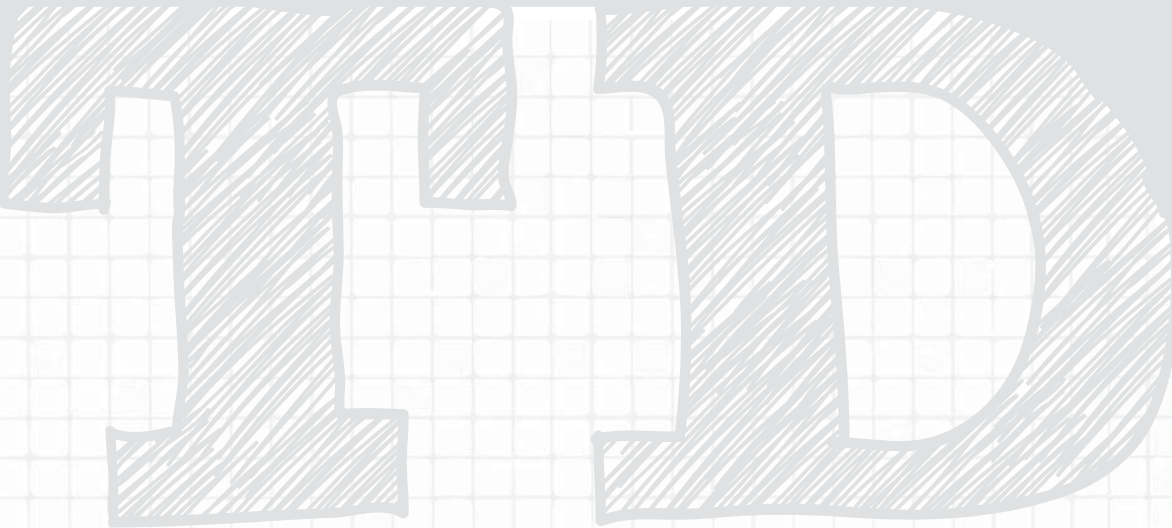




JEAN-PIERRE LECOUTRE

NAÏLA HAHEK

PHILIPPE PILIBOSSIAN

ANALYSE

 **QCM et exercices corrigés**

 **10 sujets d'examen corrigés**

 **Rappels de cours**

6^e ÉDITION

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076778-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.



Avant-propos	V
TD ① Fonction numérique d'une variable réelle	1
L'essentiel	1
QCM	5
Réflexion	5
Entraînement	6
Solutions	11
TD ② Dérivées et différentielles	22
L'essentiel	22
QCM	25
Réflexion	25
Entraînement	26
Solutions	31
TD ③ Formule de Taylor et applications	47
L'essentiel	47
QCM	52
Réflexion	52
Entraînement	53
Solutions	58
TD ④ Fonctions puissance, logarithme et exponentielle	78
L'essentiel	78
QCM	81
Réflexion	81
Entraînement	82
Solutions	88

TD ⑤	Fonction de plusieurs variables et optimisation	106
	L'essentiel	106
	QCM	114
	Réflexion	114
	Entraînement	115
	Solutions	121
TD ⑥	Calcul intégral	149
	L'essentiel	149
	QCM	156
	Réflexion	157
	Entraînement	158
	Solutions	165
TD ⑦	Les nombres complexes	192
	L'essentiel	192
	QCM	195
	Réflexion	195
	Entraînement	195
	Solutions	200
TD ⑧	Suites et équations de récurrence	213
	L'essentiel	213
	QCM	220
	Réflexion	221
	Entraînement	221
	Solutions	230
TD ⑨	Sujets d'examen corrigés	265
	Sujets d'examen	265
	Correction	276
	Index	296

Avant-propos

Pour se familiariser avec l'usage de l'outil mathématique, indispensable à toute formalisation en économie, nous proposons une série d'exercices, regroupés en deux volumes : *Analyse* et *Algèbre*. Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de licence d'économie-gestion ou d'AES.

Les huit premiers chapitres présentent la même structure. Au début, les principales notions de cours et les résultats importants sont rappelés de façon succincte dans « L'essentiel » du cours. Un bref texte introductif indique les points essentiels qui vont être abordés et présentés dans le chapitre. Il ne s'agit pas d'un résumé de cours, mais seulement d'un avant-propos où on essaie d'expliquer, dans un langage peu formalisé, le fondement et l'utilité des notions définies ensuite de façon plus formelle.

Un certain nombre d'affirmations constituent le paragraphe « Q.C.M ». La réponse en vrai-faux permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien compris les principaux points de cours. Il doit exercer sa vigilance face à des affirmations, parfois simples, mais qui peuvent contenir un piège.

Les questions de « Réflexion » qui sont proposées ensuite ont essentiellement pour but de mettre l'accent sur certaines notions un peu délicates du cours. Il faut être attentif aux commentaires qui figurent dans la solution de l'exercice, en fin de chapitre.

Les exercices d'« Entraînement » permettent enfin à l'étudiant de tester sa capacité à passer de la théorie à la pratique. Ils suivent l'ordre de progression du cours et sont précédés d'un titre indiquant la principale notion à laquelle ils se rapportent. Une rubrique « Analyse de l'énoncé et conseils » précise la démarche à suivre et les résultats de cours à utiliser pour résoudre l'exercice proposé.

Les solutions très détaillées sont regroupées en fin de chapitre, très souvent assorties de commentaires. Certaines solutions se concluent par un énoncé d'exercice identique (« Vous avez compris ? ») et la seule réponse figure aussitôt après.

En fin d'ouvrage, les textes récents des examens de 1^{re} année de la licence d'économie et gestion de l'université Paris II Panthéon-Assas permettent de retrouver les principaux points abordés dans les chapitres précédents. L'étudiant peut ainsi évaluer le niveau de difficulté de ce qui peut être demandé à une épreuve d'examen. Les corrigés sont regroupés après les énoncés.

TD¹ Fonction numérique d'une variable réelle



On trouvera dans ce chapitre la définition et les principales caractérisations d'une **fonction numérique d'une variable réelle**. L'étude d'une fonction commence par la détermination de son **ensemble de définition**, formé par un ou plusieurs **intervalles**. On cherche ensuite à réduire l'ensemble d'étude en examinant si la fonction est **périodique**, **paire** ou **impaire**. On introduit alors la notion très importante de **continuité**. La recherche de points de discontinuité éventuels consiste à examiner la limite de la fonction en certains points particuliers. Dans de très nombreux cas, c'est l'utilisation des **équivalents** qui permet de calculer simplement cette limite. On complète l'étude par la mise en évidence des intervalles où cette fonction est **monotone**, **croissante** ou **décroissante** et par la recherche des limites aux bornes des intervalles qui constituent l'ensemble de définition ou de monotonie. Parmi les résultats importants de ce chapitre, on doit noter que l'image d'un intervalle fermé, par une fonction continue, est un intervalle fermé. De plus, toutes les valeurs de cet intervalle image sont atteintes par cette fonction. Dans le cas où elle est strictement monotone sur cet intervalle, elle admet alors une **fonction réciproque**. Notons que seules les bijections admettent des applications réciproques.

1 ● Définitions et qualifications d'une fonction numérique

Définition. On appelle *fonction numérique d'une variable réelle* toute application f d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La notation usuelle est : $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

et, pour tout réel x de E , on écrit : $f : x \mapsto f(x)$

Fonction paire ou impaire. Une fonction f définie sur E est dite :

- *paire* si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$;
- *impaire* si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Fonction périodique. Une fonction f définie sur E est dite *périodique* s'il existe un nombre réel non nul T tel que, pour tout $x \in E$:

$$x + T \in E \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x)$$

Ce nombre T est la *période* de f s'il est le plus petit réel positif qui satisfait cette condition.

Fonction bornée. Une fonction f définie sur E est dite *bornée* s'il existe un nombre positif M tel que, pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \leq M$.

Fonction monotone. Une fonction f définie sur E est dite :

- *croissante* sur E si, pour tous $x, x' \in E$ tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f(x')$;
- *décroissante* sur E si, pour tous $x, x' \in E$ tels que $x < x'$, on a $f(x) \geq f(x')$;
- *monotone* sur E si elle est croissante ou décroissante sur E .

2 ● Composition d'applications

Si f est une fonction définie sur E et g une fonction définie sur F , avec $F \supset f(E)$, on peut définir la *fonction composée* de f par g , notée $g \circ f$, et qui associe à tout $x \in E$ le nombre réel $g[f(x)]$.

Il faut souligner que la composition des applications n'est pas une opération commutative, c'est-à-dire qu'en général $g \circ f$ est différente de $f \circ g$.

3 ● Continuité

Définition. Une fonction numérique f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est *continue* en un point x_0 de I si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe avec } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est *continue à droite* (resp. *à gauche*) si :

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\text{resp. } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Une fonction est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ si elle est continue en tout point de l'ouvert $]a, b[$ et si elle est continue à gauche en a et à droite en b .

Théorème. Si une fonction f est continue sur un intervalle I , alors l'ensemble image $f(I)$ est lui aussi un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ avec :

$$\alpha = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

La fonction f est bornée et elle atteint ses bornes, ainsi que toutes les valeurs intermédiaires comprises entre ses bornes.

Théorème. Si f est une fonction continue en un point a et g une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a .

4 ● Application réciproque

Définition. Une application f de E dans F admet une *application réciproque*, notée f^{-1} , si, et seulement si, f est une bijection de E dans F . Pour tout y fixé dans F , l'équation $f(x) = y$ admet alors une solution unique x dans E , notée $x = f^{-1}(y)$.

Théorème. Une fonction continue sur un intervalle I admet une application réciproque sur I si, et seulement si, elle est strictement monotone sur I .

5 ● Formes indéterminées algébriques

Il existe quatre *formes indéterminées algébriques*, c'est-à-dire d'expressions dont la limite ne peut pas être déterminée immédiatement :

- forme $\frac{0}{0}$: toute expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow 0$;
- forme $\frac{\infty}{\infty}$: toute expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $|f(x)| \rightarrow +\infty$ et $|g(x)| \rightarrow +\infty$;
- forme $0 \times \infty$: toute expression $f(x)g(x)$ avec $f(x) \rightarrow 0$ et $|g(x)| \rightarrow +\infty$;
- forme $\infty - \infty$: toute expression $f(x) - g(x)$ avec $f(x) \rightarrow +\infty$ et $g(x) \rightarrow +\infty$.

6 ● Fonctions équivalentes

Deux fonctions numériques f et g définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont dites *équivalentes* quand x tend vers a , avec $a \in I$, s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage $V(a)$ de a telle que :

$$f(x) = g(x)[1 + \varepsilon(x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Si $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in V(a) \cap I$, on écrit plus simplement :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

C'est une relation d'équivalence, notée $f \sim g$. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, mais on n'a pas en général $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Dans le cas d'un polynôme, il est équivalent à son monôme de plus bas degré au voisinage de zéro et à son monôme de plus haut degré au voisinage de l'infini.

Une fraction rationnelle est équivalente au voisinage de zéro au rapport des monômes de plus bas degré et, au voisinage de l'infini, au rapport des monômes de plus haut degré.



	Vrai	Faux
1. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.	☐	☐
2. Le produit de deux fonctions monotones sur un même ensemble E est une fonction monotone sur E .	☐	☐
3. La composée $g \circ f$ de deux fonctions f et g décroissantes sur leur ensemble de définition est croissante.	☐	☐
4. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle, les fonctions $f + g$ et fg sont continues sur le même intervalle.	☐	☐
5. La réciproque d'une application continue et strictement croissante sur un intervalle est aussi continue et strictement croissante.	☐	☐
6. Si la fonction f admet une limite finie l , non nulle, quand x tend vers a , alors $f(x) \sim l$.	☐	☐
7. Si on a les équivalences $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors on a aussi l'équivalence $f_1 \circ f_2 \sim g_1 \circ g_2$.	☐	☐
8. Si f et g sont deux fonctions équivalentes quand la variable x tend vers $+\infty$, alors $f(x) - g(x)$ tend vers 0.	☐	☐

EXERCICES



9. On considère les applications $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$. Déterminer les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$. Les applications f et g sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

10. Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = e^{mx} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{mx^3 + (m-1)x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} + x + \frac{2}{x}$$

où m est un paramètre réel. Indiquer pour quelle(s) valeur(s) de m l'expression $b(x) = g(x) - f(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

11. À partir de l'expression $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$, définir une fonction f qui soit continue sur tout $\mathbb{R}$.

12. La fonction f est définie à partir de :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ a - \frac{b}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

Déterminer les paramètres réels a et b pour que f soit continue partout.



Intervalles de $\mathbb{R}$

13. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x :

$$5x + 2 \geq -3 \quad x^2 + 1 \leq 1 \quad |x - 1| \leq 4 \quad 2\sqrt{2x - x^2} < 1 \quad |x + |x|| \geq 2$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On remplace la condition imposée par une condition équivalente qui ne fait plus intervenir de valeur absolue ou de radical.

14. En utilisant des valeurs absolues, exprimer sous forme de conditions sur x les relations d'appartenance suivantes :

$$x \in [-1, 5] \quad x \in]1, 3[\quad x \in]-4, -2[$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour que x appartienne à un intervalle, il faut que la distance de ce point au milieu de l'intervalle soit inférieure à sa demi-longueur.

15. À partir des intervalles $A =]-\infty, -1]$, $B = [-1, 3]$, $C =]-1, 5[$ et $D = [-2, +\infty[$, déterminer les ensembles A^c , $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $A \cup D$, $B \cup C$, $(B \cap C) \cup (B \cap D)$, $A^c \cup C^c$ et $A^c \cap D^c$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'être attentif à la forme des intervalles où les extrémités sont comprises ou non.

16. Pour $n > 0$, on définit les intervalles :

$$A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad B_n = \left[0, \frac{1}{n}\right[\quad \text{et} \quad C_n = \left[-\frac{1}{n}, 0\right[.$$

Déterminer les ensembles :

$$E_p = \bigcap_{k=1}^p A_k, \quad F_p = \bigcup_{k=1}^p A_k, \quad G_p = \bigcap_{k=1}^p B_k \quad \text{et} \quad H_p = \bigcap_{k=1}^p C_k.$$

Étudier les limites de ces ensembles quand p tend vers l'infini.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut examiner l'inclusion de deux ensembles d'indices successifs k et $k+1$ et en tirer une conclusion quant à leur union ou leur intersection.

Ensemble de définition

17. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D que l'on demande de déterminer à chaque fois :

a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$;

b) $\sqrt{x^3 - 1}$;

c) $\sqrt[3]{1 - x^2}$;

d) $\sqrt{x^2 + x - 2}$;

e) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;

f) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$;

g) $\sqrt{-x} + (2+x)^{-1/2}$;

h) $\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$;

i) $\ln \frac{2+x}{2-x}$;

j) $\ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'ensemble de définition est obtenu à partir de celui des fonctions usuelles : dénominateur non nul pour une fraction, argument positif pour une racine carrée ou un logarithme...

Parité, périodicité, graphe

18. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D où l'on demande d'examiner si elles sont paires ou impaires :

a) $\sqrt{1 - |x|}$;

b) $\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;

c) $|x^2 - x|$;

d) $|x+1| - |x-1|$;

e) $\frac{x-1/x}{x+1/x}$;

f) $\ln \frac{1+x}{1-x}$;

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de remplacer x par $-x$ dans l'expression de $f(x)$ et de vérifier si on retrouve comme nouvelle expression $f(x)$ ou $-f(x)$.

19. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D où l'on demande d'examiner si elles sont périodiques, paires ou impaires, puis de les représenter graphiquement :

a) $E(x)$ qui représente la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x ;

b) $2x - E(x)$, $x \in [-2, 2]$.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'expression de $E(x+1)$ à l'aide de $E(x)$ peut permettre de déceler une périodicité éventuelle des fonctions précédentes et de simplifier la représentation graphique.

Composition d'applications

20. Déterminer l'application composée $f \circ g$, avec :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. L'application $f \circ g$ est définie par $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, donc il faut que x appartienne au domaine de définition de g et que $g(x)$ appartienne à celui de f . Ayant ainsi déterminé les valeurs de x pour lesquelles $f \circ g$ existe, on remplace x par $g(x)$ dans l'expression de $f(x)$ pour obtenir celle de $(f \circ g)(x)$.

Application réciproque

21. Déterminer la réciproque des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $2x+1$;

b) $\sqrt[3]{1-x^3}$;

c) $\ln \frac{x-1}{x+1}$;

d) $f(x) = x$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x^2$ pour $x > 0$.

Analyse de l'énoncé et conseils. La résolution de l'équation $y = f(x)$, où x est l'inconnue, conduit à une solution unique $x = g(y)$ si la fonction f est inversible, et la fonction g obtenue est alors la réciproque f^{-1} .

Calcul de limites

22. Déterminer les limites des expressions $f(x)$ suivantes, sans utiliser de fonctions équivalentes :

a) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 2}, x \rightarrow +\infty ;$

b) $\frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 2}, x \rightarrow 1 ;$

c) $x + 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, x \rightarrow 0 ;$

d) $\frac{x\sqrt{x} + x}{x^2 + 4x + 1}, x \rightarrow +\infty ;$

e) $x - \sqrt{x^2 - x}, x \rightarrow +\infty ;$

f) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}, x \rightarrow +\infty ;$

g) $\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}, x \rightarrow 1 ;$

h) $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, x \rightarrow 0 ;$

i) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, x \rightarrow a, \text{ avec } a > 0 ;$

j) $\sqrt{x(x+a)} - x, x \rightarrow +\infty, \text{ avec } a \text{ réel quelconque ;}$

Analyse de l'énoncé et conseils. Dans cet exercice, on demande de ne pas utiliser les fonctions équivalentes pour déterminer les limites, bien que cette méthode soit en général plus rapide. Dans le cas d'une fraction rationnelle, si le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément, c'est qu'il y a une simplification possible après factorisation. Quand l'expression est un rapport de fonctions puissances, la limite pour x tendant vers l'infini s'obtient en divisant numérateur et dénominateur par le terme d'exposant le plus élevé. La présence de radicaux conduit presque toujours à utiliser les identités remarquables permettant de faire disparaître la forme indéterminée initiale.

Fonctions équivalentes

23. Pour chacune des expressions $f(x)$ suivantes, déterminer une fonction équivalente, puis la limite.

a) $\frac{(x^2 + 3x^3)(2x + 1)}{2x + x^4}, x \rightarrow +\infty ;$ b) $\frac{(2x^2 + x^4)(2 + x)}{x + 2x^3}, x \rightarrow 0 ;$

c) $\sqrt{x^3 + x + 2} - x\sqrt{x + \frac{1}{x}}, x \rightarrow +\infty ;$ d) $\frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x} - 2}, x \rightarrow 2$