

Conçu par un collectif de 44 professeurs en classes préparatoires  
Sous la direction de Colas Bardavid et Catherine Lavainne

# Cahier d'entraînement en physique-chimie

Classes prépas PSI/PSI\*

Auto-entraînement

l'intégrale

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

© Dunod, 2025  
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)  
ISBN 978-2-10-088487-2

# Sommaire

|                                                     |   |
|-----------------------------------------------------|---|
| <i>Mode d'emploi du cahier d'entraînement</i> ..... | v |
|-----------------------------------------------------|---|

---

## Généralités

|                                                               |   |
|---------------------------------------------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> Fiche 1. Opérateurs vectoriels ..... | 3 |
|---------------------------------------------------------------|---|

---

## Électromagnétisme en régime permanent

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 2. Électrostatique ..... | 11 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 3. Magnétostatique ..... | 24 |

---

## Électromagnétisme en régime variable

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 4. Équations de Maxwell .....        | 35 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 5. Induction .....                   | 47 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 6. Ferromagnétisme .....             | 59 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 7. Ondes électromagnétiques I .....  | 65 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 8. Ondes électromagnétiques II ..... | 75 |

---

## Thermodynamique

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 9. Outils mathématiques pour la diffusion ..... | 83  |
| <input type="checkbox"/> Fiche 10. Diffusion particulière .....                | 87  |
| <input type="checkbox"/> Fiche 11. Diffusion thermique .....                   | 96  |
| <input type="checkbox"/> Fiche 12. Transferts thermiques .....                 | 107 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 13. Tables et diagrammes thermodynamiques ..... | 115 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 14. Thermodynamique industrielle .....          | 124 |

---

## Électronique

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> Fiche 15. Signaux .....                    | 130 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 16. ALI .....                        | 142 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 17. ALI saturé .....                 | 151 |
| <input type="checkbox"/> Fiche 18. Oscillateurs électroniques ..... | 161 |

---

## Conversion de puissance

|                          |                                                      |     |
|--------------------------|------------------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 19. Puissance en régime sinusoïdal .....       | 168 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 20. Transformateurs .....                      | 177 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 21. Conversion électro-magnéto-mécanique ..... | 185 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 22. Conversion électronique statique .....     | 194 |

---

## Ondes

|                          |                                                     |     |
|--------------------------|-----------------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 23. Propagation des ondes et interfaces ..... | 202 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 24. Propagation des ondes et dispersion ..... | 209 |

---

## Mécanique des fluides

|                          |                                                 |     |
|--------------------------|-------------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 25. Cinématique des fluides .....         | 217 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 26. Dynamique des fluides .....           | 224 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 27. Bilans en mécanique des fluides ..... | 235 |

---

## Thermochimie

|                          |                                           |     |
|--------------------------|-------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 28. Transformations chimiques ..... | 245 |
|--------------------------|-------------------------------------------|-----|

---

## Électrochimie

|                          |                                             |     |
|--------------------------|---------------------------------------------|-----|
| <input type="checkbox"/> | Fiche 29. Courbes intensité-potentiel ..... | 256 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 30. Phénomène de corrosion .....      | 263 |
| <input type="checkbox"/> | Fiche 31. Piles et accumulateurs .....      | 272 |

---

## Réponses et corrigés

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| Réponses et corrigés ..... | 281 |
|----------------------------|-----|

# Mode d'emploi

## Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

*Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur* ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants. Un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Pour vous aider à mieux vous entraîner, nous avons ajouté quelques exercices sur des thèmes qui ne figurent pas au programme, en prenant soin de rappeler, dans ce cas, les équations en jeu. Il faut voir ces exercices comme des occasions supplémentaires pour s'entraîner à manipuler des mathématiques au service de la physique et de la chimie.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

## Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu de votre programme de deuxième année.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (●●●●), deux (●●●●), trois (●●●●) ou quatre (●●●●) horloges.

# Les pictogrammes

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme.



Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

*Ce pictogramme a été choisi parce que le bulldozer permet de construire les fondations et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.*



Ces entraînements vous entraînent au **calcul à la main**.

Dans ces entraînements, les calculs doivent être faits **sans calculatrice**.

## Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique-chimie (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

### Un travail personnalisé.

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

### Un travail régulier.

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

### Un travail efficace.

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

## Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse [cahier.entrainement@gmail.com](mailto:cahier.entrainement@gmail.com).

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

# Énoncés



# Opérateurs vectoriels

## Prérequis

Notation avec et sans le symbole nabla  $\vec{\nabla}$  des opérateurs :

- gradient :  $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f$
- divergence :  $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Expressions de ces opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes.

Dans toute cette fiche, les grandeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes ayant la dimension d'une longueur.

## Sur l'opérateur gradient

### Entraînement 1.1 — Quelle écriture pour le gradient ?



Le gradient est un opérateur vectoriel qui s'applique à des fonctions scalaires. Pour un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  décrivant l'espace, la définition du gradient d'une fonction  $f(x, y, z)$  est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

On considère la fonction  $V(x, y, z) = xyz$ . Quelle est la bonne expression du gradient de  $V$  ?

(a)  $\nabla(V) = zy \vec{e}_x + zx \vec{e}_y + yx \vec{e}_z$

(c)  $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = zy \vec{e}_y + zx \vec{e}_x + yx \vec{e}_z$

(b)  $\text{grad}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

(d)  $\vec{\nabla}(V) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

.....



### Entraînement 1.2 — Calcul de gradients en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté  $(x, y, z)$ .

On rappelle l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

a)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(xy + yz + zx + \frac{xyz}{a}\right) \dots\dots\dots$

b)  $\overrightarrow{\text{grad}}(3x^2 + 2a(y - z) + b^2) \dots\dots\dots$

- c)  $\overrightarrow{\text{grad}}(x^2y + y^2z + z^2x + a^3) \dots\dots\dots$
- d)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(2xy + 8a^2e^{z/(2b)} - 6c^2\right) \dots\dots\dots$
- e)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(8x^2y + \frac{6a^4}{y} - 5b^2z\right) \dots\dots\dots$



### Entraînement 1.3 — Calcul de gradients en coordonnées cylindriques.



On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté  $(r, \theta, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r, \theta, z)) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

- a)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3z - \frac{r^2}{a} - 2r\theta\right) \dots\dots\dots$
- b)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{a^2}{r^2}e^{5\theta}\right) \dots\dots\dots$
- c)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right) \dots\dots\dots$
- d)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(7\theta\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ln(z/b)\right) \dots\dots\dots$
- e)  $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{z}{r} \sin(\theta)\right) \dots\dots\dots$

### Entraînement 1.4 — La bonne formule.



On introduit deux systèmes de coordonnées pour décrire un plan : des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2)$  et des coordonnées polaires  $(\rho, \alpha)$ .

Parmi les formules suivantes de gradient à deux dimensions d'une fonction scalaire  $g$  du plan, identifier la seule écriture valable :

Ⓐ  $\overrightarrow{\text{grad}}(g(x_1, x_2)) = \frac{\partial g}{\partial x_1} \vec{e}_{x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \vec{e}_{x_2}$

Ⓒ  $\overrightarrow{\text{grad}}(g(r, \alpha)) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha$

Ⓑ  $\vec{\nabla} g(x_1, x_2) = \frac{\partial g}{\partial x_2} \vec{e}_{x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_1} \vec{e}_{x_2}$

Ⓓ  $\vec{\nabla} \cdot g(r, \rho) = \frac{\partial g}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha$

.....



### Entraînement 1.5 — Valeurs et projections d'un gradient.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté  $(x, y, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\nabla}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

On considère la fonction  $g(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 - 1$ , on note  $M(x, y, z)$  un point quelconque de l'espace et  $A$  le point de coordonnées  $(-1, 1, 2)$ .

- a) Calculer  $g(A)$  .....
- b) La quantité  $2z$  correspond à :  
 (a)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_x$  (c)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_z$   
 (b)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_y$  .....
- c) La quantité  $2y + 2$  correspond à :  
 (a)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_x$  (c)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_z$   
 (b)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_y$  .....
- d) La quantité  $2x - 4$  correspond à :  
 (a)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_x$  (c)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_z$   
 (b)  $\vec{\text{grad}}(g) \cdot \vec{e}_y$  .....
- e) La quantité  $\vec{\nabla}g(M)$  correspond au vecteur :  
 (a)  $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}$  (b)  $\begin{pmatrix} 2(y-1) \\ 2(x+2) \\ 2z \end{pmatrix}$  (c)  $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$  .....
- f) Calculer  $\|\vec{\nabla}g(A)\|$  .....



### Entraînement 1.6 — Enquête sur une fonction.



On considère une fonction  $f(x, y, z)$  inconnue telle que  $\vec{\text{grad}}(f) = 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + a^2\vec{e}_z$ .

- a) Quelle est l'unique relation valable ?  
 (a)  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2xy$  (b)  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = x^2$  (c)  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = y$  .....
- b) Quelle primitive est solution de la réponse précédente ?  
 (a)  $f(x, y, z) = xy^2 + g(x, y)$  (c)  $f(x, y, z) = x^2y + yx^2$   
 (b)  $f(x, y, z) = x^2y + g(y, z)$  .....
- c) Que vérifie la dérivée partielle par rapport à  $y$  de la réponse précédente ?  
 (a)  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$  (b)  $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2$  (c)  $\frac{\partial g}{\partial y} = 1$  .....

d) En s'appuyant sur les réponses précédentes, quelle est la bonne expression de  $g$  ?

(a)  $g = a^2y + \text{cste}$

(b)  $g = a^2z + \text{cste}$

(c)  $g = a^2 + \text{cste}$

e) Quelle est l'expression de la fonction  $f(x, y, z)$  telle que  $f(0, 0, 0) = 0$  ?

(a)  $f = x^2y + a^2z$

(b)  $f = y^2z + a^2x$

(c)  $f = x^2z + a^2y$

## Sur l'opérateur divergence



### Entraînement 1.7 — Calcul de divergences en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté  $(x, y, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a)  $\text{div}(3x^2\vec{e}_x + 2ay\vec{e}_y - 2bz\vec{e}_z)$  .....

b)  $\text{div}(2xy\vec{e}_y + 8a^2e^{\frac{x}{2b}}\vec{e}_z - 6b^2\vec{e}_x)$  .....

c)  $\text{div}\left(8x^2y\vec{e}_x + \frac{6x^4}{y}\vec{e}_y\right)$  .....

d)  $\text{div}(xe_z + ze_x)$  .....

e)  $\text{div}(x^2y\vec{e}_x - yx^2(\vec{e}_y - \vec{e}_z))$  .....



### Entraînement 1.8 — Calcul de divergences en coordonnées cylindriques.



On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté  $(r, \theta, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a)  $\text{div}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e}_r - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$  .....

b)  $\text{div}(r\vec{e}_\theta)$  .....

### Entraînement 1.9 — Bataille de divergences.



Quel est le champ dont la divergence au point  $A(-1, -1, 1)$  est maximale ?

- (a)  $x^2\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$                       (c)  $z^2\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + y^2\vec{e}_z$   
 (b)  $y^2\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$                       (d)  $y^2\vec{e}_x + x^2\vec{e}_z + z^2\vec{e}_y$



### Entraînement 1.10 — Choix du système de coordonnées.



On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et d'un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . On s'intéresse au champ vectoriel  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r$  et on donne l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial (\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

- a)  $\text{div}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \dots\dots\dots$                        b)  $\text{div}(r\vec{e}_r) \dots\dots\dots$

On munit l'espace de dimension 2 d'un système de coordonnées cylindro-polaires  $(r, \theta)$ .

On s'intéresse au champ vectoriel  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = r\vec{e}_r$ .

c) La divergence de ce champ (définie dans l'entraînement 1.8), en tout point, vaut :

- (a) 1                      (b) 2                      (c) 3                      (d) 4

## Sur l'opérateur rotationnel



### Entraînement 1.11 — Calcul de rotationnels en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté  $(x, y, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

- a)  $\vec{\text{rot}}(3x^2\vec{e}_x + 2by\vec{e}_y - 2cz\vec{e}_z) \dots\dots\dots$    
 b)  $\vec{\text{rot}}(2xy\vec{e}_x + 8c^2e^{\frac{x}{2c}}\vec{e}_y - 6c^2\vec{e}_z) \dots\dots\dots$    
 c)  $\vec{\text{rot}}\left(8x^2y\vec{e}_x + \frac{6x^4}{y}\vec{e}_y\right) \dots\dots\dots$    
 d)  $\vec{\text{rot}}(-x\vec{e}_z + z\vec{e}_x) \dots\dots\dots$    
 e)  $\vec{\text{rot}}(x^2y\vec{e}_x - yx^2(\vec{e}_y - \vec{e}_z)) \dots\dots\dots$



### Entraînement 1.12 — Calcul de rotationnels en coordonnées cylindriques.



On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté  $(r, \theta, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

Développer les expressions suivantes :

a)  $\vec{\text{rot}}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e}_r - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$  .....

b)  $\vec{\text{rot}}(r\vec{e}_\theta)$  .....

## Sur la représentation graphique



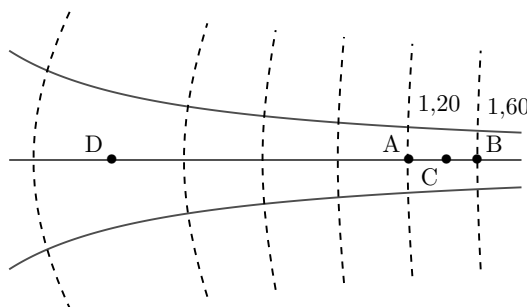
### Entraînement 1.13 — Exploiter une carte de champ.



On considère un champ  $\vec{v}(M)$  dérivant d'un gradient de potentiel  $\Phi$ , c'est-à-dire tel qu'en tout point  $M$  :

$$\vec{v}(M) = \vec{\text{grad}} \Phi(M)$$

La figure ci-dessous représente les lignes de champ (en trait plein) et les équipotentielles (en tirets). Le système est invariant par translation orthogonalement au plan de la figure. Les valeurs du potentiel  $\Phi(M)$  sont données pour chaque équipotentielle en UA (unité arbitraire).



On admet que le champ est tel que  $\text{div } \vec{v} = \vec{0}$ , c'est-à-dire à flux conservatif. Autrement dit, le long d'un tube de champ de section  $S$ , la quantité  $vS$  est conservée.

a) Par rapport aux équipotentielles, les lignes de champ sont orientées :

(a) parallèlement

(b) orthogonalement

(c) aléatoirement

.....

b) Estimer graphiquement  $v(C)$  en UA/m sachant que  $AB \approx 50 \text{ cm}$  .....

c) Le vecteur  $\vec{v}(C)$  est orienté dans le sens du vecteur :

(a)  $\overrightarrow{AB}$

(b)  $\overrightarrow{BA}$

.....

d) Estimer graphiquement  $\frac{v(C)}{v(D)}$  en calculant un rapport de longueurs .....

## Sur les opérateurs laplaciens



### Entraînement 1.14 — Opérateur laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté  $(x, y, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (scalaire) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(f(x, y, z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Développer les expressions suivantes :

a)  $\Delta\left(\frac{x^2 y}{a} + bz + c^2\right)$  .....

b)  $\Delta(y^2 - 5az)$  .....

c)  $\Delta\left(b^2 \ln\left(\frac{z}{a}\right) + 3x^2\right)$  .....



### Entraînement 1.15 — Opérateur laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes.



On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté  $(x, y, z)$ .

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (vectoriel) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(\vec{A}(x, y, z)) = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z.$$

On dispose d'un vecteur  $\vec{A}$  dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{x^2 y}{a} + bz + c^2 \\ y^2 - 5az \\ b^2 \ln\left(\frac{z}{a}\right) + 3x^2 \end{pmatrix}.$$

Développer  $\Delta\vec{A}$  .....

# Bilan sur les opérateurs



## Entraînement 1.16 — scalaire ou vecteur ?



Les différents opérateurs rencontrés peuvent être des opérateurs :

- |                                            |                                             |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
| (a) scalaires s'appliquant à des scalaires | (c) vectoriels s'appliquant à des scalaires |
| (b) scalaires s'appliquant à des vecteurs  | (d) vectoriels s'appliquant à des vecteurs  |

- |                                                                                          |                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| a) Quel cas correspond à l'opérateur « gradient » ? .....                                | <input type="text"/> |
| b) Quel cas correspond à l'opérateur « divergence » ? .....                              | <input type="text"/> |
| c) Quel cas correspond à l'opérateur « rotationnel » ? .....                             | <input type="text"/> |
| d) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ scalaire ? .....  | <input type="text"/> |
| e) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien » appliqué à un champ vectoriel ? ..... | <input type="text"/> |

## Réponses mélangées

|                                                                                                                       |                       |     |     |                                                                                         |                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0                                                                                                                     | (b)                   | (b) | (c) | $\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} \vec{e}_r$                                                  | $\left(z + y + \frac{yz}{a}\right) \vec{e}_x + \left(x + z + \frac{xz}{a}\right) \vec{e}_y$ |
|                                                                                                                       |                       |     |     |                                                                                         | $+ \left(x + y + \frac{yx}{a}\right) \vec{e}_z$                                             |
| $28 \frac{\theta r^3}{a^4} \vec{e}_r + 7 \frac{r^3}{a^4} \vec{e}_\theta + \frac{1}{z} \vec{e}_z$                      | 3                     | (b) |     | $-\frac{2a^2}{r^3} e^{5\theta} \vec{e}_r + \frac{5a^2}{r^3} e^{5\theta} \vec{e}_\theta$ | (d) (a)                                                                                     |
| $6x \vec{e}_x + 2a \vec{e}_y - 2a \vec{e}_z$                                                                          | 2                     | (a) | (a) | $-4ce^{\frac{z}{2c}} \vec{e}_x - 2x \vec{e}_z$                                          | $\frac{8x^2}{y} (3x - y) \vec{e}_z$                                                         |
| $x^2 \vec{e}_x - 2xy(\vec{e}_y + \vec{e}_z) - x^2 \vec{e}_z$                                                          | $2 \vec{e}_z$         |     |     | $2x + 4 \frac{a^2}{b} e^{\frac{z}{2b}}$                                                 | (b) 16 (a) $\vec{0}$                                                                        |
| $2y \vec{e}_x + 2x \vec{e}_y + 4 \frac{a^2}{b} e^{z/(2b)} \vec{e}_z$                                                  | $-4\theta \vec{e}_z$  |     |     | $16xy \vec{e}_x + \left(8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}\right) \vec{e}_y - 5b^2 \vec{e}_z$      | (b)                                                                                         |
| $16xy - \frac{6x^4}{y^2}$                                                                                             | $\frac{2y}{a}$        | (c) |     | $\begin{pmatrix} \frac{2y}{a} \\ \frac{a}{2} \\ b^2 \\ 6 - \frac{z^2}{2} \end{pmatrix}$ | $-3 \frac{r}{a} + 1$                                                                        |
|                                                                                                                       |                       |     |     |                                                                                         | $(2xy + z^2) \vec{e}_x + (2yz + x^2) \vec{e}_y$                                             |
|                                                                                                                       |                       |     |     |                                                                                         | $+ (2xz + y^2) \vec{e}_z$                                                                   |
| 0,80 UA/m                                                                                                             | $2\sqrt{17}$          | 3   |     | $\left(-\frac{2r}{a} - 2\theta\right) \vec{e}_r - 2 \vec{e}_\theta + 3 \vec{e}_z$       | (d)                                                                                         |
| $-\frac{z \sin(\theta)}{r^2} \vec{e}_r + \frac{z \cos \theta}{r^2} \vec{e}_\theta + \frac{\sin(\theta)}{r} \vec{e}_z$ | $x(2y - x)$           | 2   |     | $6x + 2a - 2b$                                                                          |                                                                                             |
| (a) (d) (a) $2 \vec{e}_y$ (b) (c) (a)                                                                                 | $6 - \frac{b^2}{z^2}$ | 0   | (b) |                                                                                         |                                                                                             |

► Réponses et corrigés page 282

# Électrostatique

## Prérequis

Repérages cartésien, cylindrique et sphérique.

Intégrales curvilignes, de surface et de volume.

Champs scalaires et vectoriels. Gradient. Théorème de Gauss.

## Constantes utiles

→ Charge élémentaire :  $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

→ Permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

## Distributions de charge : symétries, invariances, charge totale



### Entraînement 2.1 — Calculs intégraux de longueurs, surfaces et volumes.



On rappelle les déplacements élémentaires dans chacun des trois systèmes de coordonnées :

- en coordonnées cartésiennes :  $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$
- en coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) :  $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$
- en coordonnées sphériques :  $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$

a) Exprimer l'élément de circonférence  $d\mathcal{C}$  d'un disque de rayon  $R$  .....

b) Grâce à un calcul intégral, retrouver la circonférence d'un cercle de rayon  $R$ .

.....

c) En coordonnées cylindriques, exprimer l'aire  $dS$  de l'élément de surface orthogonal à  $\vec{e}_z$ .

.....

d) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver la surface d'un disque de rayon  $R$  ....

e) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver le volume d'une boule de rayon  $R$  ....

### Entraînement 2.2 — Charge totale d'une distribution linéique.



Dans chacun des cas suivants, déterminer la charge totale des distributions linéiques suivantes à l'aide de la relation :  $Q = \int \lambda(M) d\ell_M$ .

a) Pour une tige de longueur  $\ell$  chargée avec une densité linéique de charge uniforme  $\lambda_0$ .

.....

b) Pour un anneau de rayon  $a$  dont la densité linéique de charge, non uniforme, est  $\lambda(M) = q_0 \theta / a$  avec  $q_0$  une constante et  $\theta$  l'angle qui repère le point  $M$  sur l'anneau.

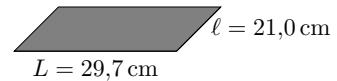
.....



### Entraînement 2.3 — Feuille d'aluminium chargée.



Soit une feuille d'aluminium de format A4 à laquelle 1 000 électrons ont été arrachés. La feuille porte alors la charge électrique  $Q$ .



- Exprimer la charge  $Q$  en fonction de la charge électrique élémentaire  $e$  .....
- Exprimer la surface  $S$  de la feuille en fonction des longueurs  $L$  et  $\ell$  .....
- En déduire la valeur de la charge surfacique moyenne  $\sigma = Q/S$  portée par la feuille ....

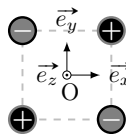
  
  



### Entraînement 2.4 — Quadrupôle électrostatique.



On considère la distribution de charge ci-dessous.



- Quels sont les trois plans de symétrie de la distribution ?

.....

- Quels sont les deux plans d'antisymétrie de la distribution ?

.....



### Entraînement 2.5 — Autour d'une sphère chargée.



Tous les résultats devront être donnés en écriture scientifique.

- Quel est le volume en  $\text{m}^3$  d'une sphère de rayon  $R = 25 \text{ cm}$  ? .....

- Que vaut la charge totale de la sphère, en coulombs, si celle-ci est chargée avec une densité volumique uniforme de  $\rho_0 = 50,0 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-3}$  ?

.....

- Quelle est l'aire de la surface de la sphère en  $\text{m}^2$  ? .....

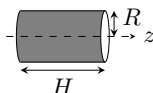
- Que vaut la charge totale de la sphère, en coulombs, si celle-ci est chargée avec une densité surfacique uniforme  $\sigma = 8 \text{ } \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$  ?

.....

### Entraînement 2.6 — Tube chargé localement.



Un tube conducteur d'axe  $(Oz)$  possède une densité surfacique de charge  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$ , avec  $\sigma_0$  une constante et  $\theta$  l'angle des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .



a) Comment s'exprime l'aire d'un élément de surface  $dS$  du tube ?

- ☐ a)  $dr dz$ 
☐ b)  $R d\theta dz$ 
☐ c)  $R \sin(\theta) d\theta dz$ 
☐ d)  $R dr d\theta$

.....

b) Comment s'exprime la charge totale  $Q$  portée par le tube ?

- ☐ a)  $Q = \int_{r=0}^R \int_{z=0}^H \sigma(\theta) dr dz$ 
☐ c)  $Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \sigma(\theta) R d\theta dz$
- ☐ b)  $Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \sigma(\theta) R \sin(\theta) d\theta dz$ 
☐ d)  $Q = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(\theta) R dr d\theta$

.....

c) À l'aide du calcul d'une intégrale, déterminer la charge totale  $Q$  .....



### Entraînement 2.7 — Autour d'un cylindre chargé.

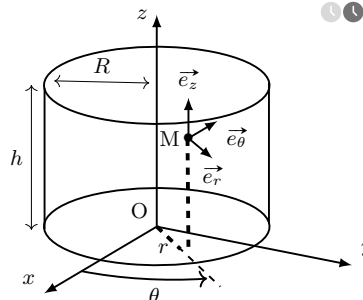


Soit un câble cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ , doté d'une densité volumique de charge  $\rho$ .

a) Laquelle de ces formules permet de calculer l'aire de la surface latérale du cylindre ?

- ☐ a)  $\pi R^2 h$ 
☐ c)  $4\pi R^2 h$
- ☐ b)  $2\pi R h$ 
☐ d)  $4\pi R h$

.....



b) Sans négliger les effets de bords, déterminer les invariances de cette distribution de charge si,

$$\text{pour } 0 \leq z \leq h, \rho = \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right)^3,$$

avec  $\rho_0$  une constante homogène à une charge volumique.

- ☐ a) invariance par translation parallèlement à  $\vec{e}_x$ 
☐ c) invariance par translation parallèlement à  $\vec{e}_z$
- ☐ b) invariance par rotation autour de l'axe  $(Oz)$ 
☐ d) aucune invariance

.....

c) Même question si, pour  $0 \leq z \leq h$ ,  $\rho = \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right)^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  .....

d) Même question si le cylindre est de hauteur infinie avec  $\rho = \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right)^3$  .....

# De la distribution de charge au champ électrostatique

## Entraînement 2.8 — Superpositions et symétries.



Sur le schéma ci-contre figurent, en  $M_1$  et  $M_2$ , les champs électrostatiques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  respectivement générés par les deux charges  $q_1 = +e$  et  $q_2 = +e$ .

a) Exprimer le champ électrostatique total  $\vec{E}$  au point  $M_1$  en fonction des vecteurs de la base.

.....

b) Exprimer le champ électrostatique total  $\vec{E}$  au point  $M_2$  en fonction des vecteurs de la base.

.....

Le plan  $(M_2, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , nommé  $\mathcal{P}$ , est un plan de symétrie de la distribution de charge.

c) Quelles propositions sont correctes ?

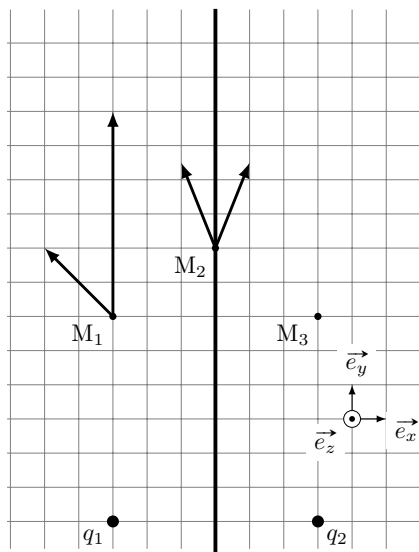
(a)  $\vec{E}(M_3) = -2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$

(c)  $\vec{E}(M_2) \in \mathcal{P}$

(b)  $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$

(d)  $\vec{E}(M_2) \perp \mathcal{P}$

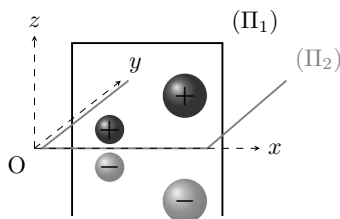
.....



## Entraînement 2.9 — Symétrie d'une distribution volumique de charge.



Le champ électrostatique créé par la distribution volumique ci-dessous est noté  $\vec{E}$ . Le plan  $(\Pi_1)$  est un plan de symétrie de la distribution. Le plan  $(\Pi_2)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution.



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution, le champ électrostatique appartient (resp. est perpendiculaire) à ce plan.

a) Quel vecteur unitaire est normal au plan  $(\Pi_1)$  ? .....

b) Quel vecteur unitaire est normal au plan  $(\Pi_2)$  ? .....

c) En un point  $M(x, 0, 0)$  de l'axe  $(Ox)$ , identifier l'expression correcte parmi celles proposées.

(a)  $\vec{E}(M) = \vec{0}$

(b)  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_x$

(c)  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_y$

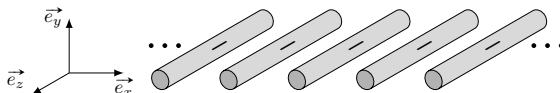
(d)  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_z$

.....

### Entraînement 2.10 — Invariances d'une distribution volumique de charge.



La grille infinie représentée ci-dessous est constituée de tiges infinies selon  $\vec{e}_z$  et est chargée uniformément négativement.



Soit M un point de l'espace repéré par  $(x, y, z)$ .

Sachant que les composantes du champ électrique  $\vec{E}$  possèdent les mêmes invariances que celles de la distribution de charge, lesquelles de ces expressions sont valides si l'étude des symétries a déjà été menée ?

- (a)  $\vec{E}(x, y, z) = E_x(y)\vec{e}_x + E_y(y)\vec{e}_y$  (c)  $\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y) + E_y(x, y)$   
 (b)  $\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y$  (d)  $\|\vec{E}\|(x, y, z) = \|\vec{E}\|(x, y, 0)$



### Entraînement 2.11 — Homogénéités.



Dans les expressions suivantes,  $\rho$ ,  $\sigma$  et  $\lambda$  sont des densités de charge volumique, surfacique et linéique. Le potentiel électrostatique est noté  $V$ , et  $a$ ,  $\ell$ ,  $h$  et  $r$  sont des longueurs.

a) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à une charge électrique.

- (a)  $4\pi a^2 \rho$  (b)  $\lambda \pi a^2$  (c)  $\rho \pi a^2 h$  (d)  $\frac{\sigma \ell^3}{a}$

b) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à un champ électrostatique.

- (a)  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  (b)  $(V_2 - V_1)e$  (c)  $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$  (d)  $\frac{\rho r}{\varepsilon_0}$



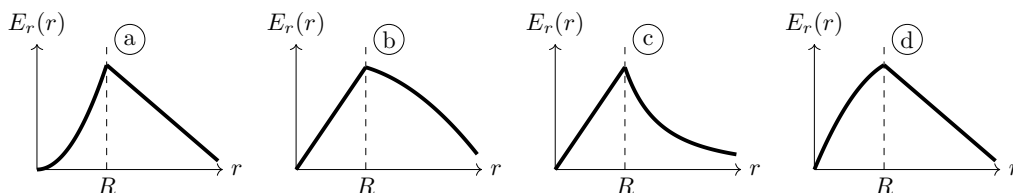
### Entraînement 2.12 — Tracé d'une composante du champ.



La composante radiale du champ électrostatique créé au point M par une sphère de centre O, de rayon  $R$ , dotée d'une densité volumique de charge  $\rho_0$ , est donnée en fonction de la distance  $r = OM$  par

$$E_r(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad E_r(r > R) = \frac{3\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}.$$

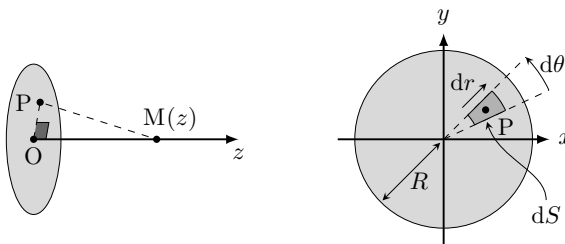
Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de  $E_r$  en fonction de  $r$  ? .....



### Entraînement 2.13 — Calcul d'un champ électrostatique par intégration.



Un disque, d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$ , possède une charge surfacique uniforme  $\sigma$ . On note  $P$  un point du disque tandis que  $M$  est un point de l'espace qui appartient à l'axe  $(Oz)$ .



a) Comment s'exprime l'aire élémentaire  $dS$  centrée sur  $P(r, \theta)$  ?

(a)  $dS = r \, dr \, dz$

(c)  $dS = dx \, dz$

(b)  $dS = r \sin(\theta) \, dr \, d\theta$

(d)  $dS = r \, dr \, d\theta$

b) Quelle est l'expression du produit scalaire  $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z$  ?

(a)  $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = PM$

(c)  $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = z$

(b)  $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = dz$

(d)  $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = r$

c) Quelle est l'expression de la distance  $PM = \|\vec{PM}\|$  ?

(a)  $PM = z^2 + r^2$

(c)  $PM = \sqrt{dz^2 + dr^2}$

(b)  $PM = \sqrt{z^2 + r^2}$

(d)  $PM = dr + dz$

Le principe de superposition énonce que le champ électrostatique en  $M$  est la somme des champs électrostatiques créés par chaque élément de surface d'aire  $dS$  et de charge  $dQ = \sigma dS$ . L'expression du champ créé par une source ponctuelle permet alors d'exprimer la composante axiale  $E_z = \vec{E} \cdot \vec{e}_z$  du champ créé par le disque sur l'axe  $(Oz)$  par :

$$E_z = \iint_P \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{e}_z}{PM^3} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma r \, dr \, d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

d) Calculer l'intégrale précédente à l'aide du changement de variable  $u = r^2$ .

e) Simplifier l'expression obtenue en d) si  $z \ll R$  afin de retrouver l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé.

f) Sachant que  $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$  à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , simplifier l'expression obtenue en d) si  $z \gg R$  afin de retrouver l'expression du champ créé par une charge ponctuelle  $Q_0 = \pi R^2 \sigma$ .