

Olivier Fiat

PHYSIQUE-CHIMIE

MP/MP*-MPI/MPI*

MÉTHODES & EXERCICES

3^e édition

DUNOD

l'intégrale

Table des matières

Avant-propos

IX

I Mécanique 1

CHAPITRE 1 RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS 3

Les méthodes à retenir	4
Énoncés des exercices	12
Du mal à démarrer ?	21
Corrigés des exercices	22

CHAPITRE 2 MÉCANIQUE DU SOLIDE 33

Les méthodes à retenir	34
Capacités numériques	41
Énoncés des exercices	46
Du mal à démarrer ?	53
Corrigés des exercices	54

II Traitement du signal 67

CHAPITRE 3 SIGNAL PÉRIODIQUE 69

Les méthodes à retenir	70
Énoncés des exercices	78
Du mal à démarrer ?	85
Corrigés des exercices	86

CHAPITRE 4	TRAITEMENT DU SIGNAL NUMÉRIQUE	93
Les méthodes à retenir		94
Capacités numériques		100
Énoncés des exercices		105
Du mal à démarrer ?		111
Corrigés des exercices		111
III	Optique	117
CHAPITRE 5	SUPERPOSITION D'ONDES LUMINEUSES	119
Les méthodes à retenir		120
Énoncés des exercices		130
Du mal à démarrer ?		138
Corrigés des exercices		139
CHAPITRE 6	DISPOSITIF DES TROUS D'YOUNG	151
Les méthodes à retenir		152
Énoncés des exercices		163
Du mal à démarrer ?		173
Corrigés des exercices		174
CHAPITRE 7	INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON	185
Les méthodes à retenir		186
Énoncés des exercices		199
Du mal à démarrer ?		208
Corrigés des exercices		209

IV Électromagnétisme **219**

CHAPITRE 8 **ÉQUATIONS DE MAXWELL** **221**

Les méthodes à retenir	222
Énoncés des exercices	231
Du mal à démarrer ?	239
Corrigés des exercices	240

CHAPITRE 9 **CHAMP ÉLECTRIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE** **251**

Les méthodes à retenir	252
Capacités numériques	264
Énoncés des exercices	270
Du mal à démarrer ?	278
Corrigés des exercices	279

CHAPITRE 10 **CHAMP MAGNÉTIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE** **291**

Les méthodes à retenir	292
Énoncés des exercices	306
Du mal à démarrer ?	319
Corrigés des exercices	320

V Physique des ondes, physique quantique **335**

CHAPITRE 11 **ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE** **337**

Les méthodes à retenir	338
Énoncés des exercices	348
Du mal à démarrer ?	355
Corrigés des exercices	356

CHAPITRE 12	PHÉNOMÈNES DE PROPAGATION LINÉAIRES : ABSORPTION, DISPERSION, ÉMISSION	365
Les méthodes à retenir		366
Énoncés des exercices		380
Du mal à démarrer ?		390
Corrigés des exercices		391
CHAPITRE 13	PHYSIQUE QUANTIQUE	403
Les méthodes à retenir		404
Énoncés des exercices		414
Du mal à démarrer ?		426
Corrigés des exercices		427
VI Thermodynamique		439
CHAPITRE 14	THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE	441
Les méthodes à retenir		442
Énoncés des exercices		451
Du mal à démarrer ?		457
Corrigés des exercices		458
CHAPITRE 15	THERMODYNAMIQUE DIFFÉRENTIELLE, SYSTÈMES OUVERTS	469
Les méthodes à retenir		470
Énoncés des exercices		477
Du mal à démarrer ?		481
Corrigés des exercices		482
CHAPITRE 16	TRANSFERTS THERMIQUES	489
Les méthodes à retenir		490
Capacités numériques		496

Énoncés des exercices	501
Du mal à démarrer ?	510
Corrigés des exercices	511

VII Chimie 525

CHAPITRE 17 THERMOCHIMIE 527

Les méthodes à retenir	528
Capacités numériques	541
Énoncés des exercices	549
Du mal à démarrer ?	554
Corrigés des exercices	555

CHAPITRE 18 ÉLECTROCHIMIE 567

Les méthodes à retenir	568
Énoncés des exercices	585
Du mal à démarrer ?	593
Corrigés des exercices	594

CHAPITRE 19 FORMULAIRE MATHÉMATIQUE 603

19.1 Équations différentielles	603
19.2 Fonctions de plusieurs variables, équations aux dérivées partielles	605
19.3 Analyse vectorielle	606
19.4 Intégrales de champs et grandeurs élémentaires	609
Index	611

Avant-propos

Présentation générale.

Cet ouvrage de la collection Méthodes & Exercices traite de l'intégralité du programme de physique et de chimie des filières MP, MPI, MP* et MPI*. Chacun des 18 chapitres est divisé en quatre parties (le chapitre 19 est un formulaire de mathématiques).

Les méthodes à retenir : chaque chapitre commence par plusieurs fiches structurées avec des rappels de cours synthétiques, des méthodes de raisonnement ou de calcul, un exemple complet et un renvoi aux exercices concernés.

Capacités numériques : c'est une nouveauté du programme 2022, ce paragraphe ne figure que dans certains chapitres et correspond à une mention explicite du programme officiel. Après la description de la situation physique concernée, les spécificités informatiques du code Python sont détaillées, puis le code est donné intégralement et un exemple est présenté. Enfin, deux exercices sont proposés et corrigés, un de nature physique, avec l'utilisation du code Python pour simuler une expérience ou valider un résultat théorique, et un de nature informatique, nécessitant une modification du code. L'utilisation de Python au concours, à l'écrit et à l'oral de physique-chimie est explicitement prévue par les programmes.

Énoncés des exercices : des énoncés d'exercices d'application du cours et de nombreux exercices inspirés d'écrits et d'oraux de concours sont proposés. Ils sont affectés d'un niveau de difficulté, de 1 à 4.

Du mal à démarrer ? : des indications de méthode ou de calcul sont données à l'image de celles qui seraient données en colle ou à l'oral des concours.

Corrigés des exercices : les solutions détaillées sont entièrement rédigées.

Conseils de travail.

Nous encourageons nos lecteurs à adopter une discipline de travail rigoureuse. C'est en faisant qu'on apprend. Lire un énoncé puis son corrigé est absolument contre-productif, et même si vous avez l'impression de « tout comprendre » vous n'apprendrez presque rien, et surtout vous ne retiendrez rien. Un exercice est fait pour être cherché, longuement, avec application, puis rédigé complètement, applications numériques, commentaires et conclusions compris. En cas de blocage, il faut d'abord s'assurer de la bonne connaissance du cours, puis consulter l'aide donnée dans la rubrique « Du mal à démarrer ? ».

À propos du choix d'exercices.

Les exercices ont été choisis pour couvrir tout le programme et tous les styles : certains sont calculatoires, d'autres plus qualitatifs, d'autres encore à forte composante documentaire (c'est alors mentionné dans le titre) avec une volonté dans cet ouvrage de proposer beaucoup de lectures graphiques (schémas, diagrammes, cartes de champ, de potentiel). Certains exercices, qui demandent une initiative particulière de modélisation, de choix d'hypothèses, d'organisation du raisonnement, sont estampillés « résolution de problème ».

Quelques données plus techniques.

- Les grandeurs complexes sont soulignées, les grandeurs vectorielles surmontées d'une flèche, les vecteurs unitaires notés $\vec{u}$.
- L'imaginaire pur est noté i en électromagnétisme dans l'étude des ondes et en physique quantique, et j dans les chapitres d'électricité pour éviter la confusion avec l'intensité.
- Nous n'avons délibérément pas fourni les lois d'analyse vectorielle dans le corps des exercices, afin d'éviter de donner une indication trop précise (en l'occurrence, il faut utiliser une formule faisant apparaître un gradient, une divergence, un rotationnel ou un laplacien). Nous avons ainsi respecté la convention de l'écrit des concours, où la liste des formules utiles est toujours donnée avant ou après l'énoncé.
- Un formulaire de mathématiques utiles à la physique est proposé à la fin de l'ouvrage.
- Un index complet est proposé à la toute fin de ce livre.

En guise de conclusion.

Nous espérons que cet ouvrage aidera les lecteurs-candidats à réussir le mieux possible les épreuves de physique-chimie des concours et nous leur souhaitons bon courage pour leur travail.

Première partie

Mécanique

CHAPITRE 1

Référentiels non galiléens

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Référentiel galiléen.
- ◇ Composition des vitesses et des accélérations.
- ◇ Point coïncident.
- ◇ Vitesse d'entraînement, vitesse relative.
- ◇ Accélération d'entraînement, accélération relative, accélération de Coriolis.
- ◇ Loi de la quantité de mouvement en référentiel non galiléen.
- ◇ Force d'inertie d'entraînement (référentiel en translation).
- ◇ Force d'inertie d'entraînement (référentiel en rotation uniforme).
- ◇ Force d'inertie de Coriolis.
- ◇ Champ de pesanteur.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.
- ◇ Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.

Les méthodes à retenir

Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.

Soit $\mathcal{R}_0$ un référentiel muni d'un point fixe O_0 (il sera galiléen dans l'étude mécanique des paragraphes suivants), $\mathcal{R}$ un référentiel en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ muni d'un point fixe O et M un point matériel. La **loi de composition des vitesses** donne la relation entre la vitesse absolue de M dans $\mathcal{R}_0$ et sa vitesse relative dans $\mathcal{R}$

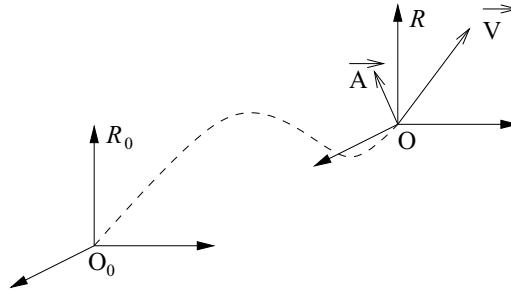
$$\vec{v}_a = \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad \vec{v}_r = \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

La **loi de composition des accélérations** donne la relation entre l'accélération absolue de M dans $\mathcal{R}_0$ et son accélération relative dans $\mathcal{R}$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_0M}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_r = \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$$

Seuls deux cas précis sont au programme.

a) $\mathcal{R}$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}_0$ à la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{V}$, vitesse de O dans $\mathcal{R}_0$ et d'accélération d'entraînement $\vec{a}_e = \vec{A}$, accélération de O dans $\mathcal{R}_0$.

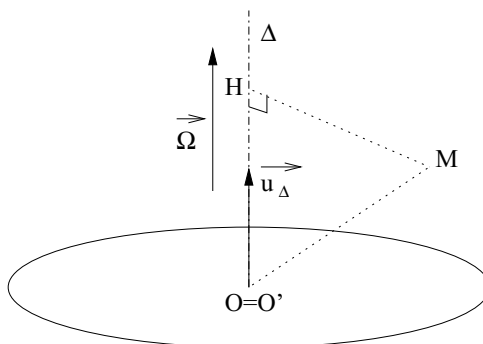


Les lois de composition s'écrivent alors

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(M) = \vec{V} + \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) \\ \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) = \vec{A} + \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) \end{cases}$$

Le sens physique de ces lois est assez simple. Quand on se déplace dans un train en translation, notre vitesse dans le référentiel terrestre est la somme de la vitesse du point du train où nous posons le pied, c'est-à-dire la vitesse du train car il est en translation, et de notre vitesse par rapport au train. Il en est de même pour les accélérations.

b) $\mathcal{R}$ est en **rotation uniforme autour d'un axe fixe Δ de $\mathcal{R}_0$** , à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_\Delta$. Le **point coïncident** de M à la date t est le point fixe P de $\mathcal{R}$ par lequel passe M . On note H le projeté orthogonal de M sur Δ .



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_a = \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(P) + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(P) + \vec{a}_C + \vec{a}_r \end{array} \right. \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} + \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) \\ \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) = -\Omega^2 \vec{HM} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{HM} + \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) \end{array} \right.$$

Le terme

$$\vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{HM}$$

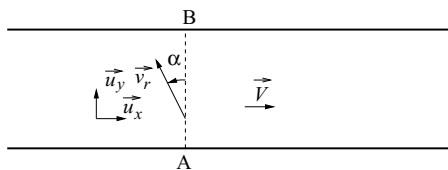
est l'accélération d'entraînement centripète de P, cohérente avec son mouvement circulaire uniforme autour de H. Le terme

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}$$

est l'**accélération de Coriolis**, son sens physique est assez complexe et dans une approche pragmatique, on peut dire qu'il n'a pas d'intérêt immédiat pour la réussite aux concours.

Exemple

Une rivière forme un référentiel $\mathcal{R}$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$. Un bateau à moteur M de vitesse maximale $v_{\max}$ veut traverser la rivière selon l'axe $\vec{u}_y$ perpendiculaire à la rivière dans le référentiel terrestre. Pour cela, il doit naviguer à une vitesse $\vec{v}_r$ dans le référentiel de la rivière faisant un angle α avec $\vec{u}_y$.



La loi de composition des vitesses donne

$$\vec{v}_a = \vec{V} + \vec{v}_r \text{ soit } v_a \vec{u}_y = V\vec{u}_x - v_r \sin \alpha \vec{u}_x + v_r \cos \alpha \vec{u}_y \text{ donc } \begin{cases} v_r \sin \alpha = V \\ v_a = v_r \cos \alpha \end{cases}$$

Le problème n'est donc possible que si $v_r > V$, donc $v_{\max} > V$. En effet, dans le cas contraire, même à pleine vitesse, le bateau ne peut remonter le courant et dérive par rapport à [AB]. Si cette condition est vérifiée, alors $v_r = \frac{V}{\sin \alpha}$ et $v_a = \frac{V}{\tan \alpha}$.

↪ **Exercice 1.1.**

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.

Soit $\mathcal{R}_0$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}$ un référentiel en translation par rapport à $\mathcal{R}_0$ à la vitesse d'entraînement $\vec{V}$ et avec l'accélération d'entraînement $\vec{A}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$. O est un point fixe de $\mathcal{R}$. Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$, ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\vec{OM}, \vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$$

La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter aux forces la **force d'inertie d'entraînement**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} = m\vec{a}_r$$

$$\text{avec } \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{A}$$

La confusion entre l'accélération du référentiel $\vec{A}$ et celle de M dans le référentiel est une faute rédhibitoire. Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en translation.

- On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en translation ».
- On fait un schéma.
- On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.
- On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique

$$\vec{OM}, \vec{v}_r, \vec{a}_r \text{ et } \vec{A}$$

et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.

- On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f} \text{ et } \vec{f}_{ie} = -m\vec{A}$$

- On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.

La **loi du moment cinétique** est elle aussi inchangée, le moment en O de la force d'inertie d'entraînement est le même que pour toute autre force

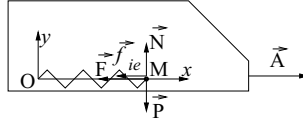
$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}_{ie}$$

La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple

Un pendule élastique est formé d'un ressort de constante de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et d'un point matériel M de masse m couissant sur un axe (O, x) horizontal en étant soumis à un frottement visqueux $\vec{f}_v = -h\vec{v}$. Ce dispositif est embarqué dans un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$. On note $x(t)$ l'abscisse de M.

- Le référentiel d'étude est le référentiel non galiléen du train en translation.
- Voici le schéma du dispositif et des forces (à l'exception de la force de frottement).



- Le repère de projection est (O, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$).
- Les vecteurs cinématiques sont

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right., \vec{v}_r \left| \begin{array}{c} \dot{x} \\ 0 \end{array} \right., \vec{a}_r \left| \begin{array}{c} \ddot{x} \\ 0 \end{array} \right. \text{ et } \vec{A} \left| \begin{array}{c} A \\ 0 \end{array} \right.$$

- Les vecteurs forces sont

$$\vec{F} \left| \begin{array}{c} -k(x - \ell_0) \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{f}_f \left| \begin{array}{c} -h\dot{x} \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{f}_{ie} \left| \begin{array}{c} -mA \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{P} \left| \begin{array}{c} 0 \\ -mg \end{array} \right. \quad \vec{N} \left| \begin{array}{c} 0 \\ N \end{array} \right.$$

- Voici les projections sur les deux axes

$$\left\{ \begin{array}{l} -k(x - \ell_0) - h\dot{x} - mA = m\ddot{x} \\ -mg + N = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k(\ell_0 - \frac{mA}{k}) \\ N = mg \end{array} \right.$$

L'équation différentielle vérifiée par x est celle d'un oscillateur amorti, l'abscisse d'équilibre est $x_{eq} = \ell_0 - \frac{mA}{k}$, le régime (pseudo-périodique, critique, apériodique) dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène $\Delta = h^2 - 4km$.

↪ **Exercices 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.**

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.

Soit $\mathcal{R}_0$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}$ un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe Δ fixe de $\mathcal{R}_0$ passant par O, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_\Delta$. Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$, ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\overrightarrow{OM}, \vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \text{ et } \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ . La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter au forces la **force d'inertie d'entraînement** et la **force d'inertie de Coriolis**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \text{ avec } \begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2 \overrightarrow{HM} \\ \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_C = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

La force d'inertie d'entraînement est dite **axifuge** (ce terme est préférable au terme usuel « centrifuge ») car elle tend à faire fuir M de l'axe (et non pas du centre O). Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en rotation.

- On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en rotation uniforme ».
- On fait un schéma.
- On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.
- On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{HM}$, $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$ et $\vec{\Omega}$ et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.
- On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles, de la force d'inertie d'entraînement et de la force d'inertie de Coriolis.

$$\vec{f}, \vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM}, \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

- On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.

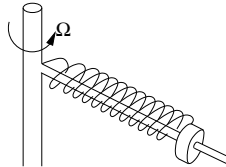
La **loi du moment cinétique** est elle aussi inchangée, le moment en O des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont les mêmes que pour toute autre force

$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie} \text{ et } \mathcal{M}_O(\vec{f}_{ic}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ic}$$

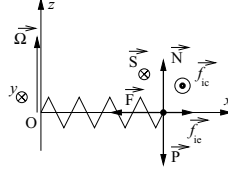
La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en remarquant que la force d'inertie de Coriolis, orthogonale au vecteur vitesse relative, ne travaille pas et en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (voir exercice 1.7) mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple

Un point matériel coulisse sans frottement sur une tige horizontale (O, x) animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical (O, z) à la vitesse angulaire Ω . Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k a une extrémité fixe en O et son autre extrémité reliée à M. On note $x(t)$ l'abscisse de M sur l'axe.



- a) On travaille dans le référentiel non galiléen en rotation de la tige. Dans celui-ci, la masse a un mouvement rectiligne.
 b) Voici le schéma modélisé



- c) On travaille dans le repère cartésien (O, x, y, z) .
 d) Voici les composantes des vecteurs cinématiques.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{HM} = \begin{vmatrix} x & \dot{x} & \ddot{x} & 0 \\ 0 & \vec{v}_r & 0 & \vec{\Omega} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega \end{vmatrix}$$

- e) Voici les composantes du poids et de la force de rappel du ressort.

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} \quad \vec{F} = \begin{vmatrix} -k(x - \ell_0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

En l'absence de frottements, l'action de la tige sur M est orthogonale à la tige, c'est donc la somme d'une force normale verticale $\vec{N}$ qui compense le poids et d'une force normale horizontale $\vec{S}$ qui compense la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{vmatrix} \quad \vec{S} = \begin{vmatrix} 0 \\ S \\ 0 \end{vmatrix}$$

Les forces d'inertie s'écrivent

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM} = m\Omega^2 x \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} 0 \\ -2m\Omega\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

- f) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{S} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \quad \text{donc}$$

$$\begin{cases} -k(x - \ell_0) + m\Omega^2 x = m\ddot{x} \\ S - 2m\Omega\dot{x} = 0 \\ N - mg = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) x = \omega_0^2 \ell_0 \\ S = 2m\Omega\dot{x} \\ N = mg \end{cases}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pulsation propre de l'oscillateur élastique en référentiel galiléen.

Deux cas sont possibles.

- Si $\Omega < \omega_0$, le coefficient de x est positif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

- Si $\Omega > \omega_0$, le coefficient de x est négatif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur hyperbolique, dont la solution diverge quand $t \rightarrow \infty$. La force d'inertie axifuge est trop forte pour être compensée par la force de rappel du ressort et la masse s'éloigne indéfiniment, jusqu'à la limite élastique du ressort.

↪ Exercices 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11.

Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.

Le **référentiel géocentrique** est galiléen en bonne approximation. Le **référentiel terrestre** est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_s} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$T_s = 86\,164 \text{ s}$ est le jour sidéral. Le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen. On doit donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement axifuge et la force d'inertie de Coriolis pour les points matériels évoluant à proximité de la surface terrestre.

- a) Le **poïds** est la somme de la force de gravitation dirigée vers le centre de la Terre et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{P} = \vec{f}_g + \vec{f}_{ie} = -\frac{\mathcal{G} m_T m}{R_T^2} \vec{u}_r + m \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\text{soit } \vec{P} = m \vec{g} \text{ avec } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G} m_T}{R_T^2} \vec{u}_r + \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

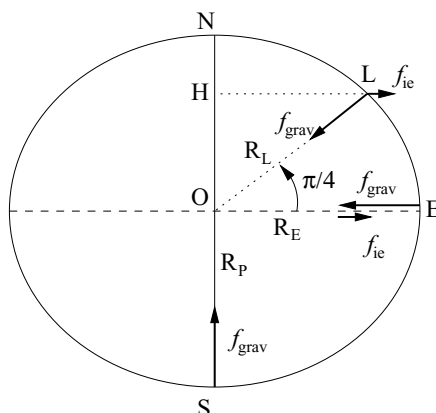
- b) La force d'inertie de Coriolis n'a d'effet significatif que pour les objets dont la vitesse est grande (plus de 50 ou 100 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ou sur des durées importantes (plus d'une heure)

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

où $\vec{v}_r$ est la vitesse relative, donc mesurée dans le référentiel terrestre. Comme les axes du repère d'étude sont en général définis par rapport à l'horizontale et à la verticale du lieu du laboratoire, il faut au préalable projeter le vecteur $\vec{\Omega}$ (qui est selon l'axe sud-nord des pôles) dans ce repère, en utilisant l'angle λ appelé latitude.

Exemple

Le rayon terrestre au pôle sud est $R_p = 6\,357\text{ km}$ et en un point de l'équateur $R_E = 6\,378\text{ km}$. La constante de gravitation est $\mathcal{G} = 6,674 \cdot 10^{-11}\text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et la masse de la Terre est $m_T = 5,972 \cdot 10^{24}\text{ kg}$. La ville de Limoges est presque sur le 45° parallèle et le rayon terrestre y vaut $R_L = 6\,371\text{ km}$. Évaluons le champ de pesanteur en ces trois points.



- Au pôle sud, on est sur l'axe de rotation, donc la force d'inertie d'entraînement axifuge est nulle et le poids est égal à la force de gravitation, soit

$$g_S = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_p^2} = 9,863\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- Sur l'équateur, la force d'inertie d'entraînement axifuge est verticale vers le haut donc

$$g_E = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_E^2} - \Omega^2 R_E = 9,798 - 0,034 = 9,755\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- À Limoges, la force de gravitation est dirigée vers le centre de la Terre et a pour norme $f_{\text{grav}} = \frac{\mathcal{G} m_T m}{R_L^2} = 9,8195 \cdot m$. Le rayon du cercle décrit par Limoges lorsque la Terre tourne est $HL = R_L \cos \frac{\pi}{4} = 4\,504\text{ km}$. La force d'inertie d'entraînement axifuge a donc pour norme

$$f_{ie} = m \Omega^2 HL = 0,024 \cdot m$$

La somme vectorielle des deux vecteurs donne un vecteur qui est dirigé vers un point de l'axe des pôles un peu plus au sud que le centre de la Terre. On en déduit la norme

$$g_L = \sqrt{\left(9,8195 - 0,024 \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(0,024 \sin \frac{\pi}{4}\right)^2} = 9,803\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

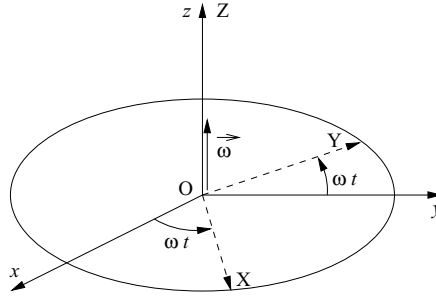
↪ **Exercices 1.12, 1.13, 1.14, 1.15 1.16, 1.17.**

Énoncés des exercices

1.1

Composition des vitesses, des accélérations

Un manège est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. À la date $t = 0$, $\theta = 0$ et l'axe (O, X) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, x) du sol, l'axe (O, Y) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, y) du sol, et les axes verticaux (O, Z) et (O, z) sont confondus.



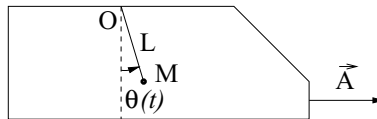
Un promeneur, initialement en O , marche sur le plateau du manège à la vitesse relative constante $\vec{v}_r = v_0 \vec{u}_X$ dans le référentiel du manège. On exprimera tous les vecteurs dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

- Déterminer les coordonnées de ses vecteurs vitesse relative et d'entraînement à la date t . En déduire celles du vecteur vitesse absolue.
- Déterminer les coordonnées de ses vecteurs accélération relative, d'entraînement et de Coriolis à la date t .
- Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du promeneur.
- Vérifier les lois cinématiques de composition des vitesses et des accélérations en retrouvant les coordonnées de $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$.

1.2

Étude d'un pendule simple dans un référentiel en translation

Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur L , et d'un point matériel M de masse m . Son extrémité O est accrochée au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A \vec{u}_x$. L'angle d'inclinaison du fil est notée $\theta(t)$.



- Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi de la quantité de mouvement.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi du moment cinétique en O .
- Déterminer l'angle d'équilibre θ_{eq} .
- On étudie les petites oscillations autour de la position d'équilibre en posant

$$\theta(t) = \theta_{eq} + \varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \ll 1$$

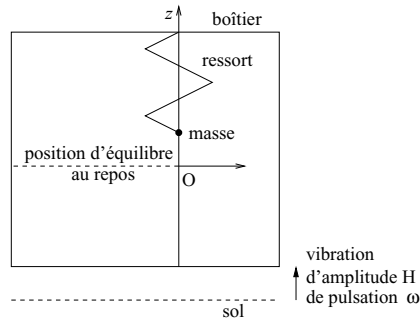
Établir l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$ et en déduire la période T des petites oscillations en fonction de A , g et L .

1.3
Poids apparent dans un ascenseur

On considère un parpaing posé sur un capteur qui mesure le poids apparent du parpaing, égal à la force normale qu'il subit, dans une cage d'ascenseur. Celle-ci se trouve initialement au 2^e étage et se met en mouvement à partir de $t = 4$ s. On constate un poids apparent de 113 N entre 4 et 6 secondes, de 100 N entre 6 et 10 secondes puis de 87 N entre 10 et 12 secondes. Déterminer la masse du parpaing, et estimer l'étage d'arrivée.

1.4
Sismographe

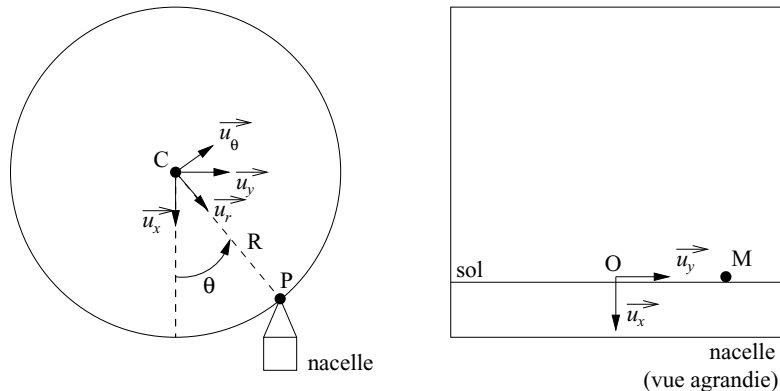
Un sismographe est constitué d'un boîtier parallélépipédique posé à même le sol, et qui bouge avec lui. Un ressort de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 , de constante de raideur k , est accroché au couvercle supérieur. Un mobile ponctuel M, de masse m , y est accroché et coulisse sur un axe vertical en subissant une force de frottement fluide linéaire, de coefficient λ . On repère la position de M par sa cote mesurée sur un axe vertical (O, z) dirigé vers le haut, l'origine O étant un point fixe du boîtier correspondant à la position d'équilibre au repos du mobile. Lors d'un séisme, le sol a un mouvement d'oscillation verticale dans le référentiel terrestre supposé galiléen donc le boîtier a un mouvement sinusoïdal d'amplitude H et de pulsation ω .



Établir l'équation différentielle vérifiée par z et en déduire l'amplitude des oscillations de la masse en fonction de ω . Conclure sur la fonction du sismographe.

1.5
Mouvement dans une nacelle de grande roue

Une nacelle dans une grande roue est une cabine restant toujours horizontale, dont l'extrémité supérieure P est animée d'un mouvement circulaire uniforme de centre C, de rayon R à la vitesse angulaire Ω . On repère la position de la capsule par l'angle $\theta = \Omega t$ entre la verticale et $\overrightarrow{CP}$.



On travaillera successivement dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et on donne

$$\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y \text{ et } \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y$$

- Le vecteur position de P dans le référentiel terrestre galiléen $\mathcal{R}_0$ est $\vec{CP}$. Déterminer son vecteur vitesse $\vec{V}$ et son vecteur accélération $\vec{A}$ dans $\mathcal{R}_0$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ puis dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de t (on rappelle que $\theta = \Omega t$ où Ω est une constante).
- Le référentiel $\mathcal{R}$ de la nacelle est-il galiléen ou pas ?
- Est-il en rotation ou en translation ?
- Un mobile M de masse m est posé sur le sol de la nacelle où il glisse. Sa position est donc repérée par $\vec{OM} = y\vec{u}_y$. Écrire la loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel $\mathcal{R}$ en supposant qu'en plus des forces réelles et d'inertie, il subit une force de frottement $-\alpha\vec{v}$.
- À quelle condition sur R , Ω et g M ne décolle-t-il jamais ?
- Écrire dans ce cas l'équation différentielle vérifiée par y .
- Donner l'expression de l'amplitude Y_0 des oscillations de M en régime sinusoïdal forcé.

1.6

Expulsion centrifuge

Sur une tige rectiligne horizontale OE de longueur L, définissant l'axe (O, x) , un point matériel M de masse m coulisse sans frottement. Cette tige est reliée à un arbre vertical (O, z) qui l'entraîne dans un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$.

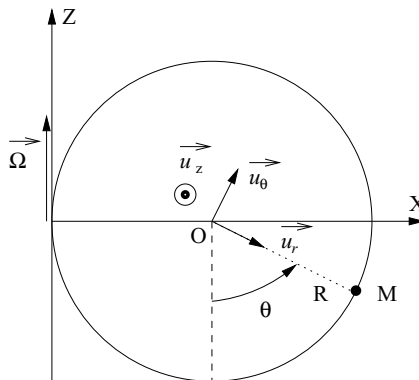
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
- Résoudre cette équation en prenant comme condition initiale à $t = 0$: $x = 0$ et $\dot{x} = v_0$.
- En déduire la date t_f à laquelle M quitte la tige en $x = L$ (on pourra utiliser l'inconnue auxiliaire $E = e^{\Omega t}$).

1.7

Bague coulissant sur un cerceau en rotation

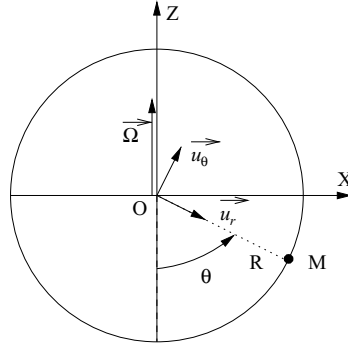
Un point matériel M de masse m s'apparente à une bague qui coulisse sans frottement sur le pourtour d'un cerceau de centre O et de rayon R.

- Le cerceau tourne autour d'une de ses tangentes verticales formant l'axe Z, à la vitesse angulaire Ω . On pose $\vec{OM} = R\vec{u}_r$ et on travaille dans le référentiel non galiléen en rotation du cerceau.



Établir l'équation différentielle vérifiée par θ : $R\ddot{\theta} = -g \sin\theta + R\Omega^2 (1 + \sin\theta) \cos\theta$. Décrire comment on pourrait déterminer la ou les position(s) d'équilibre puis étudier les petites oscillations autour de celle(s)-ci.

b) Le cerceau tourne autour d'un de ses diamètres verticaux formant l'axe (O,Z), à la vitesse angulaire Ω . On pose $\vec{OM} = R\vec{u}_r$ et on travaille dans le référentiel non galiléen en rotation du cerceau.

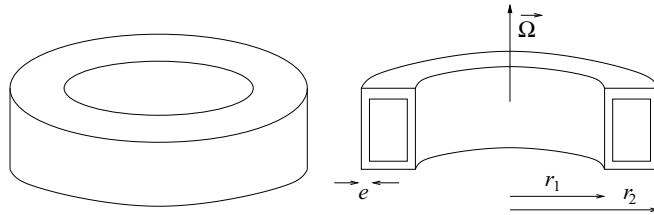


- i) Dans le référentiel en rotation, on note H le projeté orthogonal de M et on pose $\vec{HM} = \rho\vec{u}_\rho$. Donner l'expression de la force d'inertie d'entraînement subie par M.
- ii) Cette force dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement Ep_{ie} avec $\vec{f}_{ie} = -\frac{dEp_{ie}}{d\rho}\vec{u}_\rho$. En déduire Ep_{ie} en prenant la référence sur l'axe en $\rho = 0$.
- iii) Déterminer les angles correspondant à l'équilibre et discuter leur stabilité selon la valeur de Ω .

1.8

■ ■ ■ ■ ■ Simulateur de gravité

Pour remédier aux troubles physiques que ressentent les astronautes en apesanteur, on envisage d'équiper une navette spatiale d'un module simulateur de gravité. Il est constitué d'un tore de section rectangulaire, de rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 , creux, d'épaisseur des parois e . Ce tore tourne autour de son axe à la vitesse angulaire Ω . Un point M est repéré, dans le référentiel du simulateur, en coordonnées cylindriques dans la base ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$).



La navette est en voyage intersidéral à vitesse constante, loin de tout astre massif.

- a) Donner l'expression de Ω qui permet de simuler la gravité terrestre g_0 dans le module en rotation. Faire l'application numérique avec $r_1 = 15$ m, $r_2 = 20$ m, $e = 1,0$ m et $g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- b) Décrire qualitativement le mouvement et les sensations physiques d'un astronaute qui saute « verticalement ».
- c) Étudier complètement les forces subies par un astronaute qui court à la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_\theta$.

1.9

Orbite circulaire

Un corps ponctuel de masse m est satellisé en mouvement circulaire uniforme de rayon r et de période T autour du centre O d'un astre à symétrie sphérique de masse m_A . Le référentiel astre-corps est le référentiel en rotation autour de l'axe (O, z) orthogonal au plan de la trajectoire de M , et dans lequel celui-ci est fixe. En traduisant l'équilibre de M dans ce référentiel, établir la troisième loi de Kepler.

1.10

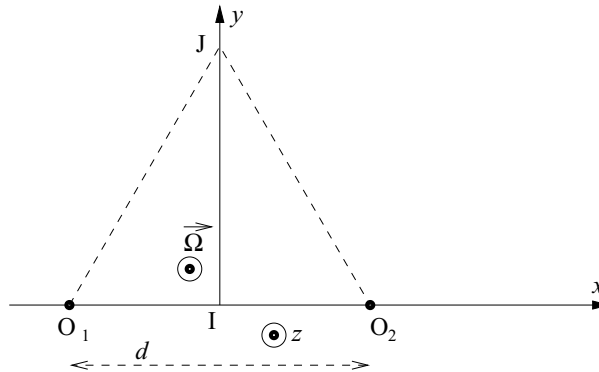
Points de Lagrange

On considère deux étoiles de même masse m_S en interaction gravitationnelle, dont la distance d reste constante. On peut démontrer dans ce cas que leurs centres O_1 et O_2 ont des mouvements circulaires uniformes de centre I , milieu fixe de ces points, de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{2Gm_S}}$$

Une planète assimilée à un point matériel M de masse $m \ll m_S$ est soumise à l'attraction gravitationnelle de ces deux étoiles. On se place dans le référentiel non galiléen de centre I en rotation uniforme autour de l'axe (I, z) orthogonal au plan d'évolution des centres de deux étoiles, et dans lequel ces deux points sont immobiles.

- On place M sur l'axe (I, x) , à l'abscisse x . Justifier l'existence de trois positions d'équilibre de la planète. Justifier qualitativement que ces trois points, nommés points de Lagrange L_1 , L_2 et L_3 , sont instables vis-à-vis de leur mouvement sur l'axe (I, x) .
- On place M au point J tel que $(O_1 O_2 J)$ est un triangle équilatéral direct.



Montrer que c'est une position d'équilibre.

- J est le quatrième point de Lagrange, L_4 . Le cinquième point L_5 est le symétrique de L_4 par rapport à I . Dans le référentiel en rotation, l'énergie potentielle de M est la somme des énergies potentielles de gravitation exercées par les deux étoiles et de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement axifuge. Quand on trace en trois dimensions la surface d'équation $Z = Ep(x, y)$, la position L_4 correspond à un maximum absolu local. Pourtant, c'est une position d'équilibre stable pour des petits mouvements. Justifier cette affirmation en étudiant qualitativement les petits mouvements d'un mobile initialement placé en L_4 , auquel on communique une vitesse initiale dans le plan (I, x, y) . **Complément culturel** : la théorie la plus communément admise par les astrophysiciens, au sujet de l'émergence de la Lune est la suivante : une planète de masse proche de celle de Mars ($5 \cdot 10^{23}$ kg ?), appelée Theia, s'est formée en L_4 du système Soleil-Terre, mais en a été délogée par les perturbations gravitationnelles des autres planètes, elle s'est écrasée sur la Terre, et les éclats de cet impact se sont rassemblés puis refroidis pour former la Lune.

1.11
Forces de marée

La lune est assimilée à un corps sphérique de centre O_L , de rayon $R_L = 1,73 \cdot 10^6$ m et de masse $m_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg. Elle est en orbite circulaire de rayon

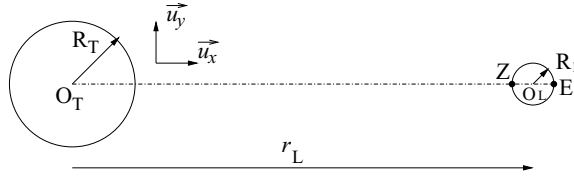
$$r_L = O_T O_L = 3,85 \cdot 10^8 \text{ m}$$

et de période $T_L = 27,5 \text{ j} = 2,38 \cdot 10^6$ s autour de la Terre elle-même sphérique, immobile de masse $m_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6,38 \cdot 10^6$ m. Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le centre de la Lune est en mouvement circulaire uniforme. Le référentiel $\mathcal{R}_{TL}$ dans lequel le centre de la Terre O_T et celui de la Lune O_L sont immobiles est non galiléen, en rotation uniforme à la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_L} = 2,64 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

par rapport à $\mathcal{R}$.

On s'intéresse à deux plaques du sol lunaire, assimilées à des points immobiles de même masse m , Z et E, alignées avec O_T et O_L , Z du côté de la face visible de la Lune, E du côté de la face cachée. On exprimera les vecteurs forces dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.



- a) La Lune est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}_{TL}$. En déduire l'identité

$$r_L \Omega^2 = \frac{\mathcal{G} m_T}{r_L^2}$$

- b) Donner, pour Z puis pour E, l'expression des trois forces à distance qu'ils subissent :
- la force de gravitation exercée par la Terre ;
 - la force de gravitation exercée par la Lune ;
 - la force d'inertie d'entraînement
- en fonction des différentes variables de l'énoncé.
- c) Pour un corps M à la surface de la Lune, on appelle forces de marée $\vec{f}_m(M)$ la résultante de la force de gravitation exercée par la Terre et de la force d'inertie d'entraînement. Établir que

$$\vec{f}_m(Z) = m\Omega^2 r_L \left[\frac{r_L - R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L - R_L)^2} \right] \vec{u}_x$$

$$\text{et } \vec{f}_m(E) = m\Omega^2 r_L \left[\frac{r_L + R_L}{r_L} - \frac{r_L^2}{(r_L + R_L)^2} \right] \vec{u}_x$$

- d) On suppose $R_L \ll r_L$. Donner une expression approchée des forces de marée, montrer qu'elles ont tendance à soulever les plaques de la surface lunaire et calculer numériquement leur valeur pour $m = 1$ kg. Conclure.

1.12

Rotation des cyclones

Une dépression importante se crée en un point de l'hémisphère nord. Les vents convergent à grande vitesse vers ce point. Dans quelles directions respectives sont déviés le vent qui vient du nord, celui qui vient de l'est, celui qui vient du sud, celui qui vient de l'ouest ? Dans quel sens le cyclone tourne-t-il vu depuis un satellite ?

1.13

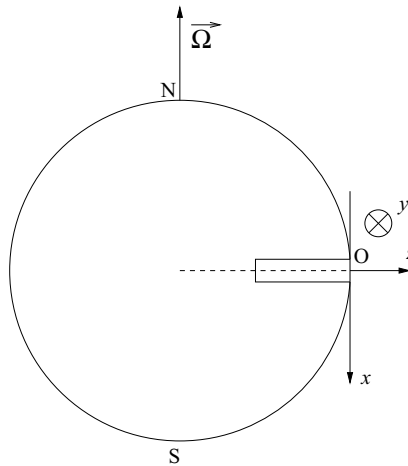
Vents dominants dans l'hémisphère nord

On adopte un point de vue très simple pour modéliser les vents dominants dans l'hémisphère nord. Entre le tropique du Cancer et l'équateur, l'air surchauffé monte en altitude. Ce mouvement crée une dépression en basse altitude qui provoque un vent thermique du nord vers le sud en basse altitude. L'air chaud tropical en haute altitude se déplace à son tour du sud vers le nord pour fermer la boucle de convection. Ces vents thermiques de haute altitude peuvent atteindre des vitesses très importantes. En déduire la direction de ces vents dits **géostrophiques** dans l'hémisphère nord.

1.14

Déviations vers l'est

Un caillou M de masse m est lâché sans vitesse initiale au centre O de la bouche d'un puits vertical, cylindrique, de rayon $R = 30,0$ cm, creusé en un point de l'équateur. La position de M est repérée par ses coordonnées cartésiennes selon les notations du schéma suivant.



Le référentiel terrestre est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique galiléen, à la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

a) Déterminer les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en supposant que

$$\Omega \dot{y} \ll g$$

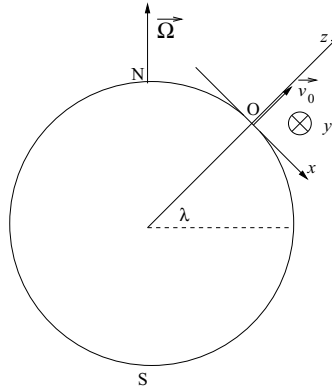
ce qui permettra de négliger un terme devant un autre.

b) Dans quelle direction géographique la pierre est-elle déviée par rapport à la verticale ?

c) Calculer à quelle profondeur dans le puits la pierre va heurter la paroi latérale du puits.

1.15
Tir vers le zénith

Un corps M de masse m est lancé verticalement vers le haut, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$, depuis un point O sur le sol situé sur le parallèle terrestre repéré par l'angle λ . Dans le référentiel terrestre non galiléen, en rotation uniforme autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique galiléen, à la vitesse angulaire $\Omega = \frac{2\pi}{86164}$, M est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ (la verticale est assimilée au rayon terrestre) et à la force d'inertie de Coriolis.



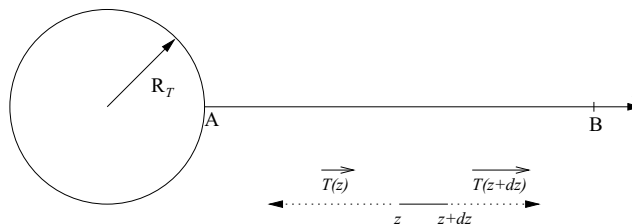
- Pourquoi l'énoncé n'évoque-t-il pas la force d'inertie d'entraînement ?
- Déterminer les composantes du vecteur $\vec{\Omega}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de Ω , $C = \cos \lambda$ et $S = \sin \lambda$.
- Établir le système d'équations différentielles vérifiées par x , y , z .
- On établit sans difficulté particulière les équations horaires

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} SC g t^2 + \frac{SCg}{4\Omega^2} [\cos(2\Omega t) - 1] + \frac{SCv_0}{2\Omega} \sin(2\Omega t) - SCv_0 t \\ y(t) = \frac{Cg}{2\Omega} t - \frac{Cg}{4\Omega^2} \sin(2\Omega t) + \frac{Cv_0}{2\Omega} [\cos(2\Omega t) - 1] \\ z(t) = -\frac{1}{2} S^2 g t^2 + \frac{C^2 g}{4\Omega^2} [\cos(2\Omega t) - 1] + \frac{C^2 v_0}{2\Omega} \sin(2\Omega t) + S^2 v_0 t \end{cases}$$

Dans les premières secondes du mouvement, Ωt est un très petit angle. En déduire les équations horaires approchées en effectuant les développements limités au deuxième ordre en (Ωt) . M est-il dévié vers l'est, l'ouest, le sud, le nord ?

1.16
Ascenseur spatial

Un câble de masse linéique $\mu = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ est accroché au sol en un point A de l'équateur. Sa longueur est $L = 100\,000 \text{ km}$. Il se dresse verticalement, son extrémité B est libre et la tension en ce point est nulle. On donne, pour la Terre : $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $m_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $T_T = 86\,164 \text{ s}$ et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

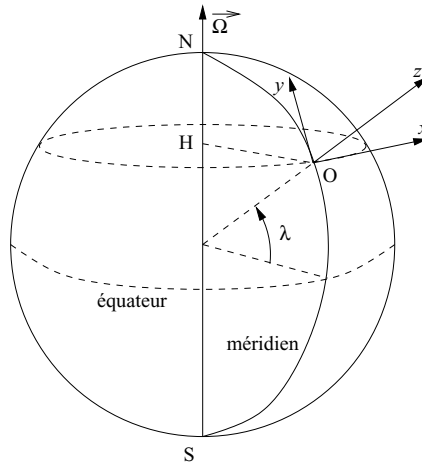


- Établir l'expression de l'altitude z_{GS} de l'orbite géostationnaire.
- Le tronçon de câble $[z, z + dz]$ est en équilibre dans le référentiel non galiléen terrestre en rotation uniforme. On note $T(z)$ la norme de la tension du câble à l'altitude z , on a représenté sur le schéma les forces de tension. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$ et donner l'expression de $T(z)$. En déduire la tension en A et faire l'application numérique.
- Une cabine d'ascenseur monte à vitesse constante le long du câble. Pourquoi cela risque-t-il de faire fléchir le câble ? Comment remédier à cet inconvénient ? Quel est le poids d'un occupant de la cabine, de masse m , lorsque la cabine est à l'altitude z ?
- Quel intérêt un tel dispositif aurait-il ?

1.17

■ ■ ■ ■ Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un pendule simple dont le fil inextensible, accroché au sommet S du dôme du Panthéon à Paris, de latitude $\lambda = 48,85^\circ$, a une longueur $L = 67$ m et soutient un mobile M de masse $m = 28$ kg. L'intensité de la pesanteur est $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note O le point du sol à la verticale de S. Les axes du repère sont (O, x) dirigé vers l'est, (O, y) vers le nord et (O, z) vertical vers le haut.



- L'amplitude des oscillations du pendule est supposée suffisamment faible pour qu'on puisse supposer que M reste dans le plan horizontal. En déduire que la tension du fil s'écrit $\vec{T} \approx -\frac{mg}{L} \vec{SM}$.
- En déduire que x et y vérifient le système d'équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\beta \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\beta \dot{x} \end{cases}$$

en précisant les expressions de ω_0 et β en fonction de L , g , Ω et λ . Vérifier que $\beta \ll \omega_0$.

- On définit la variable complexe $\rho(t) = x(t) + iy(t)$. Établir l'équation différentielle vérifiée par ρ et la résoudre en prenant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = a \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$$

- En déduire $x(t)$ et $y(t)$ et montrer que le mouvement de M correspond à des allers-retours quasi rectilignes selon un segment de centre O et de longueur $2a$ qui tourne très lentement à une vitesse angulaire Ω_F qu'on précisera. En déduire la période T_F du pendule de Foucault.

Du mal à démarrer ?

1.1

On doit ici appliquer précisément les formules du cours, et persévérer jusqu'à parfaite adéquation entre les formules cinématiques obtenues de façon directe et les formules de composition.

1.2

Le pendule doit être étudié dans la base cylindrique. Les composantes des vecteurs vitesse et accélération relative sont celles du cours de première année. Les composantes des vecteurs forces réelles et de la force d'inertie d'entraînement font apparaître le sinus et le cosinus de θ . Il faut persévérer jusqu'à obtenir rigoureusement la même équation différentielle par les deux méthodes.

1.3

Le mouvement de l'ascenseur est la succession d'une phase d'accélération vers le haut, (pendant laquelle le poids apparent du parpaing est plus grand que son poids réel), d'une phase à vitesse constante (poids apparent égal au poids réel), et d'une phase de décélération (poids apparent plus petit que le poids réel). Après avoir calculé les accélérations de la cabine d'ascenseur pendant les trois phases, on en déduit son altitude finale.

1.4

La masse est soumise à son poids, à la force de frottement, à celle du ressort, et à la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel en translation oscillatoire verticale.

1.5

Cet exercice comporte un piège, la nacelle n'est pas en rotation, mais en translation circulaire. La loi de la quantité de mouvement doit donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement qu'on détermine grâce au résultat de la question (a). La condition de non-décollage se traduit par la non-annulation de N quel que soit t . La fin de l'exercice nécessite le passage au formalisme complexe.

1.6

L'établissement de l'équation différentielle demande du soin mais ne pose pas de difficulté si on utilise la méthode préconisée dans le cours. Pour sa résolution, on prend garde à ne pas confondre l'équation avec celle d'un oscillateur harmonique.

1.7

La question (a) ne pose pas de difficulté particulière, sinon de nature géométrique dans la projection de $\vec{HM}$ dans la base cylindrique. Dans la question (b), on détermine Ep_{ie} , on lui ajoute Ep_p et on remarque que la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas. Puis on étudie, comme dans tous les problèmes à un degré de liberté conservatifs, l'annulation de la dérivée première et la positivité de la dérivée seconde de $Ep(\theta)$.

1.8

Il faut avant tout identifier où se trouve le sol pour l'astronaute, puis identifier la force d'inertie axifuge à la pesanteur simulée. Tant que l'astronaute est immobile, il ne subit pas de force de Coriolis, mais lorsqu'il bouge, dans les questions (b) et (c), cette force provoque des perturbations subtiles dans le ressenti de l'astronaute.

1.9

À l'équilibre du corps dans le référentiel en rotation, la vitesse relative est nulle donc la force d'inertie de Coriolis est nulle, et l'accélération relative est nulle donc la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement est nulle. Parler de

poids ici serait un grave hors sujet, on n'est pas immobile à la surface de l'astre.

1.10

Les trois forces subies par M sont les deux forces de gravitation et la force d'inertie d'entraînement axifuge selon $\vec{IM}$. À l'équilibre, la somme des forces est nulle. En exprimant Ω , qui apparaît dans la force d'inertie, en fonction de T , on peut exprimer cette somme de forces en fonction de $\mathcal{G}$, m_S , m et des distances fonctions de x sur l'axe (O_1O_2) et de d en J .

1.11

La relation établie à la question (a) s'apparente à la troisième loi de Kepler, on peut l'établir selon la méthode de l'exercice 1.9. La force d'inertie axifuge doit être exprimée avec soin pour distinguer la distance entre Z et l'axe de rotation, et celle entre E et l'axe.

1.12

Un dessin en perspective du globe terrestre et l'application de l'une des règles géométriques de détermination de la direction et du sens du produit vectoriel (celle des trois doigts de la main droite par exemple) permet d'identifier la direction et le sens des forces de Coriolis sur chacun des quatre vents. On en déduit le sens de rotation du cyclone.

1.13

Le texte de l'énoncé donne implicitement la direction et le sens des vents pour lesquels on détermine le sens et la direction de la force de Coriolis.

1.14

Une écriture précise du PFD appliqué à la pierre dans le RNG terrestre conduit à un système d'équations différentielles en x , y , z , dont la résolution est assez facile en négligeant un terme comme proposé par l'énoncé.

1.15

L'établissement du système d'équations différentielles en (x, y, z) est facilité par l'écriture soignée des composantes de tous les vecteurs cinématiques, puis de tous les vecteurs forces (sans oublier la force de Coriolis) selon la méthode préconisée dans le cours. Le développement limité au deuxième ordre des fonctions cosinus et sinus conduit à des expressions très simples des équations horaires, qui permettent de conclure.

1.16

On détermine z_{GS} grâce à la troisième loi de Kepler par exemple. Après avoir écrit la somme des forces sur le tronçon de câble, on fait apparaître la dérivée de $T(z)$ en faisant le développement limité en dz de $T(z + dz)$.

1.17

L'exercice est très guidé jusqu'à la question (b). Le système d'équations différentielles en (x, y) se ramène à une équation unique en $\underline{\rho}$ en utilisant un coefficient imaginaire pur. La résolution de l'équation en complexes se fait comme en réels, on résout l'équation caractéristique en simplifiant le discriminant grâce à $\beta \ll \omega_0$, puis on exprime la solution générale sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients complexes de deux exponentielles complexes. On utilise les conditions initiales pour déterminer les deux coefficients, qu'on simplifie eux aussi. On identifie enfin $x(t)$ à la partie réelle et $y(t)$ à la partie imaginaire de $\underline{\rho}$.