')\;\; n \in \mathrm{H} \implies (n+1) \in \mathrm{H}.$$

En efecto, $1 \in \mathrm{L}$ está garantizado por la definición de L y, en cuanto a la implicación

$$n \in \mathrm{L} \implies (n+1) \in \mathrm{L},$$

también está garantizada para $n < r$ por la definición de L; para $n = r$ es debido a 1') y para $n > r$ se debe a 2').

Para el teorema de inducción, el razonamiento es análogo. Las condiciones exigidas a H son

$$1') \ \ (r+1) \in \mathrm{H}, \quad 2') \ \ \{r+1, r+2, ..., n\} \subset \mathrm{H} \implies (n+1) \in \mathrm{H}.$$

Ejemplo 4

La desigualdad $n^2 < 2^n$ no es cierta para 2, 3 y 4. El problema es averiguar si es verdadera para todos los números mayores que 4. Sea H entonces el conjunto de los números mayores que 4 y que verifican tal desigualdad, y sea $\mathrm{L} = \{1, 2, 3, 4\} \cup \mathrm{H}$. Se puede aplicar el axioma de inducción. $5 \in \mathrm{H}$ porque 25 es menor que 32. Supuesto que $n \in \mathrm{H}$, resulta

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2(n+1),$$

y se prueba también que para $n > 4$ es $n + 1 < 2^{n-1}$, por lo que finalmente $(n+1) \in \mathrm{H}$.

Ejemplo 5

Cada número natural mayor que 1 *es primo (no es el producto de dos números naturales mayores que* 1*) o es un producto de factores primos.*

Se aplica el teorema de inducción. H es el conjunto de los números mayores que 1 para los cuales se verifica la propiedad y $\mathrm{L} = \{1\} \cup \mathrm{H}$. $2 \in \mathrm{H}$ porque 2 es primo. Supuesto que n es mayor que 1 y pertenece a H, ahora hay que probar que

$$\{2, 3, 4, ..., n\} \subset \mathrm{H} \implies (n+1) \in \mathrm{H}.$$

Si $n + 1$ es primo, entonces por esa razón ya pertenece a H. Si $n + 1$ no es primo, entonces es el producto ab de dos números naturales distintos de 1 que son necesariamente menores que él, por lo cual pertenecen a H, es decir, tanto a como b es primo o es un producto de factores primos. En cualquier caso, resulta que $n + 1$ pertenece a H.

Extensión de la propiedad asociativa

Se consideran un conjunto arbitrario y una ley de composición en él que se designará con la notación que hemos asociado al producto. La propiedad asociativa nace de la necesidad de definir el producto abc de tres factores. Puesto que el producto está inicialmente definido para dos factores, el producto abc se define en dos etapas, lo cual se designa $(ab)c$ y significa obtener ab en la primera etapa y el producto de los factores ab y c en la segunda. Respetando el orden de los factores, solo hay otra forma posible de operar, que se designa $a(bc)$ y significa empezar por obtener bc. La propiedad asociativa establece que $(ab)c = a(bc)$, y en lo sucesivo el resultado final con ambas formas de operar se designa abc.

Para cuatro factores el producto $abcd$ se define por $(abc)d$. Ahora hay otras formas de poder interpretar este producto, también con el criterio de mantener el orden de los factores, y que se designan

$$(ab)(cd), \ a((bc)d), \ a(b(cd)), \ (a(bc))d.$$

La aplicación reiterada de la propiedad asociativa permite probar que con todas ellas el resultado final es el mismo, por lo cual los paréntesis no son necesarios.

Si va aumentando el número de factores, el producto $a_1a_2...a_na_{n+1}$ se define mediante $(a_1a_2...a_n)a_{n+1}$, para $n \geq 3$, es decir, definido el producto de n factores, está definido también el producto de $n+1$ factores. Así queda definido el producto de cualquier cantidad finita de factores en virtud del principio de inducción.

Si consideramos, por ejemplo, un producto $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$, este se podría interpretar también de bastantes maneras distintas respetando siempre el orden de los factores, y cada una de ellas se explicitaría con los paréntesis adecuados. ¿Conducen todos los procedimientos posibles al mismo resultado final? Con paciencia se puede comprobar que es así mediante la utilización reiterada de la propiedad asociativa.

Pero este programa no se puede llevar muy lejos, porque la cantidad de posibilidades de interpretar un producto de n factores aumenta de forma considerable al crecer n. Hay que recurrir a la inducción.

Teorema 2

Si el producto definido en un conjunto arbitrario A tiene la propiedad asociativa, entonces para cualquier $n \geq 3$ las distintas maneras posibles de interpretar un producto de n factores, conservando siempre el orden de los mismos, conducen al mismo resultado que establece la definición de tal producto.

Demostración

Se usará el teorema de inducción, lo cual requiere, en primer lugar, comprobar que lo establecido en el teorema es cierto para $n = 3$. Esto es justamente la propiedad asociativa.

Y en segundo lugar, demostrar que lo que indica el teorema es cierto para un producto de $n+1$ factores suponiendo que es así para cualquier producto cuyo número de factores no sea mayor que n. (Esta hipótesis expresa que se pueden evitar los paréntesis en tales productos).

Se considera pues el producto $p = a_1a_2...a_nc$ definido por $(a_1...a_n)c$. Sea p' el resultado obtenido para una forma concreta arbitraria de colocar los paréntesis con los $n+1$ factores dados. Alguna etapa del proceso que estos paréntesis determinan consistirá en obtener bc, siendo $b = a_n$ o bien $b = a_ka_{k+1}...a_n$, con $1 \leq k < n$. Por ejemplo, en $(a_1(a_2a_3))c$ es $b = a_1a_2a_3$; en $(a_1a_2)(a_3c)$ es $b = a_3$, y en $a_1((a_2a_3)c)$ es $b = a_2a_3$. Cuando es $k = 1$, entonces $p' = (a_1a_2...a_n)c = p$. Si es $k > 1$, sea $a = a_1$ cuando $k = 2$, y sea $a = a_1a_2...a_{k-1}$ cuando es $k > 2$. Entonces $p' = a(bc)$ y por la propiedad asociativa resulta finalmente $p' = (ab)c = (a_1...a_n)c = p$. ■

1.4. Sucesiones y series

Las sucesiones son objetos muy importantes en la matemática. No se puede prescindir de ellas para dar una definición constructiva de los números reales, lo cual es un objetivo fundamental en el Análisis Matemático. La palabra *sucesión* se ha utilizado ya al comienzo de este capítulo al referirnos a *la sucesión de los números naturales.* Sin esa noción intuitiva previa es imposible llegar a concebir el conjunto $\mathbb{N}$ ni establecer de forma precisa y general qué es una sucesión.

Sucesiones de números naturales

$$(1,\ ),\quad (2,\ ),\quad (3,\ ),\quad (4,\ ),\quad (5,\ ),\ \cdots\ (n,\ ),\ \cdots$$

Se vuelve a considerar la sucesión de los números naturales. Pero ahora se ha dejado un espacio en blanco a la derecha de cada número. Esos espacios en blanco se pueden rellenar con números naturales elegidos con un determinado criterio.

Ejemplo 1

a) $(1,2),\ (2,3),\ (3,5),\ (4,7),\ (5,11),\ (6,13),\ \cdots\ (n,p_n),\ \cdots$

b) $(1,1),\ (2,1),\ (3,2),\ (4,3),\ (5,5),\ (6,8),\ \cdots\ (n,a_n),\ \cdots$

c) $(1,12),\ (2,12),\ (3,12),\ (4,12),\ (5,12),\ \cdots\ (n,b_n),\ \cdots$

d) $(1,2),\ (2,5),\ (3,2),\ (4,5),\ (5,2),\ (6,5),\ \cdots\ (n,c_n),\ \cdots$

En *a*) se han rellenado los espacios con los números primos en orden creciente; p_n es el número primo que ocupe el lugar n en la lista creciente de estos.

En *b*) el criterio consiste en escribir 1 a la derecha de 1 y de 2; a partir del 3 se van poniendo los números 2, 3, 5, 8, 13,... donde cada número es la suma de los dos anteriores. Es decir, $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ para cada n. Se puede obtener explícitamente qué número es a_n en función de n. Para ello se consideran los números α y β determinados por $2\alpha = 1 + \sqrt{5}$ y $2\beta = 1 - \sqrt{5}$. Se prueba fácilmente que α y β verifican interesantes relaciones:

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1, \quad 1 + \alpha = \alpha^2, \quad 1 + \beta = \beta^2.$$

El número a_n determinado por

$$a_n\sqrt{5} = \alpha^n - \beta^n$$

es la solución de nuestro problema, porque es fácil comprobar que $a_1 = a_2 = 1$ y se va a probar a continuación que es válida la igualdad que nos ha servido para determinar la sucesión: $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para facilitar la expresión probaremos que

$$a_n\sqrt{5} + a_{n+1}\sqrt{5} = a_{n+2}\sqrt{5},$$

es decir,

$$[\alpha^n - \beta^n] + \left[\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right] = \alpha^{n+2} - \beta^{n+2}.$$

Lo que hay que hacer es expresar α^n de la forma $\alpha^{n+1}\alpha^{-1}$, expresar β^n de la forma $\beta^{n+1}\beta^{-1}$, y utilizar después las propiedades de los números α y β. Los detalles quedan al cuidado del lector.

Esta sucesión se conoce como la sucesión de Fibonacci.

En *c*) está el número 12 en todas las posiciones; b_n es 12 para cualquier n.

En *d*) aparecen alternativamente 2 y 5; c_n es 2 si n es impar, y es 5 si n es par.

Los cuatro objetos anteriores se llaman *sucesiones* de números naturales.

En general, una sucesión de números naturales se obtiene asignando a cada $n \in \mathbb{N}$ un único número natural x_n. El objeto (n, x_n) es un *elemento* de la sucesión, pertenece al producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y hay un único elemento para cada n. La sucesión queda determinada conociendo para cada n quién es x_n. El objeto x_n se denomina *término* de la sucesión. La expresión (con letras) x_n determina unívocamente el *elemento* (n, x_n). Pero si se dice que 7 es un término, entonces puede suceder que para distintos valores de n sea $(n, 7)$ un elemento. En las fórmulas o frases que se refieren a números pueden intervenir los términos x_n pero no los elementos (n, x_n). Se pueden sumar los términos a_n y b_n de dos sucesiones, pero no los elementos correspondientes (n, a_n) y (n, b_n) porque la suma de ellos habría que interpretarla como la usualmente definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es decir, $(n + n, a_n + b_n)$, lo cual carece de interpretación en una sucesión.

El ejemplo a) es la sucesión de los números primos y los términos p_1, p_2, p_3, ... están en orden creciente, es decir, $p_n < p_m$ si $n < m$. Son elementos de ella $(3, 5)$, $(5, 11)$, $(8, 19)$ ... El primer miembro de cada elemento se puede considerar como una etiqueta del segundo. En el caso particular de esta sucesión nada relevante sucede si se pierde la etiqueta, porque el criterio establecido para construirla es suficiente para obtener que la etiqueta de 7 es 4, que la de 23 es 9, etc. Sucesiones cuyos términos sean números primos hay muchas. Quizás la más relevante es la que se ha descrito.

La sucesión del ejemplo c) se denomina sucesión *constante*.

Entre las sucesiones de números naturales está la definida por $x_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sucesiones de términos de un conjunto A

Se consideran también sucesiones en las que cada *término* x_n pertenece a un conjunto A y está unívocamente determinado por n. Los *elementos* (n, x_n) pertenecen al producto $\mathbb{N} \times A$. La expresión (con letras) x_n determina unívocamente el *elemento* (n, x_n) de x, pero puede suceder que x_n y x_m sean iguales siendo $n \neq m$. Conviene insistir en que x_n y (n, x_n) son objetos de naturaleza distinta: $x_n \in A$ y $(n, x_n) \in \mathbb{N} \times A$. En una fórmula o frase que se refiera a elementos de A puede figurar x_n pero no (n, x_n).

No es preciso conocer cuál es el criterio para asignar x_n a cada n para tomar en consideración una sucesión. Se requiere únicamente pensar que x_n está determinado unívocamente por n. Como ejemplo, A puede ser el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y disponiendo de un dado se puede empezar a construir una sucesión "aleatoria" lanzando el dado sucesivas veces: x_1 es el resultado del primer lanzamiento; x_2, el del segundo, etc. Que no sea posible lanzar un dado infinitas veces no impide pensar, como hecho teórico, en una sucesión de tal naturaleza. Definiciones y teoremas sobre sucesiones se refieren muchas veces a sucesiones *arbitrarias* con términos de un conjunto A *arbitrario,* sin requerimiento de un criterio que las concrete.

Siendo A un conjunto al que pertenecen todas las fracciones que tienen numerador y denominador positivos, un ejemplo de sucesión de elementos de A es la determinada por ser x_n la fracción $1/n$.

A cualquier sucesión de elementos de A se puede asociar el conjunto X constituido por los elementos de A que son algún término de la sucesión:

$$X = \{\lambda \in A : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = \lambda.\}\,.$$

Para los ejemplos del principio se obtiene: a la sucesión del ejemplo a) se asocia el conjunto de todos los números primos; a la sucesión del ejemplo b) se asocia el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}\,.$$

En este caso los términos a_1 y a_2 son 1, pero este hecho no se reconoce en el conjunto X; a la sucesión del ejemplo c) se asocia el conjunto de un único elemento $\{12\}$; finalmente, el conjunto asociado en d) es $\{2, 5\}$. Obsérvese que, en general, el conjunto asociado no determina la sucesión: hay muchas sucesiones con el mismo conjunto asociado

Definido ya lo que se entiende por *sucesión,* hay que observar que la sucesión de los números naturales que aparece al principio del capítulo es la base para entender en términos estrictamente matemáticos qué es una sucesión. Pero llegados a este punto, puede observarse que las ideas de

"línea" prolongable sin interrupción hacia la derecha, o de "colocación" de un objeto en tal línea, constituyen solamente imágenes, no tienen un sentido matemático estricto. Son sin embargo imágenes que sirven para crear un clima que permite entender mejor el concepto matemático que viene después.

Se pueden separar las imágenes intuitivas previas del objeto estrictamente matemático que hemos denominado *sucesión de términos de un conjunto A*. La sucesión cuyos elementos son (n, x_n) es simplemente el conjunto de tales elementos, es decir,

$$\{(n, x_n) : n \in \mathbb{N},\, x_n \in A\}\,.$$

Y la exigencia que se ha puesto de tener la sucesión un único elemento (n, x_n) para cada $n \in \mathbb{N}$ se expresa diciendo que *es una aplicación de* $\mathbb{N}$ *a* A, es decir, un subconjunto S del producto $\mathbb{N} \times A$ con la exigencia de pertenecer a S un único elemento (n, x_n) para cada $n \in \mathbb{N}$. El elemento de A que con la notación típica de las aplicaciones se designa $x(n)$, se expresa mediante x_n en el caso de las sucesiones.

Las palabras *inyectiva* y *biyectiva* pueden ser calificativos para una sucesión, por su condición de ser aplicaciones.

Es inyectiva ($x_n \neq x_m$ cuando $n \neq m$) la sucesión del ejemplo *a*). No lo son las de los ejemplos *b*), *c*) y *d*).

Establecemos pues la siguiente definición.

Definición 1
Sea A un conjunto. Una sucesión de términos de A es una aplicación de $\mathbb{N}$ *a A, es decir,*

$$\{(n, x_n) : n \in \mathbb{N},\, x_n \in A\}\,,$$

y cada término x_n *está unívocamente determinado por n. Cada par ordenado* (n, x_n) *es un elemento de la sucesión, a la cual se asocia el conjunto X de sus términos:*

$$X = \{\lambda \in A : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = \lambda\}\,.$$

Para las sucesiones se utilizan usualmente las notaciones más abreviadas $\{(n, x_n)\}$ y $\{x_n\}$, evitando confundir $\{x_n\}$ con el conjunto X. Cuando se consideran conjuntos de sucesiones se requiere explicitar cuál es el conjunto A al que pertenecen los términos.

Si en A están definidas la suma $\lambda + \mu$ y el producto $\lambda\mu$ de los elementos λ y μ de A, perteneciendo también a A tales suma y producto, entonces para las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de términos de A se definen su suma y su producto mediante $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$.

Se observa que una sucesión biyectiva de términos de A establece que el conjunto X asociado es numerable.

Lo que se puede hacer, y conviene hacerlo también, es interpretar la sucesión como el proceso de recorrer x_n en el sentido creciente de n : x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... Pero esto no es más que una representación gráfica. Sin embargo, este tipo de consideraciones intuitivas son muy útiles para poder hacer después la interpretación adecuada de objetos y relaciones de la matemática. La expresión 3, 5, 18, 43, 1, 5, 8, 43, 101, ... para poco sirve porque solo se está diciendo qué número es x_n para $n < 10$; de los demás nada se sabe. Tal expresión no determina una sucesión.

La posible utilidad de la representación "en fila" de una sucesión estriba en ayudar a entenderla de una forma dinámica: si los números reales se interpretan como los puntos de una recta,

entonces una sucesión de números reales se puede considerar como el movimiento a saltos de un punto P en la recta: P está inicialmente en determinada posición y se cuenta por segundos. En el segundo 1 P está en la posición x_1; en el segundo 2 ha pasado a la posición x_2 (que puede ser la misma o distinta), etc.

Finalmente, una interpretación de las sucesiones de elementos de un conjunto A puede basarse en los productos $A \times A$, $A \times A \times A$, ... designados también A^2, A^3, ... A^n es el producto de n copias de A y sus elementos se designan $(a_1, a_2, ..., a_n)$. La consideración del conjunto A^n cuando n va creciendo sin interrupción (n tiende a infinito, como suele decirse, y se expresa $n \to \infty$) sugiere los objetos designados $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, donde los puntos suspensivos finales indican que el proceso debe continuar sin interrupción después de cada n. Pero esta interpretación no evita las precisiones que se han hecho antes para definir el concepto de sucesión.

Subsucesiones

La aplicación identidad de un conjunto A es la que cada elemento de A tiene como imagen él mismo. Si se designa I la aplicación identidad de $\mathbb{N}$, entonces $I(n) = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. I es también la sucesión de los números naturales: $I_n = n$. Ahora se van a considerar *subsucesiones* de I.

Volviendo a la sucesión de los números primos en orden creciente, se obtiene

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ p_6 = 13,\ ...$$

lo cual puede expresarse también

$$p_1 = I_2,\ p_2 = I_3,\ p_3 = I_5,\ p_4 = I_7,\ p_5 = I_{11},\ p_6 = I_{13},\ ...$$

La observación que interesa ahora es que cada p_n es algún único I_m, y si el m que corresponde a n en este sentido se designa $j(n)$, resulta

$$j(1) < j(2) < j(3) < j(4) < j(5) < j(6) < \ ...$$

es decir, $\{j(n)\}$ es una sucesión de números naturales en orden creciente.

Una situación análoga se presenta si en la sucesión de Fibonacci se suprime a_1. En términos estrictos esto supone considerar otra sucesión para la cual

$$z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3,\ z_4 = 5,\ z_5 = 8,\ z_6 = 13,\ ...$$

o bien,

$$z_1 = I_1,\ z_2 = I_2,\ z_3 = I_3,\ z_4 = I_5,\ z_5 = I_8,\ z_6 = I_{13},\ ...$$

También sucede que cada z_n es algún único I_m y, si el m que corresponde a n se designa $j(n)$, entonces $\{j(n)\}$ es una sucesión de números naturales en orden creciente. Ahora no suele usarse la notación j_n si conviene evitar poner subíndice a otro subíndice. Las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{z_n\}$ son subsucesiones de la sucesión I.

Definición 2

Fijadas una sucesión $\{x_n\}$ y cualquier sucesión $\{j(n)\}$ de números naturales en orden creciente, la sucesión $\{y_n\}$ tal que y_n es $x_{j(n)}$ se denomina subsucesión de $\{x_n\}$.

Dicho de una forma quizás más expresiva: una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ se construye suprimiendo, o sin suprimir, elementos (n, x_n) de tal manera que queden infinitos sin suprimir. Los elementos no suprimidos son $(j(n), x_{j(n)})$ siendo $\{j(n)\}$ una sucesión de números naturales en orden creciente. Finalmente, cada elemento $(j(n), x_{j(n)})$ se sustituye por (n, y_n) siendo $y_n = x_{j(n)}$.

Al suprimir solamente $(1, x_1)$ el elemento $(2, x_2)$ se sustituye por $(1, y_1)$ siendo $y_1 = x_2$. La sucesión $\{2n\}$ es la sucesión de números pares en orden creciente. Es una subsucesión de I.

Series

Cada sucesión $\{x_n\}$ de números se puede interpretar como el proceso de pasar de x_1 a x_2, de x_2 a x_3, ..., de x_{n-1} a x_n, ... A la evolución de x_{n-1} a x_n se puede asociar la diferencia $x_n - x_{n-1}$ y se observa que

$$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1),\ x_3 = x_1 + (x_2 - x_1),\ x_4 = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3),\ ...$$

Es decir, los términos de una sucesión se pueden expresar mediante sumas de diferencias entre términos consecutivos.

Ejemplo 2
La sucesión $\{x_n\}$ se define así:

$$x_1 = 1/2 \ \text{ y } x_n = 1/(n+1) + 1/(n+2) + \cdots + 1/(n+n),\ n > 1.$$

Para $n > 1$ se observa que $x_n - x_{n-1}$ es el número positivo $1/(2n-1) - 1/(2n)$, por lo cual $x_{n-1} < x_n$. De acuerdo con la indicación previa al ejemplo, y al ser $1/2 = 1 - 1/2$, se obtiene para $n > 1$

$$x_n = [1 - 1/2] + [1/3 - 1/4] + [1/5 - 1/6] + \cdots + [1/(2n-1) - 1/(2n)]\,.$$

Los corchetes [ ] se pueden suprimir y

$$x_n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \cdots + 1/(2n-1) - 1/(2n).$$

Esta expresión permite situar la posición de x_n observando la evolución de los números

$$1 - 1/2,\ \ 1 - 1/2 + 1/3,\ ...,\ 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots + 1/(2n-1) - 1/(2n).$$

Este ejemplo muestra las ventajas que puede tener interpretar los términos de una sucesión de números mediante sumas de diferencias entre términos consecutivos, y puede servir como motivación del concepto de serie.

Definición 3
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos de un conjunto A dotado de una ley de composición interna que asocia a elementos α y β de A la suma $\alpha + \beta$ que pertenece también a A.

La sucesión $\{s_n\}$ tal que

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ ...,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

es la serie asociada a la sucesión $\{a_n\}$. En este contexto cada s_n se denomina suma parcial de la serie y es a cada término de $\{a_n\}$ a quien se denomina término de la serie.

El ejemplo **2** muestra que cualquier sucesión de números puede interpretarse como una serie. Como se ha comprobado, la sucesión $\{x_n\}$ es la serie asociada a la sucesión $\{a_n\}$ tal que

$$a_1 = 1/2,\ a_2 = 1/3 - 1/4,\ ...,\ a_n = 1/(2n-1) - 1/(2n).$$

Ejemplo 3
Si a_n es $1/n$, la serie tal que $s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ se llama serie *armónica*.

Ejemplo 4
Sean a y x números distintos de 0. La serie de sumas parciales

$$s_n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n$$

se denomina serie *geométrica* de razón x. El caso $x = 1$ es trivial. Para $x \neq 1$ puede expresarse s_n como función de a y de x. Basta observar que $s_n - s_n x = a(1 - x^{n+1})$, por lo cual

$$s_n = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En general, cualquier sucesión $\{x_n\}$ de números puede tratarse como una serie. Como se ha observado en el ejemplo **2** hay que considerar la sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_1 = x_1$ y $a_n = x_n - x_{n-1}$ para $n > 1$. La serie asociada a la sucesión $\{a_n\}$ es

$$s_1 = x_1,\ s_2 = x_1 + (x_2 - x_1) = x_2,\quad s_3 = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3,\ ...$$

Es decir, $s_n = x_n$ para cada n.

1.5. Números racionales

El conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros

Fijados dos números naturales a y b, la existencia de un número natural n que verifique $a = b + n$ es lo que significa la relación $a > b$. Entonces se expresa que n es la diferencia $a - b$. Dos diferencias $a - b$ y $a' - b'$ pueden ser el mismo n, como $3 - 1$ y $6 - 4$, que son 2. En tal situación $a = b + n$, $a' = b' + n$, y $a + b' + n = a' + b + n$. Al cancelar n resulta $a + b' = b + a'$, lo cual caracteriza la igualdad de $a - b$ y $a' - b'$.

Siendo $a > b$ y $c > d$, la suma y el producto de las diferencias $a - b$ y $c - d$ son diferencias expresables mediante a, b, c y d. En efecto, si es $a = b + n$ y $c = d + m$, resulta

$$a + c = b + d + n + m \quad \text{y} \quad ac = ad + bm + nm.$$

De aquí se obtiene que $n + m$ es la diferencia $(a + c) - (b + d)$. En cuanto a nm, al sumar bd a ambos miembros de la segunda igualdad se obtiene $ac = ad + bc + nm$, por lo que nm es la diferencia $(ac + bd) - (ad + bc)$.

Diferencias $a - b$ carecen en principio de significado para $a = b$ y para $b > a$. Pero en todo caso, el objeto (a, b) sí que lo tiene como elemento de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Los números enteros surgen al definir la suma de cualesquiera (a, b) y (c, d) como en el caso de ser $a > b$ y $c > d$, es decir,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{y} \quad (a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc).$$

Ejemplos: $(3,2)+(1,5)=(4,7)$, $(1,1)(1,3)=(4,4)$, $(1,3)(1,2)=(7,5)$.

Lo mismo que en el caso $a>b$ y $a'>b'$ la igualdad de las diferencias $a-b$ y $a'-b'$ se caracteriza mediante $a+b'=b+a'$, se considera en general que esta última igualdad expresa la equivalencia de (a,b) y (a',b').

Estas son las ideas que motivan la construcción del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros: $\mathbb{Z}$ es el conjunto cociente de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ respecto de la relación de equivalencia entre (a,b) y (a',b') definida por $a+b'=b+a'$. Cada (a,b) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ determina un número entero del cual (a,b) es un representante. La suma y el producto de dos números enteros se definen a través de las definiciones anteriores establecidas para sus representantes, lo cual requiere comprobar que los resultados en $\mathbb{Z}$ no se alteran con el cambio de representante.

Siendo $a>b$ y $a=b+n$, (a,b) representa al número entero positivo $+n$ y (b,a) representa al entero negativo $-n$. (a,a) representa a 0 (el cero). La aparición del número 0 se considera como uno de los logros más importantes de la matemática. El 0 se utiliza como exponente de cualquier entero x distinto de 0 interpretando que x^0 es 1. Las demás potencias x^n de exponente natural n son $x^1=x$ y $x^{n+1}=x^n x$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

De las definiciones establecidas se obtiene

$$(+n)+(+m)=+(n+m),\quad (+n)(+m)=+(nm),\quad (+n)(-m)=-(nm).$$

Estas igualdades expresan que la suma y el producto de números enteros se reducen a operaciones con números naturales. Asimismo, las dos primeras permiten hacer una identificación entre n y $+n$, lo cual se puede interpretar como que $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$. Tiene interés la consideración del conjunto de los enteros no negativos, que puede interpretarse como el conjunto obtenido al añadir a $\mathbb{N}$ el 0.

La suma $(+n)+(-n)$ es 0, por lo cual $+n$ y $-n$ son cada uno el opuesto del otro, 0 es opuesto de sí mismo. En $\mathbb{Z}$ está definida en todos los casos la diferencia $r-s$, que es la suma de r y el opuesto de s. La desigualdad $r>s$ se define por ser positiva la diferencia $r-s$. La definición de $+n>+m$ es equivalente a la de $n>m$. El producto con un factor 0 también es 0. El producto de dos enteros distintos de 0 es distinto de 0.

Números combinatorios. Fórmula de Newton

Al conjunto vacío se le atribuye como cardinal el número 0. Sea $n=0$ o cualquier número natural, sea $r=0,1,2,...,n$ y sea A un conjunto de cardinal n. Se considera también el conjunto X cuyos elementos son los subconjuntos de A con cardinal r. El número combinatorio $\binom{n}{r}$ se define como el cardinal de X. En otros términos: $\binom{n}{r}$ expresa cuántos subconjuntos de r elementos tiene un conjunto de n elementos. Es obvio entonces que $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.

Los números combinatorios se pueden exponer mediante el triángulo de Tartaglia, que comienza así

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Hay dos propiedades interesantes:

1)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} \ y \ \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \ si \ \ 1 \leq r < n.$$

La primera igualdad es obvia, porque ambos números son 1. En cuanto a la segunda, basta observar la correspondencia entre los subconjuntos de A de r elementos y sus complementarios en A, que son de $n - r$ elementos.

2)

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r} \ \ si \ \ 1 \leq r \leq n.$$

Para $r = 1$ la igualdad es obvia. En el caso $r > 1$ se consideran un conjunto A de n elementos y el conjunto B que se obtiene añadiendo a A un nuevo elemento x. Los subconjuntos de B de r elementos se pueden clasificar en dos bloques, según que x pertenezca o no a ellos. Si a los del primer bloque les quitamos el elemento x, resultan los subconjuntos de A de $r - 1$ elementos. Los del segundo bloque son los subconjuntos de A de r elementos.

Mirando de nuevo al triángulo de Tartaglia, se observa que cada fila empieza y termina en 1, y que cada uno de los demás es la suma de los dos que tiene inmediatamente a su izquierda y a su derecha de la fila anterior, debido a la segunda propiedad de los números combinatorios antes probada. Por estas razones las cinco primeras filas del triángulo se pueden reescribir así:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Las potencias de la suma $a + b$ se pueden expresar en términos de potencias de a y de b y productos de estas, con unos coeficientes que son precisamente las filas del triángulo de Tartaglia. Ello es obvio si el exponente es 1. Si el exponente es 2 o es 3 se obtiene

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{y} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

haciendo uso de las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. La fórmula de Newton extiende este resultado para un número natural arbitrario n.

Teorema 1 (fórmula de Newton)
Para cada número natural n se verifica

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Demostración
Se observa que todos los sumandos tienen la estructura común $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$, siendo r sucesivamente $0, 1, 2, 3, ..., n$. Esto permite expresar más brevemente la fórmula de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

Mediante el axioma de la inducción se va a probar que esta fórmula es válida para cualquier número natural. Es obvio para $n = 1$. Solo falta probar que, si es cierta para n arbitrario, también lo es para $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{(n+1)-r} b^r.$$

Se verifica $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$, es decir,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{(n+1)-r} b^r + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^{r+1}.$$

El problema consiste ahora en poner juntos los sumandos en los que aparece el producto de las mismas potencias de a y b. Para ello separamos el primer sumando de la primera suma y el último de la segunda

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} a^{(n+1)-r} b^r + \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} a^{n-r} b^{r+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}.$$

En la segunda Σ se puede sustituir $r+1$ por r, y r por $r-1$, haciendo que el nuevo r vaya desde 1 hasta n, es decir,

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r-1} a^{(n+1)-r} b^r.$$

Resulta entonces

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right] a^{(n+1)-r} b^r + \binom{n}{n} b^{n+1}.$$

Las propiedades estudiadas de los números combinatorios permiten reescribir la fórmula anterior de la forma que se pretendía. ■

La fórmula de Newton es válida cuando a y b son números de cualquier tipo (naturales, enteros, racionales, reales, o complejos) porque la prueba del teorema anterior está basada en las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de sumas y productos.

El caso particular $a = b = 1$ de la fórmula de Newton expresa

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n},$$

es decir, 2^n es el número de subconjuntos de un conjunto de cardinal n.

Para $r = 0, 1, 2, \ldots$ se define $r!$ (factorial de r) mediante $0! = 1! = 1$ y $r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r$ para $r > 1$. Cuando n y r son números naturales el número combinatorio $\binom{n}{r}$ verifica la relación

$$r! \binom{n}{r} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)],$$

lo cual se prueba mediante recursos elementales de combinatoria (permutaciones y variaciones con repetición). Explícitamente: fijados A de cardinal n y un subconjunto X con cardinal r, los elementos de X se pueden ordenar de $r!$ formas distintas (permutaciones). Al obtener todas las permutaciones de cada uno de los subconjuntos de A que tienen cardinal r resultan las variaciones con repetición de r elementos de A.

Siendo x un número positivo, son casos particulares de la fórmula de Newton

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \cdots + \binom{n}{n} x^n,$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + \binom{n}{2} x^2 - \binom{n}{3} x^3 + \cdots + (-1)^n x^n,$$

es decir,

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r, \quad (1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^r.$$

Representación de los números naturales

La división euclídea es el conocido algoritmo

$$dividendo \ = divisor \times cociente \ + \ resto, \quad resto \ < \ divisor.$$

Fijados enteros positivos a (dividendo) y b (divisor), existen y están determinados unívocamente por a y b dos enteros no negativos c (cociente) y r (resto) que verifican

$$a = bc + r, \quad r < b.$$

Por haberse identificado el entero positivo $+n$ con el natural n podemos interpretar que a y b son naturales, y también r y c si son distintos de 0. Cuando es $r = 0$ c se denomina *cociente* de a por b.

La división euclídea permite expresar cualquier número natural utilizando los elementos de un conjunto finito C cuyo cardinal b sea mayor o igual que 2. Este mecanismo de representación suele denominarse sistema de numeración de *base* b. El utilizado usualmente es el obtenido cuando b es *diez*, en cuyo caso

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Los elementos de C tienen una doble interpretación: son el entero 0 y los números naturales menores que diez; también son signos (*cifras*) que representan a tales números mediante un único signo. Cada número natural n mayor o igual que *diez* se representa utilizando al menos dos veces una o varias de estas cifras.

El conjunto C de las cifras es $\{0, 1, 2, 3\}$ cuando b es *cuatro*. Para el caso $b = doce$ el conjunto de las cifras es

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\},$$

y α es la cifra que representa a *diez,* y β es la que representa a *once*.

Para el sistema *binario,* o de base $b = dos,$ las únicas cifras son 0 y 1.

Para explicar en qué consiste un sistema de numeración puede utilizarse cualquier base, y consideraremos el sistema *binario* o de base *dos.* Las únicas cifras son 0 y 1; representan respectivamente a los números 0 y 1. Las representaciones de los números naturales mayores que 1 requieren la utilización de dos, tres o más cifras, con las necesarias repeticiones de estas.

Ejemplo 1

Sea a el número *once.* (Con palabras nos referimos a números, no a posibles representaciones de ellos. En lo que sigue, b siempre es *dos*). En primer lugar se hace la división euclídea de dividendo *once* y divisor b; se obtiene cociente $c_0 = cinco$ y resto $r_0 = 1$. En segundo lugar, se divide *cinco* por b para obtener $c_1 = dos$ y $r_1 = 1$. Finalmente, se divide *dos* por b y se obtiene $c_2 = 1$ y $r_2 = 0$. Los restos solo pueden ser 0 o 1, los sucesivos cocientes van disminuyendo y todos son distintos de 0; se termina al obtener un cociente menor que *dos.*

Las sucesivas divisiones efectuadas se expresan

$$a = c_0 b + r_0, \ c_0 = c_1 b + r_1, \ c_1 = c_2 b + r_2$$

y resulta

$$a = \{c_1 b + r_1\} b + r_0 = \{[c_2 b + r_2] b + r_1\} b + r_0$$