TSI
1re année

Nicolas Nguyen
Walter Damin
Mathieu Fontes
Christophe Jan

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

3e édition

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

NOUVEAUX PROGRAMMES

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques TSI-1

3e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Nicolas NGUYEN
Professeur au lycée François Rabelais (Saint-Brieuc)

Walter DAMIN
Professeur au lycée Pierre-Paul Riquet (Saint-Orens-de-Gameville)

Mathieu FONTES
Professeur au lycée Louis Barthou (Pau)

Christophe JAN
Professeur au lycée du Parc (Lyon)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

À la mémoire de notre regrettée collègue Layla Pharamond

Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-067493
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Préface

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme et de remédier à quelques mauvais réflexes. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique et de chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Premier semestre

1. Logique et raisonnements 3
2. Ensembles et applications 29
3. Pratique calculatoire en algèbre 51
4. Pratique calculatoire en analyse 89
5. Nombres complexes 119
6. Étude globale des fonctions 147
7. Fonctions usuelles 175
8. Géométrie élémentaire dans le plan 201
9. Géométrie élémentaire dans l'espace 231
10. Équations différentielles linéaires 257
11. Systèmes linéaires 283
12. Dénombrement 311

Deuxième semestre

13. Nombres réels et suites numériques 333
14. Limite et continuité des fonctions 363
15. Dérivabilité 393
16. Intégration sur un segment 417
17. Développements limités 445
18. Polynômes 467
19. Calcul matriciel 493
20. Espaces vectoriels et applications linéaires 523
21. Espaces vectoriels de dimension finie 549
22. Représentations matricielles 577
23. Probabilités sur un univers fini 609
24. Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini 641

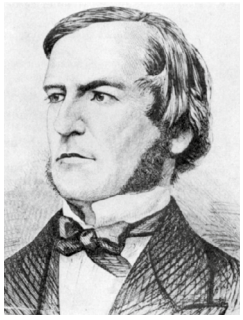
Annexes

Formulaire 667
Index des notations 673
Index 674

Premier semestre

Chapitre 1
Logique et raisonnements

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement. Au milieu du XIX^{e}, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur. Au tournant du XX^{e} siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- Manipuler les quantificateurs.
- Raisonner par implication ou par équivalence.
- Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

et plus si affinités

- Appliquer une récurrence forte.
- Raisonner par analyse-synthèse.

Résumé de cours

Notions de logique

Définition : Proposition —. *Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).*

Définition : Négation d'une proposition —. *Soit P une proposition. On appelle **négation** de P et on note non P la proposition définie par :*

- *non P est vraie lorsque P est fausse ;*
- *non P est fausse lorsque P est vraie.*

Définition : Conjonction de deux propositions —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle conjonction de P et Q la proposition notée P et Q, et définie de la manière suivante :*

- *P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies ;*
- *P et Q est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*

Définition : Disjonction de deux propositions —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle disjonction de P et Q la proposition notée P ou Q, et définie de la manière suivante :*

- *P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;*
- *P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.*

Définition : Implication —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle implication de Q par P la proposition non P ou Q. Cette proposition se note $P \Rightarrow Q$.*

Vocabulaire : *la proposition $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou encore « **si** P **alors** Q »*

Remarque : lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q, ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.

Définition : Réciproque —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle réciproque de $P \Rightarrow Q$ l'implication $Q \Rightarrow P$.*

Définition : Équivalence —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle équivalence de P et Q la proposition $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. Cette proposition se note $P \Leftrightarrow Q$.*

Vocabulaire : *la proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P **si et seulement si** Q ».*

Remarque : lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q. Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Table de vérité des connecteurs logiques :

P	Q	*non P*	*P et Q*	*P ou Q*	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : d'après cette table de vérité, si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.

Définition : Contraposée —. *Soit P et Q deux propositions. On appelle contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ l'implication non $Q \Rightarrow$ non P*

Théorème 1.1.— Soit P et Q deux propositions. L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (non\ Q \Rightarrow non\ P)}$$

Proposition 1.2.— Soit P et Q deux propositions. Alors :

- $non\ (P\ et\ Q) \Longleftrightarrow\ (non\ P)\ ou\ (non\ Q)$
- $non\ (P\ ou\ Q) \Longleftrightarrow\ (non\ P)\ et\ (non\ Q)$
- $non\ (P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow\ P\ et\ (non\ Q)$

■ Quantificateurs

Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.

Définition : Quantificateur universel —. *On écrit :*

$$\boxed{\forall x \in E,\ P(x)}$$

pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E.

Vocabulaire : *le symbole $\forall$ est appelé* ***quantificateur universel*** *et se lit « **quel que soit** ».*

Définition : Quantificateur existentiel —. *On écrit :*

$$\boxed{\exists x \in E,\ P(x)}$$

pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.

Vocabulaire : *le symbole $\exists$ est appelé* ***quantificateur existentiel*** *et se lit « **il existe** ».*

Proposition 1.3.— Négation des propositions avec quantificateurs —.

- La négation de la proposition
$$\forall x \in E,\ P(x)$$
est :
$$\exists x \in E,\ non\ P(x).$$
- La négation de la proposition
$$\exists x \in E,\ P(x)$$
est :
$$\forall x \in E,\ non\ P(x).$$

Remarque : attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

■ Raisonnement par récurrence

Théorème 1.4.— Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ —. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.5.— Principe de récurrence —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.6.— Récurrence double —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- les propriétés $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- pour tout entier $n \geqslant n_0$, ($\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$) implique $\mathcal{P}(n+2)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.7.— Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs) —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\Big(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}(n)\Big)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Méthodes

Démontrer une proposition

❑ Méthode 1.1.— Comment démontrer une proposition par déduction
Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**. C'est un principe très simple que l'on utilise en permanence : si l'on sait qu'une proposition P est vraie (propriété du cours, résultat d'une question antérieure...) et que l'on sait démontrer $P \Rightarrow Q$, alors on a démontré que la proposition Q est vraie.

Exemple : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$.
On a $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$. Or, $(x-2)^2 \geqslant 0$ (le carré d'un réel est positif) et $1 > 0$. Par conséquent, $(x-2)^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Mise en œuvre : tous les exercices !

❑ Méthode 1.2.— Comment démontrer une proposition par disjonction de cas
On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une démonstration par **disjonction de cas**. En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E, puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ en distingant les cas n pair ou impair.
• Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
• Si n est impair, on a $n = 2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (2p+1)(p+1) \in \mathbb{N}$.
Finalement, pour tout entier naturel n, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.5, exercice 1.6.

❑ Méthode 1.3.— Comment démontrer une proposition par l'absurde
Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**. Pour cela, on suppose que P est fausse et on démontre que l'on aboutit alors à une contradiction.

Exemple : montrons par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres. Pour cela, on suppose qu'il existe un entier naturel N_0 supérieur à tous les autres. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N_0$. La relation est donc vraie pour l'entier $n = N_0 + 1$, donc $N_0 + 1 \leqslant N_0$; d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Mise en œuvre : exercice 1.9, exercice 1.12.

■ Démontrer une implication

❑ Méthode 1.4.— Comment démontrer une implication par raisonnement direct
Pour montrer directement l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La démonstration commence par « supposons que P est vraie » et se termine par « Q est vraie ».

Exemple : démontrer que, pour x et y réels,

$$x^2 = y^2 \Longrightarrow |x| = |y|.$$

Soit x et y deux réels tels que $x^2 = y^2$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$, soit $(x - y)(x + y) = 0$.
Par conséquent, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Ainsi, $x = y$ ou $x = -y$, ce qui signifie que $|x| = |y|$ (x et y sont égaux ou opposés). On a donc démontré l'implication attendue.

❑ Méthode 1.5.— Comment démontrer une implication par contraposition
Le raisonnement par contraposition est basé sur le **théorème 1.1** :

l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.

Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que l'implication *non* $Q \Rightarrow$ *non* P est vraie. En pratique, on suppose donc que *non* Q est vraie et on montre que *non* P est vraie.

Exemple : soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

La proposition à démontrer s'écrit : « n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair ». Nous allons raisonner par contraposition en démontrant la proposition (équivalente) : « n n'est pas pair $\Rightarrow$ n^2 n'est pas pair », c'est-à-dire « n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair ». Considérons un entier impair n : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p+1$, où $p = 2k^2+2k$. Par conséquent, n^2 est un entier impair, ce qui démontre l'implication : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, nous avons donc montré l'implication : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple : montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Nous allons de nouveau utiliser la contraposée en démontrant l'implication « $1+x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ». Soit x un réel tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = (1 + x) - 1$. Or $1 + x$ est un nombre rationnel (hypothèse), et 1 aussi. Par conséquent, $(1 + x) - 1$ est un nombre rationnel, ce qui montre que $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, on a démontré l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Mise en œuvre : exercice 1.8

❑ **Méthode 1.6.— Comment démontrer une implication par l'absurde**
L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition *non* P *ou* Q, sa négation est donc P *et non* Q. Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$:

- on suppose que P est vraie et que Q est fausse ;
- on montre que cela aboutit à une contradiction.

Exemple : soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. En raisonnant par l'absurde, montrer que, si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, alors $x = y$.
On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ **et** $x \neq y$ (P est vraie, Q est fausse). Alors :

$$x(1+x) = y(1+y),$$

donc $x^2 - y^2 = y - x$, soit $(x-y)(x+y) = y - x$, d'où $(x-y)(x+y+1) = 0$. Comme $x \neq y$, on en déduit que $x + y + 1 = 0$, donc $x + y = -1$. Or, x et y étant positifs, leur somme ne peut être négative : nous obtenons une contradiction. D'où le résultat.

■ Démontrer une équivalence

❑ **Méthode 1.7.— Comment démontrer une équivalence par double implication**
Par définition, l'équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ » est la proposition « $P \Rightarrow Q$ *et* $Q \Rightarrow P$ ». Démontrer par double implication l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, c'est démontrer que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. En pratique, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ par double implication :

- on démontre $P \Rightarrow Q$;
- puis on démontre $Q \Rightarrow P$.

Dans ce cas, il y a donc deux démonstrations à faire pour obtenir l'équivalence.

Exemple : on pose $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$. Nous allons prouver cette équivalence en raisonnant par double implication.
• $\boxed{\Rightarrow}$ Si $m = 0$, f est constante et égale à 1, elle garde donc un signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$.
• $\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, montrons que, si f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $m = 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $m \neq 0$. On a alors :

$$f(x) = m\left(x + \frac{1}{m}\right),$$

et f change de signe en $-\frac{1}{m}$ (du signe de m pour $x > -\frac{1}{m}$, du signe de $-m$ pour $x < -\frac{1}{m}$). Ainsi, si $m \neq 0$, f change de signe sur $\mathbb{R}$.
Nous avons montré les deux implications. Ainsi, f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
On va raisonner par double implication.
• Si x est solution de l'équation, alors $(2x)^2 = x^2 + 1$, soit $4x^2 = x^2 + 1$, d'où $3x^2 = 1$. On obtient donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

• Réciproquement, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont-ils solutions de l'équation ? Si x est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est solution mais $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne l'est pas.
Finalement, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

❑ **Méthode 1.8.— Comment démontrer une équivalence par raisonnement direct**
Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut également enchaîner les équivalences. On passe de P à Q par une succession d'équivalences en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'équivalence est bien conservée.
Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations. Il n'est pas toujours possible d'appliquer cette méthode directe pour démontrer une équivalence. Il est parfois nécessaire de procéder par double implication (**méthode 1.7**).

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
Pour $x < 0$, l'équation n'a pas de solution (un nombre strictement négatif ne peut pas être égal à une racine carrée). Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} 2x = \sqrt{x^2+1} &\iff (2x)^2 = (\sqrt{x^2+1})^2 \qquad (\text{car } 2x \text{ et } \sqrt{x^2+1} \text{ sont positifs}) \\ &\iff 4x^2 = x^2+1 \\ &\iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (\text{car } x \text{ est positif}) \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mise en œuvre : exercice 1.7.

■ Utiliser un contre-exemple

❑ **Méthode 1.9.— Comment utiliser un contre-exemple**
La négation de la proposition $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E, non\ P(x) \gg$.
Si l'on souhaite démontrer qu'une proposition du type $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ est fausse, il suffit de trouver une valeur de x de E pour laquelle la proposition $P(x)$ est fausse. On parle alors de **contre-exemple**.

Exemple : la fonction sinus n'est pas paire. Par exemple, $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq \sin(-\frac{\pi}{2})$.

Exemple : la proposition « tout entier naturel est somme de trois carrés » est-elle vraie ?
On peut facilement vérifier que cette proposition est vraie pour tout entier $n \in \{0, \cdots, 6\}$. Par exemple, $0 = 0^2+0^2+0^2$ et $5 = 2^2+1^2+0^2$. En revanche, la proposition est fausse pour $n = 7$. Sinon, on pourrait écrire $7 = a^2+b^2+c^2$, avec nécessairement $a, b, c \in \{0, \cdots, 2\}$ (puisque $3^2 = 9$). Mais, avec trois des carrés 0^2, 1^2 et 2^2, il est impossible de former 7. Ainsi, 7 constitue un contre-exemple et la proposition énoncée est donc fausse.

Mise en œuvre : voir le Vrai/Faux.

■ Raisonner par analyse-synthèse

❑ Méthode 1.10.— Comment raisonner par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Ce raisonnement se déroule en deux étapes.

- Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- Phase de **synthèse** : on montre que ces conditions obtenues sont suffisantes et on résout le problème.

En pratique, on démontre que, si x est solution du problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (phase d'analyse) ; on vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (phase de synthèse).

Exemple : montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Analyse. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$$

Comme g est paire et h impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$$

En sommant les deux égalités précédentes, on en déduit que $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
De même, en retranchant ces deux égalités, il vient $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.
Synthèse. Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.
• La fonction g est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

• La fonction h est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

• Enfin, on a $f = g + h$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Par conséquent, nous avons démontré par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (g, h), avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Mise en œuvre : exercice 1.10 et exercice 1.11.

■ Raisonner par récurrence

❑ Méthode 1.11.— Comment appliquer une récurrence simple

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **simple**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- on vérifie que la proposition est vraie au rang initial n_0 ;
- on suppose que la proposition est vraie à un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la proposition est vraie au rang n ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$;
- on conclut (« ainsi, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ »).

Exemple : montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

• $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$.

• On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On déduit de cette hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+n+1 &= (1+2+\cdots+n)+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$. Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exemple : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on introduit la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1 \text{ »}.$$

• $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1\times 1! = 1$, $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ et $1 = 1$.

• On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1.$$

D'après cette hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{aligned} 1\times 1! + \cdots + (n+1)\times(n+1)! &= 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! + (n+1)\times(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1+n+1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$. Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.13, exercice 1.14.

❑ **Méthode 1.12.— Comment appliquer une récurrence double**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **double**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- on vérifie que la proposition est vraie aux deux rangs initiaux n_0 et n_0+1 ;
- on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$, où n est un entier fixé supérieur ou égal à n_0 (« on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+2$;
- on conclut (« ainsi, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ »).

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n.$$

On effectue une récurrence double en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{«}u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n\text{»}.$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $u_0 = 1$ et $4 \times 2^{0+1} - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1$.
- $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = -5$ et $4 \times 2^{1+1} - 7 \times 3^1 = 16 - 21 = -5$.
- On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé, c'est-à-dire :

$$u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}.$$

En utilisant l'égalité donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n, on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n = 5(4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n) \\ &= 20 \times 2^{n+2} - 35 \times 3^{n+1} - 24 \times 2^{n+1} + 42 \times 3^n \\ &= 2^{n+1}(2 \times 20 - 24) + 3^n(42 - 35 \times 3) = 16 \times 2^{n+1} - 63 \times 3^n \\ &= 4 \times 2^2 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^2 \times 3^n = 4 \times 2^{n+3} - 7 \times 3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Par récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.15, exercice 1.16.

❑ **Méthode 1.13.— Comment appliquer une récurrence forte**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **forte**, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- on vérifie que la propriété est vraie au rang initial n_0 ;
- on suppose que la propriété est vraie du rang n_0 **jusqu'à** un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la propriété est vraie aux rangs $n_0, n_0+1, \cdots, n$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$;
- on conclut (« ainsi, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ »).

Exemple : montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « n s'écrit comme un produit de nombres premiers ».
Ici le rang initial n_0 est égal à 2.
• $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $2 = 2$ et 2 est un nombre premier !
• Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé. On suppose que $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire que tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ peut se décomposer en produit de nombres premiers. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ($n+1$ se décompose en un produit de nombres premiers). Il y a deux cas :

- Si $n+1$ est premier, il n'y a rien à faire ($n+1 = n+1$ et $n+1$ est un nombre premier !)
- Si $n+1$ n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n+1 = pq$, où p et q sont des entiers compris entre 2 et n. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p et q (p et q appartiennent à $[\![2, n]\!]$ donc $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$ sont vraies) : p et q se décomposent en produit de nombres premiers. Il en est alors de même pour leur produit $pq = n+1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$. On vient de démontrer, par récurrence forte, que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Mise en œuvre : exercice 1.17.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. $\forall x < 2,\ x^2 < 4$	☐	☐
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$	☐	☐
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.	☐	☐
4. La négation de « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ ».	☐	☐
5. La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « le jour, aucun chat n'est gris »	☐	☐
6. La réciproque de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait nuit »	☐	☐
7. La contraposée de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait jour ».	☐	☐
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leqslant n$	☐	☐
9. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$	☐	☐
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \geqslant n+1$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Logique et propositions

Exercice 1.1 : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La négation de « f est une fonction paire » est « f est une fonction impaire ».
2. Lorsque la proposition (P *et* Q) est vraie, la proposition (P *ou* Q) l'est aussi.
3. Lorsque la proposition (P *ou* Q) est vraie, la proposition (P *et* Q) l'est aussi.
4. La négation de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition $P \Rightarrow$ *non* Q.
5. Lorsque P est fausse et $P \Rightarrow Q$ vraie, alors Q est également fausse.
6. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$.
7. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.
8. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+,\ y < \sqrt{x}$.

Exercice 1.2 : Donner la négation des propositions ou affirmations suivantes.

1. S'il pleut, je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. $2 \leqslant x < y$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 1.3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des propositions suivantes.

1. La suite (u_n) est majorée par 4.
2. La suite (u_n) est majorée.
3. La suite (u_n) n'est pas majorée.
4. La suite (u_n) est bornée.
5. La suite (u_n) est croissante.
6. La suite (u_n) est constante.
7. La fonction f est la fonction nulle.
8. La fonction f s'annule.
9. La fonction f est croissante.
10. La fonction f admet un maximum.

Exercice 1.4 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Traduire par une phrase chacune des propositions suivantes.

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$
3. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
4. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$
5. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Modes de raisonnement

Exercice 1.5 : Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Exercice 1.6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 1| = 4 - |3x - 2|$.

Exercice 1.7 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes
1. $|2x-5| = |x^2-4|$
2. $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$
3. $\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1$
4. $\sqrt{x-1} \geqslant x-7$

Exercice 1.8 : Raisonnements par contraposition.
1. Soit a un réel. Démontrer l'implication :

$$\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon \Rightarrow a = 0.$$

2. Soit $n_1, n_2, \cdots, n_9$ des entiers naturels vérifiant $n_1 + \cdots + n_9 = 90$.
Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure à 30.

Exercice 1.9* : Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
On rappelle qu'un réel est un nombre rationnel s'il peut s'écrire $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers.

Exercice 1.10* : Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(n) + f(m).$$

Exercice 1.11* : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 1.12 :** Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

■ Récurrences

Exercice 1.13 : Sommes des carrés, des cubes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :
1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 1.14 : Montrer par récurrence les propriétés suivantes.
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0! + 1! + \cdots + n! \leqslant (n+1)!$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 1.15 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Que peut-on dire de (u_n) ?

Exercice 1.16* : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2\cos x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2(\cos x)u_{n+1} - u_n.$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\cos(nx).$$

Exercice 1.17 :** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 1.18* : Suite de Fibonacci. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \qquad (*)$$

On traitera cet exercice sans déterminer le terme général de la suite (u_n).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.

3. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$.

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$.

Indications

Ex. 1.9

Raisonnement par l'absurde !

Ex. 1.10

Raisonner par analyse-synthèse.

Ex. 1.11

Dans la partie analyse de l'analyse-synthèse, on commencera par montrer que $f(0) = 1$.

Ex. 1.12

Raisonner par l'absurde en supposant que cet ensemble $\mathcal{P}$ est fini et, si l'on note $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, considérer l'entier $N = p_1 \times \cdots \times p_k + 1$.

Ex. 1.14

Pour la deuxième question, comment traduit-on le fait qu'un entier est divisible par un autre ?

Ex. 1.17

On pourra appliquer une récurrence forte.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	V	F	F	V	F	V	F	F

1. C'est évidemment faux ! Par exemple, $-3 < 2$ mais $(-3)^2 > 4$ (**méthode 1.9**).

2. Les solutions de l'équation $x^2 = 4$ sont 2 et -2. L'équivalence correcte est :

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2).$$

3. On peut raisonner par disjonction des cas (**méthode 1.2**).
• Si n est pair, alors le produit $n(n+1)$ est pair.
• Si n est impair, alors $n+1$ est pair, et le produit $n(n+1)$ est pair.
Dans le deux cas, $n(n+1)$ est un entier pair.

4. Il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$).
La négation de « f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ».

5. Cette proposition est de la forme $(P \Rightarrow Q)$, où P est la proposition « il fait nuit » et Q la proposition « tous les chats sont gris ». D'une manière générale, la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \textit{ et non } Q)$, soit ici « la nuit, au moins un chat n'est pas gris ».

6. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa réciproque est $(Q \Rightarrow P)$, c'est-à-dire « si tous les chats sont gris, il fait nuit ».

7. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa contraposée est $(\textit{non } Q \Rightarrow \textit{non } P)$, c'est-à-dire « si un chat au moins n'est pas gris, alors il fait jour ».

8. La proposition signifie qu'on peut toujours trouver un entier supérieur à un réel fixé, c'est vrai ! Si x est un réel fixé, et N sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x), on a $N \leqslant x < N+1$ et $N+1$ est un entier supérieur à x.

9. La proposition signifie qu'il existe un entier supérieur ou égal à tous les réels, ce qui est faux ($\mathbb{R}$ est non borné). Ces deux exemples nous montrent bien l'importance de l'ordre des quantificateurs.

10. Cette inégalité est fausse pour $n = 1$ et $n = 2$. En revanche, on peut démontrer (par récurrence) qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. C'est faux : une fonction qui n'est pas paire n'est pas nécessairement impaire ! Par exemple, la fonction exponentielle n'est ni paire, ni impaire.

2. C'est vrai : si la proposition (P *et* Q) est vraie, P et Q sont toutes les deux vraies donc (P *ou* Q) aussi.

3. C'est faux : si P est vraie et Q fausse, alors (P *ou* Q) est vraie mais (P *et* Q) est fausse.

4. C'est faux. En effet, $P \Rightarrow Q$ est la proposition (*non* P *ou* Q), sa négation est (P *et non* Q) alors que $P \Rightarrow$ *non* Q est la proposition (*non* P *ou non* Q). Lorsque P est fausse, (P *et non* Q) est fausse, mais (*non* P *ou non* Q) est vraie.

5. C'est faux puisque, si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est automatiquement vraie (que Q soit vraie ou pas).

✎ *$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).*

6. C'est vrai en prenant $a = 0$ (la proposition signifie qu'il existe un réel dont la valeur absolue est inférieure à tout réel positif).

7. C'est vrai en prenant, par exemple $a = \frac{\varepsilon}{2}$. La proposition signifie que l'on peut toujours trouver un réel dont la valeur absolue est strictement inférieure à un réel strictement positif fixé.

8. La proposition est vraie. Soit y un réel fixé. En posant $x = (|y|+1)^2 \in \mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{x} = |y| + 1$, donc $\sqrt{x} > y$. ▲

Exercice 1.2

1. Cette phrase est de la forme $P \Rightarrow Q$, sa négation est (P *et non* Q), soit : « il pleut et je ne prends pas mon parapluie ».

✎ *$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).*

2. L'affirmation comporte successivement un quantificateur universel $\forall$ (chaque été) et un quantificateur existentiel (il existe un jour durant lequel il a plu). La négation est donc « il y a eu un été en Bretagne sans aucun jour de pluie ». Cette dernière affirmation est évidemment fausse du point de vue météorologique...

3. La négation est : « il y a eu au moins un jour sans pluie l'été dernier en Bretagne ».

4. Cette double inégalité s'écrit aussi ($2 \leqslant x$ *et* $y > x$). Sa négation est : ($x < 2$ *ou* $x \geqslant y$).

5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$. ▲

✎ *non$(P \Rightarrow Q)$ est (P et non Q).*

Exercice 1.3

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 4$.

2. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

✎ *Dans* **2**, *M est* ***un*** *majorant de (u_n).*

3. On donne la négation de la proposition précédente :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$$

Corrigé

✎ *$C = max(|m|, |M|)$*

4. $\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$. On peut également écrire :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant C$$

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

6. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C$

7. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

8. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

9. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R},\ x \geqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$.

✎ *f admet son maximum en a.*

10. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a)$ ▲

Exercice 1.4

1. La fonction f ne s'annule pas sur I.

2. La fonction f prend au moins deux valeurs différentes sur I. Autrement dit, f n'est pas constante sur I.

3. Si la fonction f s'annule, alors c'est forcément en 0. Autrement dit, f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais elle ne s'y annule pas nécessairement).

✎ *On dit que f est surjective pour* **4**, *injective pour* **5** *(voir le chapitre* **applications***).*

4. La fonction f prend toutes les valeurs réelles.

5. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur. ▲

Exercice 1.5

✎ **Méthode 1.2**

Nous allons montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
Pour cela, raisonnons par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• **Premier cas :** $x \geqslant 1$. Dans ce cas, $|x-1| = x-1$ et :

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(x-1) = x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1,$$

quantité positive. Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.

• **Deuxième cas :** $x < 1$. On a alors $|x-1| = -(x-1)$, d'où :

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geqslant 0,$$

ce qui montre que, pour $x > 1$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$. ▲

Exercice 1.6

On a $|x+1| = x+1$ *ssi* $x+1 \geqslant 0$ et $|3x-2| = 3x-2$ *ssi* $3x-2 \geqslant 0$. Partant de ces remarques, on raisonne par disjonction de cas, en considérant trois cas.

• **Premier cas :** $x \geqslant \frac{2}{3}$. On a alors $|x+1| = x+1$ et $|3x-2| = 3x-2$. L'équation équivaut à $x+1 = 4-(3x-2)$, soit $x = \frac{5}{4}$. Comme $\frac{5}{4} \geqslant \frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ est solution.

• **Deuxième cas :** $x \leqslant -1$. Dans ce cas, $|x+1| = -x-1$ et $|3x-2| = 2-3x$. L'équation équivaut à $-x-1 = 4+3x-2$, soit $x = -\frac{3}{4}$ qui ne convient pas puisque $-\frac{3}{4} > -1$.

• **Troisième cas :** $x \in]-1, \frac{2}{3}[$. Dans ce dernier cas, $|x+1| = x+1$, $|3x-2| = 2-3x$ et l'équation équivaut à $x+1 = 4+3x-2$, soit $x = -\frac{1}{2}$. Comme $-\frac{1}{2} \in]-1, \frac{2}{3}[$, $-\frac{1}{2}$ est effectivement solution.

Finalement, l'équation a deux solutions : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$. ▲

Exercice 1.7

On résout ces équations ou inéquations par équivalences, en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'on conserve bien une équivalence.

1. La valeur absolue d'un nombre est égale à C ($C \in \mathbb{R}_+$) si et seulement si ce nombre est égal à C ou à $-C$. Par conséquent,

Lorsque $C \geqslant 0$, $|X| = C \Leftrightarrow X = \pm C$.

$$\begin{aligned} |2x-5| = |x^2-4| &\Leftrightarrow 2x-5 = x^2-4 \text{ ou } 2x-5 = -(x^2-4) \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-9 = 0 \end{aligned}$$

L'unique solution de la première équation est 1, les solutions de la deuxième équation sont $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$. Les solutions de l'équation sont donc 1, $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$.

2. Les nombres $\sqrt{|x-3|}$ et $|x-1|$ étant tous les deux positifs, on a :

Lorsque A et B sont de même signe, $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{|x-3|} = |x-1| &\Leftrightarrow |x-3| = (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x-3 = (x-1)^2 \text{ ou } x-3 = -(x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x-3 = x^2-2x+1 \text{ ou } x-3 = -x^2+2x-1 \\ &\Leftrightarrow x^2-3x+4 = 0 \text{ ou } x^2-x-2 = 0 \end{aligned}$$

Le premier trinôme n'a pas de racine réelle et les racines du second sont -1 et 2. Par conséquent, les solutions de l'équation sont -1 et 2.

$\Delta < 0$ pour le premier trinôme.

3. Si $x < 1$, l'équation n'a clairement pas de solution (car alors $\sqrt{|x-3|} \geqslant 0$ et $x-1 < 0$). Lorsque $x \geqslant 1$, $\sqrt{|x-3|}$ et $x-1$ sont positifs. Ainsi,

Attention à ne pas élever au carré sans la précaution $x \geqslant 1$.

Lorsque A et B sont positifs, $A \leqslant B \Leftrightarrow A^2 \leqslant B^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{|x-3|} \leqslant x-1 &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } |x-3| \leqslant (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -(x-1)^2 \leqslant x-3 \leqslant (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -x^2+2x-1 \leqslant x-3 \leqslant x^2-2x+1 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } x^2-x-2 \geqslant 0 \text{ et } x^2-3x+4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le premier trinôme a pour racines -1 et 2 donc $x^2-x-2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty,-1] \cup [2,+\infty[$. Par ailleurs, le discriminant du second trinôme étant strictement négatif, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-3x+4 > 0$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[2,+\infty[$.

Ne pas oublier que $x \geqslant 1$.

4. L'inéquation est définie pour $x \geqslant 1$. Par ailleurs, tout réel $x \in [1,7]$ est solution de l'inéquation (si $x \in [1,7]$, le membre de gauche de l'inégalité est positif, celui de droite est négatif). Enfin, pour $x \geqslant 7$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et on obtient une inéquation équivalente en élevant au carré :

$\sqrt{a}$ existe ssi $a \geqslant 0$

Pour $A, B \geqslant 0$, $A \geqslant B \Leftrightarrow A^2 \geqslant B^2$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \geqslant x-7 \text{ et } x \geqslant 7 &\Leftrightarrow x-1 \geqslant (x-7)^2 \text{ et } x \geqslant 7 \\ &\Leftrightarrow x-1 \geqslant x^2-14x+49 \text{ et } x \geqslant 7 \\ &\Leftrightarrow x^2-15x+50 \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 7. \end{aligned}$$

Les solutions de $x^2-15x+50 = 0$ étant 5 et 10, on a $x^2-15x+50 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [5,10]$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1,10]$. ▲

Corrigé

Exercice 1.8

1. Raisonnons par contraposition en prouvant l'implication :

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ |a| \geqslant \varepsilon.$$

Soit $a \neq 0$. En cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant \varepsilon$. Le réel $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ convient : en effet, $|a| \geqslant \frac{|a|}{2}$ et $\frac{|a|}{2} > 0$ puisque $a \neq 0$. On a donc établi (par contraposition) l'implication attendue.

✎ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. Quitte à réordonner $n_1, n_2, \cdots, n_9$, on peut supposer que $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$. Nous allons raisonner par contraposition en montrant que :

✎ *$n_7 + n_8 + n_9$ est la plus grande somme formée à partir de ces 9 entiers.*

$$n_7 + n_8 + n_9 < 30 \Rightarrow n_1 + \cdots + n_9 \neq 90.$$

Supposons que $n_7 + n_8 + n_9 < 30$. Comme $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$, on a :

$$n_1 + n_2 + n_3 \leqslant n_4 + n_5 + n_6 \leqslant n_7 + n_8 + n_9 < 30.$$

Par conséquent, $n_1 + \cdots + n_9 < 3 \times 30$, d'où $n_1 + \cdots + n_9 \neq 90$. D'où le résultat par contraposition. ▲

Exercice 1.9

✎ **Méthode 1.3**

On raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel : il existe des entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On suppose (quitte à la simplifier) que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Comme $q\sqrt{2} = p$, on a $2q^2 = p^2$, ce qui montre que p^2 est pair, donc p l'est aussi. On peut donc écrire $p = 2p'$, où $p' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2$, d'où $q^2 = 2p'^2$. Cela montre que q^2 est pair, donc q aussi : $q = 2q'$, avec $q' \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible puisque $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$. Contradiction ! ▲

✎ *Voir l'exemple de la* **méthode 1.5**

Exercice 1.10

Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(m) + f(n).$$

On a alors $f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$, puis, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1),$$

ce qui montre que f est une fonction de la forme $n \mapsto \lambda n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Supposons maintenant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \lambda n$. Alors :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = \lambda(m+n) = \lambda m + \lambda n = f(m) + f(n),$$

donc f vérifie la condition indiquée.

Conclusion. Les fonctions f solutions du problème sont les fonctions de la forme $n \mapsto \lambda n$, où λ est un réel. ▲

Exercice 1.11

On raisonne de nouveau par analyse-synthèse.
Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y. \qquad (*)$$

En prenant $x = y = 0$ dans cette relation, on obtient $f(0)^2 = f(0)$, soit $f(0)(f(0) - 1) = 0$. On a donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Mais si $f(0) = 0$, alors, en prenant $x = 0$ et $y = 1$, la relation $(*)$ donne $0 = 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $f(0) = 1$. On en déduit que :

Relation $(*)$ appliquée à $y = 0$ et x quelconque.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1.$$

Synthèse. On suppose maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$. Alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y,$$

ce qui montre que f vérifie la relation $(*)$.
Conclusion. L'unique fonction vérifiant la relation $(*)$ est $f : x \mapsto x + 1$. ▲

Exercice 1.12

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini k de nombres premiers. En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on peut donc écrire $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, où $p_1, \cdots, p_k$ sont des nombres premiers. On introduit alors l'entier naturel $N = p_1 \cdots p_k + 1$. Montrons que N n'est divisible par aucun des p_i ($i \in [\![1, k]\!]$). S'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que p_i divise N, alors on peut écrire $N = q \times p_i$, avec $q \in \mathbb{N}$. On a alors $q \times p_i = p_1 \cdots p_k + 1$, soit :

Preuve par contraposition.

$$p_i \times \underbrace{(q - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k)}_{s} = 1.$$

Ainsi, p_i et s sont deux entiers dont le produit vaut un : chacun des deux est donc égal à 1 ou à -1. En particulier, p_i vaut 1 ou -1, il n'est donc pas premier. Finalement, on a montré (par contraposition) que N n'est divisible par aucun des p_i. On en déduit que N est un nombre premier. Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $N > p_i$. On a donc trouvé un nombre premier qui n'est égal à aucun des p_i. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{P}$ a au moins $k + 1$ éléments, ce qui est contradictoire ! En définitive, l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini. ▲

Exercice 1.13

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
• $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.
• On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Alors :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right] \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6). \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $2n^2+7n+6$ étant -2 et $-\frac{3}{2}$, on en déduit que :

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\times 2(n+2)(n+\frac{3}{2})=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note cette fois $\mathcal{P}(n)$: « $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».
• $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1=\frac{1\times 4}{4}$.
• Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n\geqslant 1$ fixé : $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Alors :

On retrouvera les deux sommes de cet exercice dans le chapitre **Calcul algébrique**.

$$1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)$$
$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. ▲

Exercice 1.14

Dans les deux cas, on applique une récurrence simple.

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0!+1!+\cdots+n!\leqslant(n+1)!$ ».
• $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $0!=1$ et $(0+1)!=1!=1$.
• On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$: $0!+1!+\cdots+n!\leqslant(n+1)!$. Alors :

$$\underbrace{0!+1!+\cdots+n!}_{\leqslant(n+1)!\text{ d'après }\mathcal{P}(n)}+(n+1)!\leqslant(n+1)!+(n+1)!.$$

$2\leqslant n+2$

Or $2(n+1)!\leqslant(n+2)!$ puisque $(n+2)!=(n+2)(n+1)!$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et on a démontré l'inégalité attendue par récurrence sur n.

2. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « 9 divise 10^n-1 ».

0 est divisible par tout entier non nul !

• $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $10^0-1=1-1=0$ et 0 est divisible par 9.
• On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire que 9 divise 10^n-1, ce qui équivaut à dire qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $10^n-1=9k$. Alors :

a divise b ssi il existe $c\in\mathbb{Z}$, $b=ac$.

$$10^{n+1}-1=10\times 10^n-1=10(9k+1)-1=9\times 10k+9=9(10k+1),$$

ou encore $10^{n+1}-1=9k'$, avec $k'=10k+1$. Cela signifie que 9 divise $10^{n+1}-1$: c'est $\mathcal{P}(n+1)$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, 9 divise 10^n-1. ▲

Exercice 1.15

On effectue une récurrence double en notant, pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n):\ «u_n=u_0+nr».$$

• $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0=u_0+0\times r$ et $u_1=u_0+u_1-u_0=u_0+r$.
• On suppose que, pour $n\in\mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire :

$$u_n=u_0+nr\qquad\text{et}\qquad u_{n+1}=u_0+(n+1)r.$$

Comme $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n = 2[u_0 + (n+1)r] - (u_0 + nr) \\ &= u_0 + [2(n+1) - n]r = u_0 + (n+2)r, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On déduit de l'égalité démontrée que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $r = u_1 - u_0$. ▲

Exercice 1.16

On effectue une récurrence double en notant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \ \ll u_n = 2\cos(nx) \gg.$$

• $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 = 2 = 2\cos 0$ et $u_1 = 2\cos x$.
• On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies :

$$u_n = 2\cos(nx) \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2\cos[(n+1)x].$$

On en déduit que :

✎ *Hypothèse de récurrence au rang n et n + 1, formules d'addition et formules de duplication.*

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2(\cos x)u_{n+1} - u_n = 2(\cos x)2\cos[(n+1)x] - 2\cos nx \\ &= 4\cos x(\cos nx\ \cos x - \sin nx\ \sin x) - 2\cos nx \\ &= 2\cos nx(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x\ \sin x\ \sin nx \\ &= 2\cos 2x\cos nx - 2\sin 2x\sin nx = 2(\cos 2x\cos nx - \sin 2x\sin nx) \\ &= 2\cos[(n+2)x], \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.17

On applique une récurrence forte. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$ ».
• $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = 2^0(0+1)$ ($p = q = 0$ conviennent).
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. On veut montrer que $n+1$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$, où $p, q \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas :

✎ *Tout $k \in [\![1, n]\!]$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$.*

– si $n+1$ est impair, n est pair et le résultat est évident. En effet, il suffit de prendre $p = 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$. On a alors $n + 1 = 2q + 1$.
– si $n+1$ est pair, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n + 1 = 2k$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à k : il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^p(2q+1)$. Ainsi, $n + 1 = 2k = 2 \times 2^p(2q+1) = 2^{p+1}(2q+1)$.
Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et on a démontré le résultat attendu par récurrence forte. ▲

Corrigé

Exercice 1.18

1. Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

✎ *Récurrence double : on suppose le résultat vrai aux rangs n **et** $n+1$, on le démontre au rang $n+2$*

• L'inégalité est vraie aux rangs 0 et 1 puisque $u_0 = 1 \geqslant 0$ et $u_1 = 1 \geqslant 1$.

• On suppose que l'inégalité est vraie aux rangs n et $n+1$: $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$. D'après la relation $(*)$, on a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geqslant n+1+n$. Si $n = 0$, alors $u_2 = 2 \geqslant 2$ et si $n \geqslant 1$, alors $n + n + 1 \geqslant n + 2$. Cela montre que l'inégalité est vraie au rang $n+2$. Par récurrence double, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ *Théorème de comparaison*

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On démontre cette fois l'égalité à l'aide d'une récurrence simple.

• L'égalité est vraie au rang 1 puisque $u_1^2 - u_0 u_2 = 1^2 - 1 \times 2 = -1 = (-1)^1$.

• On suppose que $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après la relation $(*)$, on a :

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1},$$

c'est-à-dire, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - [u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^n] - u_n u_{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}(u_n + u_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

car $u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$ d'après $(*)$. Ainsi, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^{n+1}$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$. Par conséquent, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On effectue de nouveau une récurrence simple.

• L'égalité est vraie au rang 1 car $u_1 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$.

• On suppose que l'égalité est vraie au rang $n \geqslant 1$. On a alors :

$$u_1 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n+1} = (u_1 + \cdots + u_{2n-1}) + u_{2n+1} = u_{2n} - 1 + u_{2n+1}.$$

Or, $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$ d'après la relation $(*)$; d'où :

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} = u_{2n+2} - 1,$$

ce qui démontre l'égalité au rang $n+1$ et termine la récurrence.

4. Encore une récurrence simple !

• L'égalité est vraie au rang 0 puisque $u_0 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$.

• On suppose que l'égalité est vérifiée au rang n, alors :

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1} &= (u_0 + \cdots + u_n) + u_{n+1} = u_{n+2} - 1 + u_{n+1} \\ &= u_{n+3} - 1, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de $(*)$. Ainsi, l'égalité est vraie au rang $n+1$ et, par récurrence simple, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Chapitre 2

Ensembles et applications

UN MATHÉMATICIEN



Le mathématicien et astronome indien **Brahmagupta** a développé des méthodes très sophistiquées en arithmétique. C'est dans ses écrits que l'on rencontre pour la première fois l'usage du zéro et de nombres négatifs et il manie les racines carrées avec habileté. Il résout des équations du premier et même du second degré. C'est à son époque que l'on voit apparaître la numération de position en base 10 mais il ne semble pas en être l'initiateur.

Un peu d'histoire

Les Sumériens et les Babyloniens avaient déjà élaboré des méthodes de calcul, surprenantes pour l'époque.

La numération de position, inventée par les Indiens vers le VI^{e} siècle puis généralisée par les Arabes, s'introduit lentement en Occident à la fin du Moyen Âge ; elle permet d'élaborer des algorithmes pour les opérations simples. L'introduction des logarithmes au tout début du XVII^{e} siècle a permis d'effectuer des calculs sur des très grands nombres, ce qui a entraîné de spectaculaires progrès en astronomie.

L'émergence de l'informatique, en particulier des tableurs, mais aussi l'arrivée des calculatrices de poche, ont modifié totalement notre rapport au calcul, mais pourtant, un bon maniement du calcul mental reste un garde-fou salutaire pour éviter des erreurs.

Objectifs

les incontournables

- Savoir démontrer l'égalité de deux ensembles.
- Savoir montrer qu'une application est (ou n'est pas) injective, surjective, bijective.
- Déterminer l'application réciproque d'une application bijective.
- Déterminer l'image directe ou réciproque d'une partie.

Résumé de cours

Ensembles

Définition : *Soit E un ensemble. On dit que x est un élément de E lorsque x appartient à E. On note alors $x \in E$. Lorsque x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.*

Définition : *On appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.*

Définition : *Soit A et B deux ensembles.*

- *On dit que A est inclus dans B lorsque tout élément de A est un élément de B. On note alors $A \subset B$.*
- *On dit que les ensembles A et B sont égaux lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$. On note $A = B$.*

Définition : *Soit E un ensemble. On dit que A est un sous-ensemble (ou une partie) de E lorsque $A \subset B$.*

Notation : *si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.*

Définition : Opérations sur les parties d'un ensemble —. *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On appelle*

- ***réunion** de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$;*
- ***intersection** de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$;*
- ***complémentaire** de A dans E l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$.*
- ***différence** de A et B l'ensemble $A \setminus B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.*

Notation : *le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E se note aussi $\complement_E A$ ou $E \setminus A$.*

Proposition 2.1.— Distributivité —. Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.

- L'intersection est distributive par rapport à la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive par rapport à l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition 2.2.— Lois de Morgan —. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Définition : Produit cartésien de deux ensembles —. *Soit E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y), avec $x \in E$ et $y \in F$:*

$$E \times F = \{(x, y)\ ;\ x \in E,\ y \in F\}.$$

Définition : Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles —. *Soit $E_1, \cdots, E_p$ des ensembles. On appelle p-uplet ou p-liste $(x_1, \cdots, x_p)$ la donnée de $x_1 \in E_1, \cdots, x_p \in E_p$ dans cet ordre. L'ensemble des p-uplets $(x_1, \cdots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, \cdots, x_p \in E_p$ est appelé **produit cartésien** de $E_1, \cdots, E_p$. On le note $E_1 \times \cdots \times E_p$:*

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \cdots, x_p)\ ;\ x_1 \in E_1, \cdots\ x_p \in E_p\}.$$

Notation : *pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ l'ensemble des p-uplets formés d'éléments appartenant tous à E.*

■ Applications

Définition : Application —. *Une **application** f est définie par :*

- *un ensemble de départ (ou de définition) E ;*
- *un ensemble d'arrivée F ;*
- *la donnée, pour tout $x \in E$, d'un unique élément de F noté $f(x)$, appelé image de x par f.*

On parle d'application (ou de fonction) de E dans F et on note

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Notation : *l'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.*

Vocabulaire : *soit f une application de E dans F et $y \in F$. Lorsqu'il existe un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f.*

Définition : Famille d'éléments —. *Soit E un ensemble et I un ensemble fini. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i\in I}$ une telle famille.*

Définition : Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble —. *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** de A et on note $\mathbf{1}_A$ la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par :*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Définition : Composée de deux applications —. *Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle **composée** de f par g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \to & G \\ & x & \mapsto & g\left(f(x)\right) \end{array}$$

Définition : Application identité —. *Soit E un ensemble. On appelle application **identité** de E (ou **application identique** sur E) et on note Id_E l'application de E dans E définie par*

$$\begin{array}{rccc} Id_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Proposition 2.3.— Pour toute application f de E dans E, on a $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_E \circ f = f$.

Définition : Restriction d'une application —. *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle **restriction** de f à A et on note $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par*

$$\begin{array}{rccc} f_{|A} : & A & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

■ Image directe, image réciproque

Définition : Image directe —. *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle* ***image directe*** *de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par :*

$$\boxed{f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F,\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}\,.}$$

Définition : Image réciproque —. *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et B une partie de F. On appelle* ***image réciproque*** *de B par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par :*

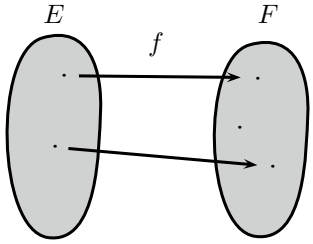
$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}\,.}$$

Remarque : À retenir $\boxed{y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ y = f(x) \qquad\qquad x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B}$

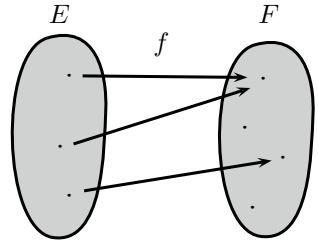
■ Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition : Application injective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***injective*** *(ou que f est une* ***injection****) lorsque tout élément de F possède* ***au plus*** *un antécédent par f ; c'est-à-dire lorsque :*

$$\boxed{\forall (x, x') \in E \times E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.}$$



f est injective

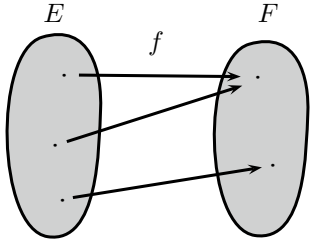


f n'est pas injective

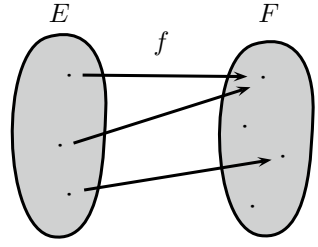
Théorème 2.4.— Composée de deux injections —. La composée de deux applications injectives est injective.

Définition : Application surjective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***surjective*** *(ou que f est une* ***surjection****) lorsque tout élément de F possède* ***au moins*** *un antécédent par f ; c'est-à-dire lorsque :*

$$\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).}$$



f est surjective

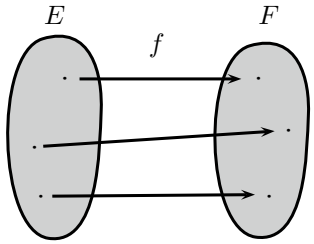


f n'est pas surjective

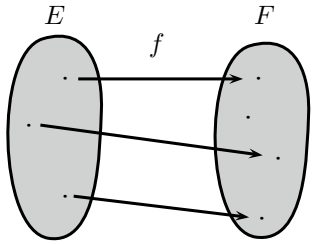
Théorème 2.5.— Composée de deux surjections —. La composée de deux applications surjectives est surjective.

Définition : Application bijective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***bijective*** *(ou que f est une* ***bijection****) lorsque f est à la fois injective et surjective. Autrement dit, f est bijective lorsque tout élément de F possède* ***un unique*** *antécédent par f.*

Remarque : dire qu'une application f de E dans F est bijective équivaut à dire que, pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution dans E.



f est bijective



f n'est pas bijective

Définition : Application réciproque d'une bijection —. *Soit f une bijection de E dans F. On appelle* ***application réciproque*** *(ou* ***bijection réciproque****) de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui, à tout élément y de F, associe son unique antécédent par f. Par définition, on a :*

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Proposition 2.6.— Soit f une bijection de E dans F et $f^{-1} : F \to E$ son application réciproque. Alors :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Théorème 2.7.— Caractérisation de la bijection réciproque —. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, g est l'application réciproque de f : $g = f^{-1}$.

Théorème 2.8.— Composée de deux bijections —. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Méthodes

Ensembles

❑ Méthode 2.1.— Comment montrer l'égalité de deux ensembles

Pour établir l'égalité de deux ensembles A et B, on peut :

- procéder par double inclusion en prouvant que $A \subset B$ et $B \subset A$. Pour montrer que $A \subset B$, on prend un élément quelconque de A et on montre qu'il appartient aussi à B ;
- montrer directement l'égalité en utilisant des opérations usuelles sur les ensembles (réunion, intersection, distributivité, lois de Morgan...).

Exemple : Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

On va appliquer chacune des deux méthodes présentées ci-dessus.

- **Première méthode : double inclusion**
  – Montrons que $B \subset C$. Soit x un élément de B. On veut montrer que $x \in C$. Comme $x \in A \cup B$ (car $A \subset A \cup B$), x appartient à $A \cup C$ d'après la première hypothèse ; c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, on a le résultat attendu. Si $x \in A$, alors x appartient à $A \cap B$, donc à $A \cap C$ d'après la deuxième hypothèse, et cela montre que $x \in C$. Dans les deux cas, x appartient à C. Ainsi, $B \subset C$.
  – Étant donné la symétrie des hypothèses sur B et C, le même raisonnement montre que $C \subset B$.
  Comme $B \subset C$ et $C \subset B$, les ensembles B et C sont égaux.
- **Deuxième méthode : utilisation d'opérations sur les ensembles**
  Tout d'abord, $B = B \cup (A \cap B)$. D'après la deuxième hypothèse, on a alors $B = B \cup (A \cap C)$. Par distributivité, cette relation s'écrit aussi :

$$B = B \cup (A \cap C) = (B \cup A) \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C),$$

  ou encore $B = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ d'après la première hypothèse. En utilisant de nouveau la distributivité, cette dernière égalité s'écrit :

$$B = C \cup (A \cap B),$$

  c'est-à-dire $B = C$ puisque $C = C \cup (A \cap C)$.

Mise en œuvre : exercice 2.1, **exercice 2.2**.

■ Application injective

❑ Méthode 2.2.— Comment montrer qu'une application est injective

Pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est injective, on peut :

- considérer deux éléments de E qui ont la même image par f et montrer qu'ils sont égaux. On écrit : « soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$ » et on montre que $x = x'$. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée ;
- montrer que, pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ a **au plus** une solution dans E. On écrit : « soit $b \in F$ » et on mène la résolution de l'équation jusqu'à vérifier que celle-ci n'a pas plus d'une solution ;
- dans certains cas, considérer deux éléments distincts de E et montrer qu'ils n'ont pas la même image par f.

Exemple : l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$ est injective.

En effet, soit n et n' deux entiers naturels tels que $f(n) = f(n')$. On a alors $2n = 2n'$, d'où $n = n'$. Cela montre que f est injective.

Exemple : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$, strictement monotone. Alors f est injective. Pour le démontrer, nous utilisons cette fois le troisième point de la **méthode 2.2**. Soit x et x' deux éléments distincts de I. On a, par exemple, $x < x'$. Comme f est strictement monotone, on a nécessairement $f(x) \neq f(x')$ ($f(x) < f(x')$ si f est strictement croissante et $f(x) > f(x')$ si f est strictement décroissante). La fonction f est donc injective.

❑ Méthode 2.3.— Comment montrer qu'une application n'est pas injective

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

Exemple : l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$ n'est pas injective.

En effet, on a (par exemple) $g(2) = 1$ et $g(3) = 1$. La fonction g n'est pas injective puisque 2 et 3 ont la même image par g. Plus généralement, tout entier pair a la même image par g que l'entier impair qui le suit.

■ Application surjective

❑ Méthode 2.4.— Comment montrer qu'une application est surjective

Pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on considère un élément quelconque y de F et l'on détermine un antécédent de y par f. Il s'agit ainsi de montrer que l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, admet **au moins** une solution. Bien souvent, le problème revient à résoudre explicitement cette équation.

Exemple : l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est surjective.

Soit m un entier naturel quelconque. Montrons que m a un antécédent par g, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = m$. Comme $2m$ est pair, on a $g(2m) = \frac{2m}{2} = m$; $2m$ est donc un antécédent de m par g. Comme tout entier naturel admet au moins un antécédent par g, l'application g est surjective.

❑ **Méthode 2.5.— Comment montrer qu'une application n'est pas surjective**
Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective, il suffit de trouver **un** élément de F qui n'a pas d'antécédent par f dans E.

Exemple : l'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{cases}$ n'est pas surjective.

Par exemple, 3 n'a pas antécédent par f ($f(n)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$), f n'est donc pas surjective. Plus généralement, aucun entier impair n'a d'antécédent par f.

■ Application bijective

❑ **Méthode 2.6.— Comment montrer qu'une application est bijective, première méthode**
Pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut :

- montrer que f est injective **et** surjective.
- fixer un élément quelconque y de F et montrer que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans E.
- montrer qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (voir la **proposition 2.7**).

Exemple : montrer que l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est bijective.

• Notons, tout d'abord, que l'application f est bien à valeurs dans $\mathbb{Z}$. En effet, si n est pair, $\frac{n}{2}$ est un entier (naturel) et, si n est impair, $n+1$ est pair donc $-\frac{n+1}{2}$ est un entier (strictement négatif).

• Montrons maintenant que f est bijective en revenant à la définition (f injective et surjective).

– Soit n et n' deux entiers naturels tels que $f(n) = f(n')$. D'après la remarque ci-dessus, n et n' ont alors la même parité (sinon $f(n)$ et $f(n')$ n'ont pas le même signe !). Si n et n' sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$ donc $n = n'$. Si n et n' sont impairs, on a alors $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, d'où $n = n'$. Dans les deux cas, on obtient $n = n'$. Ainsi, l'application f est injective.

– Montrons maintenant que f est surjective. Soit m un entier relatif quelconque. Si $m \geqslant 0$, alors $2m \in \mathbb{N}$ et $f(2m) = \frac{2m}{2} = m$, donc $2m$ est un antécédent de m par f. Si $m < 0$, alors $-2m-1 \in \mathbb{N}$ et $f(-2m-1) = -\frac{-2m-1+1}{2} = m$: $-2m-1$ est un antécédent de m par f. Tout entier relatif admet donc un antécédent par f dans $\mathbb{N}$: f est surjective. Finalement, l'application f est bijective.

Exemple : l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 7$ est bijective.
Pour le démontrer, utilisons le deuxième point de la **méthode 2.6**. Soit y un réel fixé. On résout l'équation $f(x) = y$ pour déterminer les antécédents de y. On a :

$$3x + 7 = y \iff x = \frac{y-7}{3},$$

ce qui montre que $\frac{y-7}{3}$ est l'unique antécédent de y par f. On en déduit que f est bijective.

❑ **Méthode 2.7.— Comment montrer qu'une application est bijective, deuxième méthode**
Pour prouver qu'une application f est bijective, on peut également utiliser un résultat d'analyse : le **théorème de la bijection**. Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I, f réalise une bijection de I vers l'intervalle $J = f(I)$.

Exemple : l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x - \frac{1}{x} \end{array} \right.$ est bijective.
En effet, f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et, pour tout $x \geqslant 1$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$. Par conséquent, f est continue et strictement croissante sur $I = [1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I vers $f(I)$. Comme

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

on a $f(I) = [0,+\infty[$. On en déduit que l'application f est bijective.

❑ **Méthode 2.8.— Comment déterminer l'application réciproque d'une bijection**
On souhaite déterminer l'application réciproque d'une **bijection** f de E dans F.

- Si l'on a montré que, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution, la bijection réciproque f^{-1} de f est l'application qui associe, à y, son unique antécédent.
- Si l'on a trouvé une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, l'application réciproque de f est g (on a $f^{-1} = g$).

Exemple : on reprend le deuxième exemple illustrant la **méthode 2.6**. Comme $\frac{y-7}{3}$ est l'unique antécédent de y par f, f^{-1} est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$.

Exemple : montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{3x+1}{x-3} \end{array}$$

est bijective et déterminer son application réciproque.
Tout d'abord, f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. En effet, si $f(x) = 3$, alors $3x + 1 = 3x - 9$, ce qui

est impossible. On considère maintenant un réel y distinct de 3 et on résout l'équation $f(x) = y$:

$$\frac{3x+1}{x-3} = y \iff x(y-3) = 3y+1$$
$$\iff x = \frac{3y+1}{y-3} \quad (\text{car } y \neq 3).$$

L'unique antécédent de y est $\frac{3y+1}{y-3}$, qui est bien un réel distinct de 3 (même raison que ci-dessus). On en déduit que f est bijective et que f^{-1} est l'application de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ définie par :

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}.$$

On constate que $f^{-1} = f$. Dans ce cas particulier, on dit que f est une involution.

Exemple : soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) - 2f(x) = x$. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
On applique cette fois la **méthode 2.8**. La relation vérifiée par f s'écrit $f \circ f - 2f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, d'où :

$$f \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) = (f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

On applique la **proposition 2.7**, avec ici $g = f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. L'application f est bijective et f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f^{-1}(x) = f(x) - 2x.$$

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ est injective.	☐	☐
2. Une application qui n'est pas injective est surjective.	☐	☐
3. Si $f \circ g$ et $g \circ f$ existent, alors $f \circ g = g \circ f$.	☐	☐
4. L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array} \right.$ est surjective.	☐	☐
5. La restriction d'une injection est une injection.	☐	☐
6. Une involution (c'est-à-dire une application $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$) est bijective.	☐	☐
7. Si f et g sont des applications de E dans E telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f ou g est bijective.	☐	☐
8. Si deux applications f et g de E dans E ne sont pas bijectives, $g \circ f$ n'est pas bijective.	☐	☐
9. Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non bijective, $f^{-1}([0,1])$ existe.	☐	☐
10. Si f est une bijection de E dans F et B une partie de F, l'image réciproque de B par f est égale à l'image directe de B par f^{-1}.	☐	☐

Énoncé des exercices

Ensembles

Exercice 2.1 : Soit A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A = B$.

Exercice 2.2 : Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer l'égalité suivante :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 2.3* : Différence symétrique. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence symétrique de A et B et on note $A\Delta B$ la partie de E définie par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. On suppose que $A\Delta B = A \cap B$. Montrer que $A = B = \emptyset$.
3. Soit C une partie de E. Montrer que $A\Delta B = A\Delta C$ si et seulement si $B = C$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$: $A\Delta X = \emptyset$.

Applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 2.4 : Soit f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f(n) = n + 1 \; ; \qquad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} .$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 2.5 : Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$f(n) = 2n \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ces applications.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? Surjectives ?

Exercice 2.6 : Soit $f : \mathbb{R} \setminus 2 \to \mathbb{R} \setminus 1$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 2.7 : Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array} \right.$

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$

3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$

4. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & e^z \end{array} \right.$

5. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right.$

6. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \setminus \{1\} & \to & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \mapsto & p + \frac{1}{q} \end{array} \right.$

Exercice 2.8* : Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.
1. Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. g est-elle nécessairement injective ?
2. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. f est-elle nécessairement surjective ?
3. On suppose que $E = G$ et que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

■ Image directe, image réciproque

Exercice 2.9 : On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([-4,2])$, $f^{-1}([4,8])$, $f^{-1}(f[0,1])$ et $f(f^{-1}([-2,4]))$.

Exercice 2.10 : On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = (x - 4y, 2x + 3y)\,.$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$, où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 1\}$.

Exercice 2.11* : Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+ix}{1-ix}$
1. Montrer que l'application f est bien définie.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R})$.

■■ Indications

Ex. 2.11

Montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$, où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	F	F	V	V	V	F	F	V	V

1. Une fonction strictement monotone sur $\mathbb{R}$ est injective (voir le deuxième exemple qui suit la **méthode 2.2**).
2. C'est évidemment faux. La fonction $x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est ni injective, ni surjective.
3. C'est tout aussi faux... Même lorsque les deux composées existent, f et g ne commutent pas en général. Par exemple, considérons les fonctions f et g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f \circ g(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et $g \circ f(x) = x^2 + 1$.
4. C'est vrai, contrairement à la fonction $x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, on sait (voir le chapitre **Nombres complexes**) que tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées distinctes (et opposées). Ainsi, tout $z \in \mathbb{C}^*$ admet deux antécédents par f, et 0 admet 0 pour unique antécédent. L'application f est donc surjective.
5. Soit g la restriction à A d'une application injective $f : E \to F$ ($A \subset E$). Comme f est injective, tout $y \in F$ admet au plus un antécédent par f dans E, donc dans A puisque $A \subset E$. Cela montre que g est injective.
6. C'est un cas particulier de la **proposition 2.7** ($g = f$). On a alors $f^{-1} = f$.
7. Reprenons les applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ utilisées en exemples plus-haut (**méthode 2.2** et **méthode 2.3**), définies par :

$$f(n) = 2n \qquad \text{et} \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g \circ f(n) = g(2n) = n$, donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Pourtant ni f ni g n'est bijective (f n'est pas surjective et g n'est pas injective, comme nous l'avons vu plus haut).
8. L'exemple de la question précédente montre que c'est faux. En effet, $g \circ f$ est bijective ($g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$) alors que f et g ne le sont pas.
9. Même lorsque f^{-1} n'existe pas (c'est-à-dire lorsque f n'est pas bijective), l'image réciproque de $[0, 1]$ (l'ensemble $f^{-1}([0, 1])$) est parfaitement définie.
10. C'est vrai : les ensembles

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ ; \ f(x) \in B\} \qquad \text{image réciproque de } B \text{ par } f$$
$$f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y) \ ; \ y \in B\} \qquad \text{image directe de } B \text{ par } f^{-1}$$

sont égaux puisque les images des éléments de B par f^{-1} sont leurs antécédents par f. Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans les notations. Il faut néanmoins se souvenir que le deuxième ensemble n'existe que si f est bijective, alors que le premier existe toujours.

Erreurs classiques

- La composée de deux applications non bijectives peut être bijective.
- Ne pas confondre l'ensemble d'arrivée d'une fonction et son image.
- Si f est une application de E dans F, ne pas confondre l'image réciproque d'une partie B de F (qui existe **toujours**) et son image directe par f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective).