ECE2



Une collection dirigée par
Sylvain Rondy

Fiches-méthodes

Maths

Exercices corrigés

Benoît Grandpierre
Stéphane Préteseille

ellipses

ECE2



Une collection dirigée
par **Sylvain Rondy**

Maths

Benoît Grandpierre
Professeur agrégé de mathématiques
en classe préparatoire économique et commerciale
au lycée Montaigne à Paris

Stéphane Préteseille
Professeur agrégé de mathématiques
en classe préparatoire économique et commerciale
au lycée Saint-Jean à Douai

ellipses



Une collection dirigée
par **Sylvain Rondy**

Retrouvez tous les livres de la collection sur www.editions-ellipses.fr

La maquette de cet ouvrage a été adaptée en Latex par Stéphane Préteseille.

ISBN 9782340-035300
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2019
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « Que faire ? » a été conçue pour aider chacun à comprendre le cours et à maîtriser les techniques fondamentales en parcourant, par petites cellules ciblées (fiches), l'ensemble du programme.
Cet ouvrage est composé de 8 chapitres et contient en tout 50 fiches, chacune comportant entre 5 et 9 pages et portant sur une notion très précise du programme, ce qui oblige à se focaliser, sans se disperser, donc en favorisant la concentration et en augmentant l'efficacité du travail fourni.
Le plan de chaque fiche est le suivant :

- La partie « Quand on ne sait pas ! » présente le thème abordé, propose des rappels de cours et donne les premières pistes à explorer afin de s'en sortir.
- La partie « Que faire ? » délivre les techniques à connaître absolument pour résoudre les exercices.
- La partie « Conseils » donne quelques astuces, des conseils de rédaction ou met en garde contre des erreurs typiques à éviter.
- La partie « Exemple traité » permet de vérifier que l'on a bien compris en proposant un exercice typique du thème étudié, dont la correction est très détaillée.
- La partie « Exercices » propose des exercices choisis soigneusement afin de balayer largement le thème étudié.
- La partie « Pour vous aider à démarrer » donne des idées de méthode à ceux qui en éprouvent le besoin face aux exercices proposés.
- La partie « Solutions des exercices » fournit les solutions des exercices rédigées avec le plus grand soin.

J'espère que ce livre sera un bon compagnon de route et une aide efficace à tous les lecteurs.

Bon courage à tous !

Sylvain Rondy

Sommaire

Troisième semestre

Espaces vectoriels

1 Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel 11
2 Étudier la liberté d'une famille de vecteurs 16
3 Trouver une base d'un sous-espace vectoriel 22
4 Modifier et simplifier une famille génératrice 28
5 Montrer qu'une famille est une base à l'aide d'un argument de dimension 34
6 Déterminer le rang d'une famille de vecteurs 37
7 Montrer qu'une application est linéaire 40
8 Déterminer le noyau d'une application linéaire 45
9 Déterminer l'image et le rang d'une application linéaire 49
10 Utiliser le théorème du rang 53
11 Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme 56
12 Calculer la matrice d'une application linéaire dans une base 60
13 Déterminer le rang d'une matrice 65
14 Déterminer une matrice de passage et appliquer les formules de changement de base 68

Réduction des endomorphismes

15 Trouver des valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme 75
16 Localiser les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme 81
17 Étudier la diagonalisabilité d'une matrice 85
18 Étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme 92

Compléments d'analyse

19 Déterminer un équivalent simple d'une suite 99
20 Utiliser un équivalent ou un développement limité pour calculer une limite 103
21 Étudier la nature d'une série à l'aide d'un critère de comparaison 108
22 Étudier une suite ou une série à l'aide d'une somme télescopique 113
23 Étudier la nature d'une intégrale généralisée à l'aide d'un calcul 117
24 Étudier la nature d'une intégrale généralisée à l'aide d'un critère de comparaison 122
25 Étudier la nature d'une intégrale deux fois généralisée 127
26 Appliquer le théorème de changement de variable dans une intégrale généralisée 134

Suites de variables aléatoires

27 Déterminer la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes 139
28 Déterminer les lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes 146
29 Étudier l'indépendance de variables aléatoires discrètes 152
30 Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires discrètes 158
31 Déterminer la loi du minimum et du maximum de variables aléatoires discrètes 164
32 Calculer la covariance d'un couple de variables aléatoires discrètes 172
33 Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes 180
34 Étudier l'indépendance de variables aléatoires quelconques 185

Quatrième semestre

Compléments de probabilité

35 Déterminer la loi d'une variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité 193
36 Étudier l'existence et calculer la variance d'une variable aléatoire à densité 199
37 Étudier l'espérance d'une variable aléatoire discrète à l'aide du théorème de transfert 207
38 Étudier l'espérance d'une variable aléatoire à densité à l'aide du théorème de transfert 213

Convergences

39 Appliquer l'inégalité de Markov ou l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev 218
40 Étudier la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à valeurs entières 226
41 Étudier la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires quelconques 233

Estimation

42 Montrer qu'un estimateur est sans biais, asymptotiquement sans biais 241
43 Déterminer le risque quadratique d'un estimateur, comparer des estimateurs 249
44 Montrer qu'une suite d'estimateurs est convergente 257
45 Déterminer un intervalle de confiance 261
46 Déterminer un intervalle de confiance asymptotique 267

Fonctions de deux variables

47 Déterminer le gradient d'une fonction de deux variables 274
48 Déterminer la matrice hessienne d'une fonction de deux variables 279
49 Rechercher les extremums locaux d'une fonction de deux variables sur un ouvert 284
50 Rechercher les extremums globaux d'une fonction de deux variables 291

Troisième semestre



Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel



Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel.
On s'intéresse à certains sous-ensembles particuliers de E :

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $F \subset E$.
- $0_E \in F$, où 0_E désigne le vecteur nul de E.
- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tous $u, v \in F$, on a : $\alpha u + \beta v \in F$.
  On dit alors que l'ensemble F est stable par combinaison linéaire.

En particulier $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Que faire ?

Soit F un sous-ensemble de E.
Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on peut appliquer la « caractérisation en trois points » décrite ci-dessus :

- On indique que l'ensemble F est inclus dans E.
- On prouve que le vecteur nul de E appartient à F.
  En général c'est assez immédiat compte tenu de la définition de F.
- On prouve que l'ensemble F est stable par combinaison linéaire.
  Pour cela, on commence par se donner deux réels α et β et deux éléments u et v de F. Comme u et v appartiennent à F, ils vérifient certaines propriétés liées à la définition de F. On montre alors que $\alpha u + \beta v$ vérifie aussi les propriétés liées à la définition de F, donc $\alpha u + \beta v$ appartient à F.

Conseils

- Lorsque c'est possible, il est toujours plus efficace de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E en écrivant directement F sous la forme d'un « Vect » (voir la fiche 3) plutôt qu'en appliquant la méthode de « caractérisation en 3 points » utilisée dans cette fiche. On pourra à cet effet comparer la méthode utilisée dans les exercices 1, 2 et 3 de cette fiche avec la méthode utilisée dans les exemples correspondants de la fiche 3.

- Adapter les notations des vecteurs à la situation rencontrée : u et v dans le cas général ou pour deux éléments de $\mathbb{R}^n$, M et N pour deux matrices, P et Q pour deux polynômes, f et g pour deux fonctions etc.
  On peut aussi numéroter les vecteurs : u_1 et u_2, M_1 et M_2, P_1 et P_2 etc.

Exemple traité

On considère l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{avec } x - y = 0\}$.

1 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2 Donner un élément non nul de F, ainsi qu'un élément de $\mathbb{R}^2$ qui n'appartient pas à F.

SOLUTION

1 On applique la « caractérisation en trois points » :

- Par définition, on a $F \subset \mathbb{R}^2$.
- Si $x = y = 0$, alors on a : $x - y = 0$.
  On en déduit que le vecteur nul $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à F.
- Montrons enfin que F est stable par combinaison linéaire.
  Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $u, v \in F$.
  Montrons que $w = \alpha u + \beta v$ appartient encore à F.
  Autrement dit, en notant $w = (x'', y'')$, montrons que : $x'' - y'' = 0$.
  En notant $u = (x, y)$, on sait que $u \in F$, donc : $x - y = 0$.
  En notant $v = (x', y')$, on sait que $v \in F$, donc : $x' - y' = 0$.
  On calcule : $w = \alpha u + \beta v = \alpha(x, y) + \beta(x', y') = \big(\alpha x + \beta x' \,,\, \alpha y + \beta y'\big)$
  Alors :

$$\begin{aligned} x'' - y'' &= (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') = \alpha\big(x - y\big) + \beta\big(x' - y'\big) \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 \end{aligned}$$

  Ainsi $w = \alpha u + \beta v \in F$, ce qui prouve que F est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

> De façon générale, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2 Le couple $(1, 1)$ appartient à F puisque : $1 - 1 = 0$.
Plus généralement, si $x \in \mathbb{R}$, alors le couple (x, x) appartient à F.
Le couple $(1, 0)$ n'appartient pas à F puisque : $1 - 0 = 1 \neq 0$.

Exercices

EXERCICE 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n :

$$\mathcal{S}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{avec } {}^tM = M\right\} \text{ et } \mathcal{A}_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{avec } {}^tM = -M\right\}$$

Prouver que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 1.2

On considère l'ensemble $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X], \text{avec } P(0) = P'(1) = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 1.3

On note $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.
On considère l'ensemble $F = \left\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \text{avec } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1 On rappelle que si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors on a : ${}^t(\alpha M_1 + \beta M_2) = \alpha\, {}^tM_1 + \beta\, {}^tM_2$.

EXERCICE 1.2 On rappelle que si $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, si $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$, alors on a : $(\alpha P_1 + \beta P_2)(x) = \alpha P_1(x) + \beta P_2(x)$ et $(\alpha P_1 + \beta P_2)' = \alpha P_1' + \beta P_2'$.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

On applique la « caractérisation en trois points » à l'ensemble $\mathcal{S}_n$:

- Par définition, on a $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si 0_n désigne la matrice nulle carrée d'ordre n, alors : ${}^t0_n = 0_n$.
  On en déduit que le vecteur nul 0_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n$.
- Montrons enfin que $\mathcal{S}_n$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $M, N \in \mathcal{S}_n$.
  Montrons que $\alpha M + \beta N$ appartient encore à $\mathcal{S}_n$, c'est-à-dire que :

$$^t(\alpha M + \beta N) = \alpha M + \beta N$$

On sait que M et N appartiennent à $\mathcal{S}_n$, donc : ${}^tM = M$ et ${}^tN = N$.
Par linéarité de la transposition, on a alors :

$$ {}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha\, {}^tM + \beta\, {}^tN = \alpha M + \beta N $$

Ainsi $\alpha M + \beta N \in \mathcal{S}_n$, ce qui prouve que $\mathcal{S}_n$ est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On montre de la même manière que $\mathcal{A}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 1.2

On applique la « caractérisation en trois points » :

- Par définition, on a $F \subset \mathbb{R}_2[X]$.
- Si P est le polynôme nul, alors P' est aussi le polynôme nul et : $P(0) = P'(1) = 0$.
  On en déduit que le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ appartient à F.
- Montrons enfin que F est stable par combinaison linéaire.
  Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $P, Q \in F$.
  Montrons que $R = \alpha P + \beta Q$ appartient encore à F, c'est-à-dire que : $R(0) = R'(1) = 0$.
  On sait que P et Q appartiennent à F, donc : $P(0) = Q(0) = P'(1) = Q'(1) = 0$.
  D'une part par définition de l'évaluation en un point :

$$ R(0) = (\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 $$

  D'autre part par linéarité de la dérivation :

$$ R'(1) = (\alpha P + \beta Q)'(1) = \alpha P'(1) + \beta Q'(1) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 $$

  Ainsi $R = \alpha P + \beta Q \in F$, ce qui prouve que F est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 1.3

On applique la « caractérisation en trois points » :

- Par définition, on a $F \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
- Si ω désigne la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, alors ses dérivées première ω' et seconde ω'' sont aussi des fonctions nulles sur $\mathbb{R}$, donc :

$$ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \omega''(x) + 2\omega'(x) + \omega(x) = 0 + 0 + 0 = 0 $$

  On en déduit que le vecteur nul ω de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ appartient à F.
- Montrons enfin que F est stable par combinaison linéaire.
  Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $f, g \in F$.
  Montrons que $h = \alpha f + \beta g$ appartient encore à F, c'est-à-dire que :

$$ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ h''(x) + 2h'(x) + h(x) = 0 $$

On sait que f et g appartiennent à F, donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 0$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& h''(x) + 2h'(x) + h(x) \\
= \ & (\alpha f + \beta g)''(x) + 2(\alpha f + \beta g)'(x) + (\alpha f + \beta g)(x) \\
\underset{(\star)}{=} \ & \big(\alpha f''(x) + \beta g''(x)\big) + 2\big(\alpha f'(x) + \beta g'(x)\big) + \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) \\
= \ & \alpha\big(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\big) + \beta\big(g''(x) + 2g'(x) + g(x)\big) \\
= \ & \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

$(\star)$ Par linéarité de la dérivation.

Ainsi $\alpha f + \beta g \in F$, ce qui prouve que F est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.



2 Étudier la liberté d'une famille de vecteurs

Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel et soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.
La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est dite libre si pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, on a :

$$\big(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E\big) \implies \big(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0\big)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée.
Une égalité de la forme $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$ où les α_i ne sont pas tous nuls est appelée relation de liaison (ou de dépendance linéaire) sur les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Que faire ?

Pour étudier la liberté de la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$:

- On pose le problème en se donnant des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tels que :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E \qquad (\star)$$

- Dans le cas où les u_i sont des n-uplets ou des matrices, on explicite les coefficients du vecteur $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$. Comme ceux-ci sont nuls d'après $(\star)$, on est ramené à la résolution d'un système linéaire homogène d'inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Enfin :
  - Si le système admet pour unique solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$, alors la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre.
  - Si le système admet des solutions non nulles, alors la famille est liée.
- Dans le cas où les vecteurs u_i sont des fonctions définies sur un ensemble I, il faut transformer l'égalité de fonctions $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$ en une égalité de fonctions évaluées en x. On se rappelle que les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des réels et non des fonctions, ils ne dépendent pas de x. On a :

$$\forall\, x \in I,\ \ \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \cdots + \alpha_p u_p(x) = 0$$

  Ceci permet d'expliciter les fonctions. On peut alors obtenir des relations sur les α_i en prenant des valeurs particulières pour x ou en calculant les limites aux extrémités de I. On peut aussi dériver l'égalité (quand c'est possible) avant de prendre des valeurs particulières pour x.
  On procède de même (dérivation exceptée) dans le cas où les vecteurs u_i sont des suites.

- Dans le cas où les vecteurs u_i sont des polynômes, on peut au choix :
  - Expliciter les coefficients du polynôme $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$ et observer que ces coefficients sont nuls, ce qui permet de se ramener à un système linéaire homogène.
  - Évaluer l'égalité $\alpha_1 u_1(X) + \alpha_2 u_2(X) + \cdots + \alpha_p u_p(X) = 0_E$ en des valeurs judicieuses, notamment lorsque les polynômes u_i sont donnés sous forme factorisée.

  Dans ces deux situations, on n'oublie pas que les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des réels, et non des polynômes.

Conseils

On rappelle que deux vecteurs u et v de E sont dit non colinéaires s'ils sont non nuls et s'il n'existe pas de scalaire α tel que $u = \alpha v$.
Les cas particuliers suivants sont utiles :

- Une famille formée d'un seul vecteur, qui est non nul, est libre.
- Une famille formée de deux vecteurs non colinéaires est libre.

Exemple traité

On considère les triplets de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1, 2, 3) \quad ; \quad v = (-1, 0, 2) \quad ; \quad w = (0, 1, 2) \quad ; \quad t = (3, 2, -1)$$

1 Étudier la liberté de la famille (u, v, w).

2 Étudier la liberté de la famille (u, v, t).

SOLUTION

1 Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \alpha(1,2,3) + \beta(-1,0,2) + \gamma(0,1,2) = (0,0,0) \\
&\iff \big(\alpha - \beta\,,\, 2\alpha + \gamma\,,\, 3\alpha + 2\beta + 2\gamma\big) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta = \alpha \\ \gamma = -2\alpha \\ 3\alpha + 2\alpha - 4\alpha = 0 \end{cases} \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

Ainsi la famille (u, v, w) est libre.

2 De même, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha u + \beta v + \gamma t = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \big(\alpha - \beta + 3\gamma\,,\, 2\alpha + 2\gamma\,,\, 3\alpha + 2\beta - \gamma\big) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

Il vient :

$$\alpha u + \beta v + \gamma t = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} \alpha - \beta - 3\alpha = 0 \\ \gamma = -\alpha \\ 3\alpha + 2\beta + \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{cases}$$

puisque les première et troisième lignes du système sont équivalentes.
Le système admet des solutions non nulles, par exemple $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et $\gamma = -1$.
On a ainsi trouvé une relation de liaison : $u - 2v - t = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On en déduit que la famille (u, v, t) est liée.

Exercices

EXERCICE 2.1

1 Étudier la liberté de la famille de matrices colonnes $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2 Étudier la liberté de la famille de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

3 On note $P = 1$, $Q = X + 2$, $R = -X^2 + 3X + 4$ et $S = 2X^3 + 4X$.
Étudier la liberté de la famille de polynômes (P, Q, R, S).

4 On note $R_1 = X(X-1)$, $R_2 = X(X-2)$, $R_3 = (X-1)(X-2)$.
Étudier la liberté de la famille de polynômes (R_1, R_2, R_3).

EXERCICE 2.2

1 On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x$ et $h(x) = \ln(x)$.
Étudier la liberté de la famille de fonctions (f, g, h).

2 On considère les suites u, v, w définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $v_n = 2^n$ et $w_n = 4^n$.
Étudier la liberté de la famille de suites (u, v, w).

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

2 Observer sans calcul que la famille est liée.

3 Procéder par identification des coefficients dans l'égalité associée à l'étude de la liberté.

4 Évaluer l'égalité associée à l'étude de la liberté en 0, 1 puis 2.

EXERCICE 2.2

1 Diviser par le terme « le plus fort » pour simplifier l'égalité, puis déterminer la limite en $+\infty$ du membre de gauche.
Terminer en procédant de la même façon ou bien évaluer en un réel bien choisi.

2 Dans l'égalité associée à l'étude de la liberté, diviser par 4^n puis observer ce qui se passe lorsque n tend vers $+\infty$.

Solutions des exercices

EXERCICE 2.1

1 Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta + \gamma \\ \alpha + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit alors de résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = -\beta \\ -2\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

2 On observe que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a ainsi trouvé une relation de liaison : $-2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0_2$.

On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est liée.

3 Pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ \iff \quad & \alpha + \beta(X+2) + \gamma(-X^2+3X+4) + \delta(2X^3+4X) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ \iff \quad & 2\delta X^3 - \gamma X^2 + (\beta + 3\gamma + 4\delta)X + (\alpha + 2\beta + 4\gamma) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \end{aligned}$$

Or un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, donc :

$$\begin{cases} 2\delta = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta + 3\gamma + 4\delta = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \iff \quad \delta = \gamma = \beta = \alpha = 0$$

On en déduit que la famille (P, Q, R, S) est libre.

De façon plus générale, une famille de polynômes de degrés échelonnés (c'est-à-dire que l'on peut réordonner la famille de telle sorte que les degrés des polynômes forment une suite strictement croissante) est libre.

4 Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} & \alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ \iff \quad & \alpha X(X-1) + \beta X(X-2) + \gamma(X-1)(X-2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \quad (\star) \end{aligned}$$

En évaluant $(\star)$ en 0, il vient $2\gamma = 0$, donc $\gamma = 0$.
En évaluant $(\star)$ en 1, il vient $-\beta = 0$, donc $\beta = 0$.
En évaluant $(\star)$ en 2, il vient $2\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$.
On en déduit que la famille (R_1, R_2, R_3) est libre.

EXERCICE 2.2

1 Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (donc ne dépendant pas de la variable x), on a en notant ω la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$:

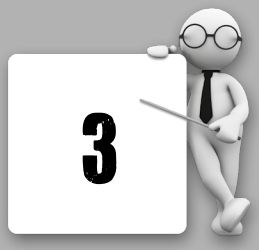
$$\begin{aligned} & \alpha f + \beta g + \gamma h = \omega \\ \iff \quad & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ \alpha e^x + \beta x + \gamma \ln(x) = 0 \quad (\star) \end{aligned}$$

En divisant par e^x les deux membres de la relation $(\star)$, il vient : $\alpha + \beta \dfrac{x}{e^x} + \gamma \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$.
En passant à la limite ($x \to +\infty$), par croissances comparées, il vient $\alpha + 0 + 0 = 0$, donc $\alpha = 0$.
L'égalité $(\star)$ se réécrit donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \beta x + \gamma \ln(x) = 0$.
Pour $x = 1$, on obtient : $\beta = 0$.
L'égalité $(\star)$ se réécrit donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \gamma \ln(x) = 0$.
Pour $x = e$, on obtient : $\gamma = 0$.
On en déduit que la famille (f, g, h) est libre.

2 Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (donc ne dépendant pas de n), on a en notant o la suite nulle :

$$\begin{aligned} & \alpha u + \beta v + \gamma w = o \\ \iff & \forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \beta 2^n + \gamma 4^n = 0 \\ \iff & \forall\, n \in \mathbb{N},\ \tfrac{\alpha}{8^n} + \tfrac{\beta}{2^n} + \gamma = 0 \quad (\star) \quad \text{(en divisant par } 4^n) \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(\star)$, il vient $\gamma = 0$.
L'égalité de départ se réécrit donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \beta 2^n = 0$ $(\star\star)$.
Il vient : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2^n \times \left(\tfrac{\alpha}{4^n} + \beta\right) = 0,$ donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \tfrac{\alpha}{4^n} + \beta = 0.$
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette dernière égalité, on obtient $\beta = 0$.
L'égalité $(\star\star)$ se réécrit alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 0.$
En prenant $n = 0$, il vient finalement $\alpha = 0$.
On en déduit que la famille (u, v, w) est libre.



3 Trouver une base d'un sous-espace vectoriel

Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des éléments de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est noté :

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \left\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p, \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\right\}$$

Avec les notations précédentes, on a le résultat utile suivant :

L'ensemble $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

On peut alors définir les notions suivantes :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille d'éléments de E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de F si $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, c'est-à-dire si :
$$F = \left\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p, \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\right\}$$
- La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de F si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de F.

Que faire ?

Pour montrer en une étape qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel et en obtenir une base :

- On commence par déterminer une expression explicite des vecteurs appartenant à F, leurs coefficients dépendant de certains paramètres réels. Cette étape se ramène souvent à la résolution d'un système linéaire.

  EXEMPLE 1 Pour $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{avec } 2x - y - 3z = 0\right\}$, on écrit :

  $$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{avec } y = 2x - 3z\right\} = \left\{(x, 2x - 3z, z), \text{avec } x, z \in \mathbb{R}\right\}$$

- On décompose un vecteur quelconque u de F en une combinaison linéaire de vecteurs fixés, les coefficients de la combinaison linéaire étant les paramètres en fonction desquels s'expriment les coefficients de u.

  EXEMPLE 2 On poursuit le calcul précédent en écrivant :

$$\begin{aligned} F &= \big\{(x, 2x, 0) + (0, -3z, z), \text{avec } x, z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{x(1, 2, 0) + z(0, -3, 1), \text{avec } x, z \in \mathbb{R}\big\} \end{aligned}$$

- On peut alors écrire F sous la forme d'un « Vect », ce qui justifie que F est un sous-espace vectoriel de E et donne une famille génératrice de F.

  EXEMPLE 3

  Avec le calcul ci-dessus, il vient : $F = \text{Vect}\big((1, 2, 0), (0, -3, 1)\big)$.
  On a ainsi prouvé que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  De plus $\big((1, 2, 0), (0, -3, 1)\big)$ est une famille génératrice de F.

- On étudie enfin la liberté de la famille génératrice que l'on a trouvée. Si elle est libre, c'est une base de F. Si elle est liée, il faut la simplifier à l'aide des méthodes de la fiche 4.

  EXEMPLE 4

  Les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, -3, 1)$ ne sont pas colinéaires, donc $\big((1, 2, 0), (0, -3, 1)\big)$ est une famille libre.
  Libre et génératrice de F, $\big((1, 2, 0), (0, -3, 1)\big)$ est une base de F.

Conseils

- Si dans une même question on demande de prouver que F est un sous-espace vectoriel de E et de déterminer une base de F, alors il ne faut surtout pas commencer par appliquer la méthode de « caractérisation en trois points » vue en fiche 1, c'est inutilement compliqué !
- Si F est un sous-espace vectoriel de E autre que $\{0_E\}$ admettant une famille génératrice, alors F admet une infinité de familles génératrices (et donc une infinité de bases).

Exemple traité

On considère les ensembles :

$$F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{avec } x - y = 0\big\} \text{ et } G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{avec } x - y = x + y + 2z = 0\big\}$$

Montrer que F et G sont des espaces vectoriels et donner une base de chacun.

SOLUTION

- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

$$u \in F \iff x - y = 0 \iff x = y \iff u = (x, x)$$

  Ainsi :

$$F = \big\{(x, x), \text{avec } x \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x(1, 1), \text{avec } x \in \mathbb{R}\big\} = \text{Vect}\big((1, 1)\big)$$

On a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc un espace vectoriel, dont une famille génératrice est $\big((1,1)\big)$.
Celle-ci étant constituée d'un unique vecteur qui est non nul, elle est libre.
Enfin, $\big((1,1)\big)$ est une base de F.

- Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a les équivalences :

$$u\in G \iff x-y=x+y+2z=0 \iff \big(x-y=0 \text{ et } x+y+2z=0\big)$$
$$\iff \big(y=x \text{ et } x+x+2z=0\big) \iff \big(y=x \text{ et } z=-x\big) \iff u=(x,x,-x)$$

Ainsi :

$$G=\{(x,x,-x), \text{ avec } x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,1,-1), \text{ avec } x\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}\big((1,1,-1)\big)$$

On a montré que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc un espace vectoriel, dont une famille génératrice est $\big((1,1,-1)\big)$?
Celle-ci étant constituée d'un unique vecteur qui est non nul, elle est libre.
Enfin, $\big((1,1,-1)\big)$ est une base de G.

Exercices

EXERCICE 3.1

On a vu dans la fiche 1 que l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des matrices symétriques d'ordre 2 et l'ensemble $\mathcal{A}_2$ des matrices antisymétriques d'ordre 2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $\mathcal{S}_2$ ainsi qu'une base de $\mathcal{A}_2$.

EXERCICE 3.2

On a vu dans la fiche 1 que $F=\big\{P\in\mathbb{R}_2[X], \text{avec } P(0)=P'(1)=0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer une base de F.

EXERCICE 3.3

On note $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $F=\Big\{f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \text{avec } \forall\, x\in\mathbb{R},\ f''(x)+2f'(x)+f(x)=0\Big\}$.
On a vu dans la fiche 1 que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

1. Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et soit $g : x\mapsto f(x)e^x$.
   Montrer que $f\in F$ si, et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g''(x)=0$.
2. En déduire qu'une fonction f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ appartient à F si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=axe^{-x}+be^{-x}$.
3. Déterminer une base de F.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 3.1 Se donner $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et observer ce qu'impliquent les contraintes ${}^tM = M$ (pour $\mathcal{S}_2$) et ${}^tM = -M$ (pour $\mathcal{A}_2$) sur les coefficients de M.

EXERCICE 3.2 Se donner un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ et observer ce qu'impliquent les contraintes $P(0) = 0$ et $P'(1) = 0$ sur les coefficients de P.

EXERCICE 3.3

2 On remarquera que g'' est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, g est une fonction affine.

3 La question précédente donne une famille génératrice de F. Il ne reste alors plus qu'à étudier sa liberté.

Solutions des exercices

EXERCICE 3.1

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2 \iff {}^tM = M \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \iff c = b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \text{avec } a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{avec } a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Autrement dit : $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Si on ne le sait pas d'avance d'après l'exercice 1.1, ceci prouve que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2$.

On prouve aisément la liberté de cette famille avec les méthodes de la fiche 2.

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{S}_2$.

De même :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2 \iff {}^tM = -M \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2 \iff \begin{cases} a = -a \\ b = -c \\ c = -b \\ d = -d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ d = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \text{avec } b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{avec } b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

On retrouve ainsi le fait que $\mathcal{A}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus $(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_2$.

Étant formée d'un seul vecteur, qui est non nul, cette famille est libre.

On en déduit que $(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathcal{A}_2$.

EXERCICE 3.2

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, qui donne $P' = 2aX + b$. On a les équivalences :

$$P \in F \iff P(0) = P'(1) = 0 \iff \begin{cases} c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = -2a \end{cases}$$

Ainsi :

$$F = \left\{ aX^2 - 2aX, \text{avec } a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a(X^2 - 2X), \text{avec } a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(X^2 - 2X)$$

On retrouve ainsi le fait que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
De plus $(X^2 - 2X)$ est une famille génératrice de F.
Étant formée d'un seul vecteur, qui est non nul, cette famille est libre.
On en déduit que $(X^2 - 2X)$ est une base de F.

EXERCICE 3.3

1 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et soit $g : x \mapsto f(x)e^x$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par produit il en est de même de la fonction g et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x \ \text{ et } \ g''(x) = f''(x)e^x + 2f'(x)e^x + f(x)e^x$$

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \big(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\big)e^x$
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \in F &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \big(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\big)e^x = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = 0 \end{aligned}$$

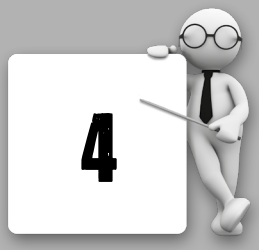
2 On poursuit les équivalences :

$$\begin{aligned} f \in F &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ g''(x) = 0 \\ &\iff \text{Il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = a \\ &\iff \text{Il existe } a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que : } \forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax + b \\ &\iff \text{Il existe } a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que : } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x)e^{x} = ax + b \\ &\iff \text{Il existe } a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que : } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = axe^{-x} + be^{-x} \end{aligned}$$

3 Notons $u : x \mapsto xe^{-x}$ et $v : x \mapsto e^{-x}$.
D'après la question précédente, on a : $F = \{au + bv, \text{avec } a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u, v)$.
On en déduit que (u, v) est une famille génératrice de F.
Étudions sa liberté. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit ω la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v = \omega &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ \alpha x e^{-x} + \beta e^{-x} = 0 \\ &\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ (\alpha x + \beta)e^{-x} = 0 \\ &\underset{e^{-x} \neq 0}{\iff} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \alpha x + \beta = 0 \end{aligned}$$

Or le polynôme $\alpha X + \beta$ est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, autrement dit : $\alpha = \beta = 0$. Ainsi la famille (u, v) est libre.
Libre et génératrice de F, la famille (u, v) est donc une base de F.



4 Modifier et simplifier une famille génératrice

Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel.

- Soit $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.
  Soit F un sous-espace vectoriel de E.
  On dit que $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de F si $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, c'est-à-dire si :
  $$F = \left\{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_p e_p \text{ , avec } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\right\}$$
- Soit $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E et soit $F = \text{Vect}(\mathcal{G})$.
  Les opérations qui suivent permettent d'obtenir une nouvelle famille génératrice de F :
  - échanger l'ordre des vecteurs de la famille $\mathcal{G}$,
  - retirer de $\mathcal{G}$ un vecteur nul,
  - retirer de $\mathcal{G}$ un vecteur qui se répète deux fois,
  - retirer de $\mathcal{G}$ un vecteur qui est colinéaire à un autre vecteur de $\mathcal{G}$,
  - retirer de $\mathcal{G}$ un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\mathcal{G}$,
  - multiplier un vecteur de $\mathcal{G}$ par un réel non nul,
  - ajouter à un vecteur de $\mathcal{G}$ un multiple d'un autre vecteur de $\mathcal{G}$.

Que faire ?

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E tel que $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)$.
Pour simplifier la famille génératrice $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de F, on répétera autant de fois que nécessaire les étapes suivantes :

- Supprimer les vecteurs nuls, les vecteurs redondants et les vecteurs colinéaires à d'autres vecteurs de la famille.
  Quand un vecteur est répété plusieurs fois dans la famille, on n'en conserve qu'un seul exemplaire.
- Simplifier un vecteur dont les coefficients sont tous multiples d'un même entier.
- Utiliser un vecteur fixé pour remplacer, à l'aide de combinaisons linéaires, les autres vecteurs de la famille par des vecteurs ayant plus de coefficients nuls. En effet, si u et v sont deux vecteurs de E, si α est un réel, alors $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u, v + \alpha u)$.