PT
PT*

Olivier Leuck
Michel Goumi
Ivan Gozard
Bertrand Hauchecorne

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques PT/PT*

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Olivier LEUCK

Professeur au lycée R. Follereau (Belfort)

Michel GOUMI

Professeur au lycée E. Perrier (Tulle)

Ivan GOZARD

Professeur au lycée Carnot (Dijon)

Bertrand HAUCHECORNE

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « Un mathématicien » et « Un peu d'histoire » des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-066793
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme et de remédier à quelques mauvais réflexes. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique et de chimie vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1. Compléments d'algèbre linéaire 3
2. Déterminants 53
3. Réduction des endomorphismes et des matrices 81
4. Fonctions vectorielles d'une variable réelle 135
5. Séries numériques 167
6. Intégrales généralisées 203
7. Équations différentielles linéaires 241
8. Courbes planes 277
9. Espaces préhilbertiens 335
10. Espaces probabilisés 369
11. Séries entières 403
12. Isométries d'un espace euclidien 449
13. Coniques 477
14. Fonctions de deux ou trois variables réelles 513
15. Intégrales dépendant d'un paramètre 571
16. Courbes et surfaces dans l'espace 599
17. Variables aléatoires discrètes 645

Index 701

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

UN MATHÉMATICIEN



Très jeune, **Giuseppe Peano** (1858-1932) a compris l'importance de la nouvelle approche des mathématiques que permettait la théorie des ensembles à peine naissante. Déchiffrant l'ouvrage plutôt obscur d'Hermann Grassmann, dans lequel sont introduits les espaces vectoriels, il bâtit une axiomatique claire encore utilisée de nos jours. Il introduit les applications linéaires et montre que cette théorie ne se limite pas à la dimension finie en donnant l'exemple des polynômes.

Un peu d'histoire

À tout nombre réel a, on peut faire correspondre une application toute simple, celle qui à un réel x fait correspondre ax soit la multiplication d'un nombre par un scalaire. Tout segment est alors transformé en un segment dont la longueur est multipliée par a. La variable x est au premier degré, elle n'est pas affectée d'une puissance.

Les applications linéaires en sont la généralisation aux dimensions supérieures ; l'expression des images est une expression de degré un des coordonnées et elles conservent l'origine.

Le maniement de ce type d'applications s'est particulièrement développé au XVIII^{e} siècle en particulier pour résoudre des systèmes linéaires, avec Gabriel Cramer, Étienne Bézout, Alexandre Vandermonde mais leur introduction formelle est l'œuvre de Peano.

Objectifs

Les incontournables

- Justifier qu'une application est linéaire ;
- Déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base ;
- Justifier qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme ;
- Exploiter les propriétés de la trace.

et plus si affinités

- Reconnaître un hyperplan ;
- Exploiter les propriétés d'un endomorphisme induit ;
- Déterminer la trace d'un endomorphisme ;
- Justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse.

Résumé de cours

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Produit d'espaces vectoriels

Définition : *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit** des espaces E et F, l'ensemble des couples (x, y) où x est un vecteur de E et y un vecteur F ; on le note $E \times F$:*

$$E \times F = \big\{(x, y) \mid x \in E,\, y \in F\big\}.$$

Proposition 1.1 — Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- Le produit $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Si E et F sont de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie et on a :

$$\boxed{\dim\big(E \times F\big) = \dim(E) + \dim(F)}$$

Commentaires ▷ L'addition et la loi externe sont induites par les lois de E et de F :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F, alors la famille

$$\big((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p)\big)$$

est une base de $E \times F$.
▷ La définition précédente se généralise ; il est possible de définir le produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.

Définition : *Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit** des espaces E_i, l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est un vecteur de E_i ; on le note $E_1 \times \cdots \times E_n$.*

Proposition 1.2 — Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- Le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, E_i est de dimension finie, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie et on a :

$$\dim\big(E_1 \times \cdots \times E_n\big) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i).$$

Commentaires ▷ L'addition et la loi externe sont, comme pour le cas d'un produit de deux espaces vectoriels, induites par les lois de $E_1, \dots, E_n$.
▷ En dimension finie, à partir d'une base de chaque espace E_i, on construit comme précédemment, une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$.

■ Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle* ***somme*** *des sous-espaces vectoriels F_i, l'ensemble des vecteurs s'écrivant $f_1 + f_2 + \cdots + f_m$ où pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, f_i est un vecteur de F_i. On le note $F_1 + F_2 + \cdots + F_m$:*

$$F_1 + \cdots + F_m = \{f_1 + \cdots + f_m \mid (f_1, \cdots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m\}.$$

Commentaire ▷ La somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E ; en effet on peut montrer qu'un tel ensemble est non vide et stable par combinaison linéaire.

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_m$ est* ***directe*** *si pour tout vecteur $x \in F_1 + \cdots + F_m$, il existe un unique m-uplet $(f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m$ tel que : $x = f_1 + \cdots + f_m$. On note alors :*

$$F_1 + \cdots + F_n = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

Proposition 1.3 — Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe ;

(ii) les hypothèses $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m$ et $f_1 + f_2 + \cdots + f_m = 0$ impliquent

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0.$$

Commentaire ▷ Puisque $F_1 + \cdots + F_m$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient le vecteur nul ; celui-ci peut donc s'écrire sous la forme $0 = f_1 + \cdots + f_m$ où pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $f_i \in F_i$. Chaque F_i étant un sous-espace vectoriel de E, il contient également le vecteur nul ; ce qui donne une nouvelle décomposition du vecteur nul : $0 = 0 + \cdots 0$. Sans autre hypothèse sur la somme $F_1 + \cdots + F_m$, il se peut que le vecteur nul possède plusieurs décompositions. La proposition 1.3 affirme que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement le vecteur nul admet une unique décomposition donnée par $0 = 0 + \cdots + 0$.

■ Décomposition en somme directe

Définition : *Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est* ***somme directe*** *de $F_1, \dots, F_m$ lorsque :*

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

Commentaires ▷ Lorsque E est somme directe de $F_1, \dots, F_m$, la somme de $F_1, \dots, F_m$ est directe et égale à E.

▷ Dans le cas où $m = 2$, dire que E est somme directe de F_1 et F_2 est équivalent à dire que F_1 et F_2 sont ***supplémentaires*** dans E.

Des résultats précédents, on déduit les caractérisations suivantes.

Proposition 1.4 — Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est somme directe de $F_1, \dots, F_m$;

(ii) pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique m-uplet $(f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m$ tel que : $x = f_1 + \cdots + f_m$;

(iii) $E = F_1 + F_2 + \cdots + F_m$ et les hypothèses $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m$, $f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 0$ impliquent $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$.

■ Base adaptée à une décomposition en somme directe

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1.5 — Soit m un entier non nul et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est somme directe de $F_1, \dots, F_m$;

(ii) la concaténation d'une base de F_1, d'une base de F_2, ... , d'une base de F_m est une base de E.

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\dim(E) = \dim\left(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m\right) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)}.$$

Remarque : Par exemple, la concaténation de la famille $(e_1, \dots, e_r)$ et de la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est la famille $(e_1 \dots, e_r, f_1, \dots, f_p)$.

Définition : *On appelle* ***base adaptée à la décomposition en somme directe*** $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ *toute base obtenue comme concaténation de bases de chaque sous-espace vectoriel* F_i.

■ Caractérisation des supplémentaires en dimension finie, rappel de PTSI

Théorème 1.6 — Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont supplémentaires dans E ;

(ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;

(iv) la concaténation d'une base F et d'une base de G est une base de E.

■ Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim(E) \geqslant 2$.

Définition : *On appelle* ***hyperplan*** *de E tout sous-espace vectoriel de E admettant une droite comme supplémentaire.*

Proposition 1.7 — Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un hyperplan de E ;

(ii) $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

■ Équation d'un hyperplan

Théorème 1.8 — Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{B}$ une base de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F est un hyperplan de E ;

(ii) il existe des scalaires $a_1, \dots, a_n$ non tous nuls tels que pour tout $x \in E$:

$$x \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \ ;$$

égalité dans laquelle $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Commentaire ▹ Les hyperplans de $\mathbb{K}^2$ sont les droites vectorielles. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est une droite vectorielle si et seulement s'il admet une équation du type $ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Théorème 1.9 — Soit $\mathscr{B}$ une base de E et deux familles de scalaires non tous nuls, $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$, telles que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, on ait :

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0.$$

Il existe alors un scalaire λ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad b_i = \lambda a_i.$$

Commentaire ▹ Fixons $\mathscr{B}$ une base de E et soit F un hyperplan de E. D'après le théorème 1.8, il existe une famille non nulle de scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ telle que pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$:

$$x \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

D'après le théorème 1.9, ces scalaires sont définis à une constante multiplicative près.
On dit que $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est une ***équation de l'hyperplan F dans la base $\mathscr{B}$***.

■ Équations d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.10 — Soit $p \in [\![1, n]\!]$.

- L'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.
- Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

Commentaire ▹ Toute droite vectorielle de $\mathbb{K}^3$ est intersection de deux plans vectoriels. Elle est

définie par un système d'équations du type

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

où (a, b, c) et (α, β, γ) sont des éléments de $\mathbb{K}^3$ non proportionnels.

■ Sous-espace stable

Définition : *Soit g un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est **stable** par g si pour tout vecteur x de F, le vecteur $g(x)$ appartient à F.*

Commentaire ▷ Le sous-espace vectoriel F est stable par g si et seulement si $g(F) \subset F$.

Proposition 1.11 — Soit g un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par g ;

(ii) pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\quad g(e_i) \in F$.

Définition : *Soit g un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E stable g. L'application*

$$\begin{array}{rccc} f : & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

*est **l'endomorphisme induit par g sur F**.*

Commentaire ▷ Puisque F est stable par g, l'application f est bien à valeurs dans F, elle est linéaire car g l'est : c'est un endomorphisme de F et on a :

$$\ker(f) = \ker(g) \cap F \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f) = g(F).$$

Théorème 1.12 (caractérisation matricielle) **—** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p et g un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F est stable par g ;

(ii) pour tout supplémentaire G de F dans E, la matrice de g dans toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Commentaire ▷ Un telle base $\mathscr{B}$ s'obtient par concaténation d'une base $\mathscr{C}$ de F et d'une base de G. La matrice A est la matrice dans la base $\mathscr{C}$ de l'endomorphisme induit par g sur F.

■ Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Définition : *On appelle **trace** d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la somme des coefficients diagonaux de cette matrice. Elle est notée* $\operatorname{Tr}(A)$.

Proposition 1.13 — L'application trace définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}: & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

est linéaire.

Proposition 1.14 — Soit n et p deux entiers non nuls et soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$$

Corollaire 1.15 — Deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

Définition : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit g un endomorphisme de E. On appelle* ***trace*** *de g la trace d'une matrice représentant g dans une base de E. On la note* $\mathrm{Tr}(g)$.

Commentaire ▷ Deux matrices semblables ayant même trace, la définition précédente est bien cohérente. En effet, le choix d'une base de E n'intervient pas dans la valeur de la trace de l'endomorphisme g.

Méthodes

Comment établir qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E (rappel PTSI)

❑ **Méthode 1.1** — ▸ On vérifie que F est contenu dans E ; puis qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.

▸ *Autre possibilité lorsque F est décrit en extension* : on détermine des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E tels que $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Mise en œuvre : exercice 1.7, **exercice 1.8** et **exercice 1.9**.

Exemple 1.1 – *Justifier que* $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, (\alpha, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^5 \right\}$ *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

On constate que $F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et :

$$F = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33}).$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$; c'est en particulier un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Comment reconnaître un hyperplan H d'un espace vectoriel E

❑ **Méthode 1.2** — ▸ On vérifie que relativement à une base, l'ensemble H est défini par une seule équation du type $a_1x_1 + \cdots a_nx_n = 0$, avec $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

▸ On calcule la dimension de H et on montre que $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.8 et **exercice 1.11**.

Exemple 1.2 – *On pose $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$. Justifier que $F = \text{Vect}(u, v, w)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.*

On constate que $u + v = w$ et par conséquent $F = \text{Vect}(u, v)$. D'autre part, les vecteurs u et v ne sont pas proportionnels, donc la famille (u, v) est libre. Puisqu'elle engendre F, c'est une base de F et $\dim(F) = 2$. L'ensemble F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

■ Comment montrer qu'une famille $\mathscr{B}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E

❑ **Méthode 1.3** — ▸ On utilise la définition : on montre que $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans E.

▸ Si $\dim(E) = n$ et si $\mathscr{B}$ est de cardinal n, il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre (respectivement génératrice).

▸ On peut montrer que $\mathscr{B}$ est une base adaptée à une décomposition en somme directe de E.

▸ On peut aussi montrer que $\mathscr{B}$ est l'image d'une base d'un espace vectoriel F par un isomorphisme de F dans E.

Mise en œuvre : exercice 1.3, **exercice 1.5**, **exercice 1.10** et **exercice 1.17**.

Exemple 1.3 – *Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales.*

1. *Déterminer la dimension de E.*

2. *Soit $A = \mathrm{diag}(1, 2, \dots, n)$. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de E.*

1. On a $E = \left\{ \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n \right\} = \mathrm{Vect}(E_{11}, \dots, E_{nn})$.
La famille $(E_{ii})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de E, elle est libre car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi cette famille est une base de E, elle est de cardinal n donc $\dim(E) = n$.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$A^i = \mathrm{diag}(1, 2^i, \dots, n^i) \in E.$$

Puisque la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est de cardinal n, il suffit de justifier qu'elle est libre pour établir qu'elle forme une base de E. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que :

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0. \qquad (*)$$

On en déduit alors que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 k + \cdots + \lambda_{n-1} k^{n-1} = 0.$$

On pose $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$, P est un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant d'après la relation précédente :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad P(k) = 0.$$

Le polynôme P possède alors n racines distinctes ; étant de degré inférieur ou égal à $n-1$, il est nul. Tous les λ_i sont donc nuls et la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est libre.
▷ Finalement la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est une base de E.

■ Comment montrer que $E = F \oplus G$

❑ **Méthode 1.4** — ▸ On choisit un vecteur x quelconque de E et on montre qu'il s'écrit de manière unique sous la forme $x = f + g$ avec $(f, g) \in F \times G$. Pour cela, on peut procéder par *analyse-synthèse*.

- ◆ *Analyse* – On suppose qu'un tel couple existe et on cherche à exprimer f et g uniquement en fonction de x.
- ◆ *Synthèse* – On vérifie que les vecteurs f et g trouvés précédemment conviennent ; c'est-à-dire que $(f, g) \in F \times G$ et $f + g = x$.

▸ On peut aussi montrer que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

▸ Si E est de dimension finie, on peut utiliser le **théorème 1.6**. Dans la plupart des cas, on essaiera de montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ puis que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Mise en œuvre : exercice 1.11, **exercice 1.12**, **exercice 1.13** et **exercice 1.15**.

Exemple 1.4 – *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E vérifiant $u + u^3 = 0$. Montrer que* $\ker(u)$ *et* $\ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$ *sont supplémentaires dans E.*

Soit $x \in E$.

▹ *Analyse* – On suppose qu'il existe deux vecteurs y et z vérifiant :

(i) $x = y + z$;

(ii) $y \in \ker(u)$, c'est-à-dire $u(y) = 0$;

(iii) $z \in \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$, c'est-à-dire $u^2(z) + z = 0$.

La linéarité de u implique que $u^2(x) = u^2(y) + u^2(z)$. Or $u(y) = 0$ et donc $u^2(y) = 0$. Puisque $u^2(z) = -z$, il vient :

$$z = -u^2(x) \quad \text{et} \quad y = x - z = x + u^2(x).$$

▹ *Synthèse* – Posons $y = x + u^2(x)$ et $z = -u^2(x)$.

(i) On a bien $y + z = x$.

(ii) Puisque $u + u^3 = 0$, alors $u(y) = 0$ et $y \in \ker(u)$.

(iii) On a : $(u^2 + \mathrm{id}_E)(z) = -(u^4 + u^2)(x) = -u\big(u^3(x) + u(x)\big) = 0$ car $u^3 + u = 0$; ainsi $z \in \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

Tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\ker(u)$ et d'un vecteur de $\ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$: $E = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

■ Comment montrer que F est stable par u

❑ **Méthode 1.5** — ▸ On montre que l'image par u d'un vecteur quelconque de F est encore un vecteur de F.

▸ Si on sait que $F = \text{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(f_i)$ est un vecteur de F.

Mise en œuvre : exercice 1.20, **exercice 1.21** et **exercice 1.22**.

Exemple 1.5 – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par l'application linéaire Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P) = (X^2+1)P' - nXP.$$

Puisque $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ il suffit de vérifier que, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\Delta(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\Delta(X^k) = (k-n)X^{k+1} + kX^{k-1}.$$

▹ Si $k < n$, on a $\deg\left(\Delta(X^k)\right) = k+1 \leqslant n$ et par conséquent $\Delta(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

▹ Pour $k = n$, on a $\Delta(X^n) = nX^{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Finalement $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

■ Comment calculer la trace d'un endomorphisme f de E

❑ **Méthode 1.6** — On choisit une base de E et on détermine la matrice de f dans cette base. La trace de f est alors la somme des coefficients diagonaux de cette matrice.

Mise en œuvre : exercice 1.23 et **exercice 1.25**.

Exemple 1.6 – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad f(P) = P'.$$

Déterminer la trace de f.

On note $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \qquad f(X^k) = kX^{k-1}.$$

On en déduit que :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients diagonaux de cette matrice sont nuls, donc $\text{Tr}(f) = 0$.

■ Comment appliquer le théorème du rang à une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (rappel PTSI)

❑ **Méthode 1.7 —** On applique ce théorème à l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à la matrice A, ce qui donne :

$$p = \dim\big(\ker(A)\big) + \mathrm{rg}(A)$$

où p est le nombre de **colonnes** de la matrice A.

Mise en œuvre : exercice 1.17.

Exemple 1.7 – *Soit a et b deux réels et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix}$. Déterminer la dimension de* $\ker(A)$.

On applique le théorème du rang, la matrice A possède deux colonnes donc

$$\dim\big(\ker(A)\big) = 2 - \mathrm{rg}(A).$$

Il reste à déterminer le rang de A.
▷ Si $a = b$, la matrice A possède deux colonnes égales (et non nulles) donc elle est de rang 1. Ainsi : $\dim\big(\ker(A)\big) = 1$.
▷ Si $a \neq b$, les colonnes de A ne sont pas proportionnelles donc la matrice A est de rang 2. Par conséquent $\dim\big(\ker(A)\big) = 0$.

Vrai/Faux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G et H des sous-espaces vectoriels de E, u un endomorphisme de E, A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

	Vrai	Faux
1. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+2y=3\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.	☐	☐
2. L'ensemble $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x=y\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.	☐	☐
3. Une droite de $\mathbb{R}^2$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
4. Soit D_1, D_2, D_3 des droites de $\mathbb{R}^3$ deux à deux distinctes. La somme $D_1+D_2+D_3$ est directe.	☐	☐
5. L'ensemble des matrices de trace nulle est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	☐	☐
6. Si $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(B)$ alors $A=B$.	☐	☐
7. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A)=0$, alors $A=0$.	☐	☐
8. L'image de u est stable par u.	☐	☐
9. Si $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$.	☐	☐
10. $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont en somme directe.	☐	☐
11. $\mathrm{Tr}(A^2)=\big(\mathrm{Tr}(A)\big)^2$.	☐	☐
12. $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A)=\mathrm{Tr}(AA^{\mathsf{T}})$.	☐	☐
13. L'application trace est surjective.	☐	☐

Énoncé des exercices

Famille de vecteurs, révision PTSI

Exercice 1.1 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit (a, b, c) une famille de vecteurs de E. Montrer que

$$\text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad c \in \text{Vect}(a, b).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et que $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est liée. Montrer que $e_{n+1} \in \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$.

Exercice 1.2 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs non nuls de de E tels que $p \circ q = 0$. Montrer que la famille (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 1.3 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{n} e_i - e_k$.

1. Justifier que la famille $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.

2. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Déterminer P et P^{-1}.

Exercice 1.4 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que

$$u^{p-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad u^p = 0.$$

1. Justifier l'existence d'un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

2. Montrer que la famille $\left(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre.

3. En déduire que $p \leqslant n$, puis que $u^n = 0$.

Exercice 1.5 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

1. Quelle est la dimension de E^* ?

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Justifier l'existence d'une unique forme linéaire φ_k telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \varphi_k(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*.

c. Soit ψ une forme linéaire sur E, déterminer les coordonnées de ψ dans la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Sous-espace vectoriel

Exercice 1.6 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\cos(x)$ et $g(x) = x\sin(x)$. Déterminer la dimension de $\text{Vect}(\cos, \sin, f, g)$.

Exercice 1.7 : Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, puis préciser leur dimension :

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$;

2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, (\alpha,a,b,c,d) \in \mathbb{R}^5 \right\}$.

Exercice 1.8 : Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Déterminer pour chacun d'eux sa dimension, et une de ses bases.

1. $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t=0\big\}$.

2. $G = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=z+t=0\big\}$.

Exercice 1.9 : On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \big\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\big\}$.

1. Justifier que Δ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. En déterminer une base.

3. Justifier que Δ est l'intersection de deux hyperplans de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Exercice 1.10* : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\Delta = \big\{f \in \mathcal{L}(E), F \subset \ker(f)\big\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. On suppose dans cette question que F est un hyperplan de E ; on note alors D un supplémentaire de F dans E. Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = F \oplus D$.

a. Soit $f \in \Delta$, déterminer la forme de la matrice de f dans $\mathscr{B}$.

b. Déterminer la dimension de Δ.

■ Somme, somme directe de sous-espaces vectoriels

Exercice 1.11 : Soit $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+y+z=0\big\}$ et $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x=-y=z\big\}$.

1. Justifier que E et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, puis préciser leur dimension.

2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 1.12 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f^2 + f = 0$. Montrer que $\ker(f)$ et $\ker(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 1.13 : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des fonctions à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pose $F = \big\{f : x \mapsto \lambda\cos(x) + \beta\sin(x) \mid (\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2\big\}$ et $G = \big\{g \in E,\, g(0) = g(\pi/2) = 0\big\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Justifier qu'ils sont supplémentaires dans E.

Exercice 1.14* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Soit X une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$, montrer que $Y^{\mathsf{T}}Y = 0$.

2. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

3. En déduire que A est semblable à une matrice bloc de la forme

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice inversible.

D'après écrit Banque PT

Exercice 1.15* : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe deux réels distincts α et β tel que $(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \beta\,\mathrm{id}_E) = 0$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $a\,(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + b\,(f - \beta\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$.
2. En déduire que $E = \mathrm{Im}\,(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}\,(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - \beta\,\mathrm{id}_E) \subset \ker\,(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$ et que $\mathrm{Im}\,(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \subset \ker\,(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
4. Montrer que $E = \ker\,(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + \ker\,(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
5. Montrer que $E = \ker\,(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \oplus \ker\,(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
6. Dans une base adaptée à cette décomposition, déterminer la matrice de f.

D'après écrit Banque PT

■ Application linéaire, révision PTSI

Exercice 1.16 : E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un projecteur de E. Quel est son rang ?
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(u)$, relativement à la base $\mathcal{B}$.
4. Justifier que la matrice A est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(0, 1, 1)$.
5. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \Delta$.

Exercice 1.17 : Soit b et c deux réels.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

2. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 3 & 3b & 3c \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $\ker(v)$ et de $\mathrm{Im}(v)$.
3. Déterminer b et c afin que $\mathrm{Im}(u) = \ker(v)$.

Exercice 1.18 : Soit f définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, x - y, x + y) \end{array}.$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. L'application f est-elle surjective ?
3. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, déterminer une équation de $\mathrm{Im}(f)$.
4. L'application f est-elle injective ?
5. Déterminer, sans les résoudre, le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases}.$$

Exercice 1.19* : On note $E=\mathbb{R}_3[X]$ et soit f l'application définie par :

$$\forall P\in E, \qquad f(P)=P(1)X(X-1)+P(-1)X(X+1).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $\big(X(X-1),X(X+1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$.
4. Établir que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
5. Dans une base adaptée à la décomposition $E=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$, déterminer la matrice de f.

D'après Oral II Banque PT

■ Stabilité, endomorphisme induit

Exercice 1.20 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
1. Soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent : $f\circ g=g\circ f$. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g.
2. Soit p un projecteur de E et u un endomorphisme de E. Montrer que u et p commutent si et seulement si, $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

Exercice 1.21 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
1. Justifier que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.
2. On note g l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$. Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
3. En déduire que : $\mathrm{rg}(f^2)=\mathrm{rg}(f)-\dim\big(\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)\big)$.
4. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $E=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$;
(ii) $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f^2)$;
(iii) $\ker(f)=\ker(f^2)$.

Exercice 1.22* : Soit $d\geqslant 2$ un entier, f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^d$ et x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite (x_n) définie par récurrence :

$$\begin{cases} x_0=x \\ \forall n\geqslant 0, \quad x_{n+1}=f(x_n) \end{cases}.$$

On note $E_x=\mathrm{Vect}(x_n, n\in\mathbb{N})$, et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^d$.
1. Montrer que E_x est stable par f.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x\subset F$.

3. Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ soit une famille libre.

a. Justifier l'existence d'un tel entier p.

b. Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ tels que :

$$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i.$$

c. On note $E'_x = \mathrm{Vect}(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.

d. En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathcal{B}_p = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

4. On note h l'endomorphisme induit par f sur de E_x. Donner la matrice de h dans la base $\mathcal{B}_p$.

5. Montrer que la famille $(\mathrm{id}, h, h^2, \dots, h^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.

6. a. Montrer que pour tout $k < p$,

$$h^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 h(x_k) + \cdots + a_{p-1} h^{p-1}(x_k).$$

b. En déduire que l'on a :

$$h^p - a_{p-1} h^{p-1} - \cdots - \mathrm{id} = 0.$$

D'après écrit Banque PT

■ Trace d'un endomorphisme, d'une matrice

Exercice 1.23 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Justifier que $\ker(f)$ est un hyperplan de E.

2. Montrer que $f^2 = \mathrm{Tr}(f) f$.

3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

a. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes U et V telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = UV^{\mathsf{T}}$.

b. En déduire que $\mathrm{Tr}(f) = V^{\mathsf{T}} U$.

Exercice 1.24 : On note $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Déterminer $\mathrm{Tr}(AE_{ij})$.

2. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM).$$

Établir que $A = B$.

3. Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère l'application φ_A définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

a. Justifier que φ_A est linéaire.

b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) \\ & A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$$

est un isomorphisme.

Exercice 1.25 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$f(M) = AMB.$$

1. Montrer que l'application $f : M \mapsto f(M)$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
4. Calculer $\mathrm{Tr}(f)$.

Exercice 1.26 : Soit $n \geqslant 2$ un entier. On désigne par u l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad u(A) = A + \mathrm{Tr}(A) I_n.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Établir que u est un automorphisme.
3. Montrer que $u^2 - (n+2)u + (n+1)\,\mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0$.
4. En déduire une expression de u^{-1} en fonction de u, n et id_E.
5. On suppose dans cette question que $n = 2$.
a. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
b. Justifier que cette matrice est inversible, puis déterminer son inverse.

Exercice 1.27* : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et f un endomorphisme de E de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe un complexe λ tel que $f^2 = \lambda\,\mathrm{id}_E$.
2. En déduire que f est bijectif si et seulement si $f^2 \neq 0$.
3. On suppose dans cette question que f est bijectif.
a. Montrer qu'il existe un scalaire β et une symétrie s de E tels que $f = \beta s$.
b. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$.

D'après Oral II Banque PT

■ Calcul matriciel

Exercice 1.28 : Pour tous réels a, b et c, on pose :

$$F_1(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Effectuer les produits $F_1(a,b)A$ et $F_2(c)A$.
2. Justifier que les matrices $F_1(a,b)$ et $F_2(c)$ sont inversibles, déterminer leurs inverses.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.
a. Déterminer trois réels a, b et c tels que $F_2(c)F_1(a,b)A$ soit une matrice triangulaire supérieure.
b. Trouver deux matrices L et U, respectivement triangulaire inférieure et supérieure, telles que $A = LU$.
c. Résoudre le système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 1.29 : Soit $n \geqslant 2$ un entier et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$\Gamma_1 = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = M\right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\right\}$$

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la matrice A est inversible ;

(ii) $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Exercice 1.30* : Soit $n \geqslant 2$ un entier et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V, \quad A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \quad \text{et} \quad A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V.$$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2.

2. En déduire que $A^3 = (\lambda + \mu)\, A^2 - \lambda\mu A$.

3. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$.

D'après écrit Banque PT

Exercice 1.31* : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *antisymétrique* si $A^{\mathsf{T}} = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne. Établir que

$$X^{\mathsf{T}}X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = 0.$$

2. Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$X^{\mathsf{T}}BX = X^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}X.$$

3. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\mathsf{T}}AX = 0$.

b. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne telle que $(A + I_n)X = 0$. En calculant $X^{\mathsf{T}}(A + I_n)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.

c. En déduire que $A + I_n$ est une matrice inversible.

4. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

a. Calculer $B^{\mathsf{T}}B$; en déduire que B est inversible et déterminer B^{-1}.

b. Calculer $(I_n + B)(I_n + A)$; en déduire que $I_n + B$ est inversible.

D'après écrit Banque PT

Indications

Ex. 1.1

2. Justifier l'existence d'une famille de réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ non tous nuls vérifiant $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k = 0$. Supposer $\lambda_{n+1} = 0$ et aboutir à une contradiction.

Ex. 1.3

1. *Montrer que la famille $\mathscr{C}$ est libre.*

2. *On rappelle que P est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est constituée par les coordonnées de ε_j dans $\mathscr{B}$. La matrice P^{-1} est la matrice de passage entre la base $\mathscr{C}$ et la base $\mathscr{B}$.*

Ex. 1.4

2. *Déterminer le cardinal de la famille $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$.*

Ex. 1.5

2. a. *On rappelle qu'une application linéaire est totalement déterminée par l'image d'une base.*

Ex. 1.6

Pour établir que $(\cos, \sin, f, g)$ est libre, on pourra utiliser les développements limités.

Ex. 1.7

Les ensembles E et F sont décrits en extension, appliquer la ***méthode 1.1****.*

Ex. 1.10

2. b. *À l'aide de la question précédente, établir que*

$$f \in \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, définir l'endomorphisme f_i de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est E_{in}. Justifier alors que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de Δ.

Ex. 1.14

1. *Remarquer que $Y^{\mathsf{T}}Y = -X^{\mathsf{T}}(AY)$.*

2. *Justifier que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$; faire le lien avec la première question en introduisant les matrices colonnes des coordonnées dans la base canonique.*

3. *Se placer dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$; interpréter C comme étant la matrice associée à l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$.*

Ex. 1.15

1. *Justifier que le système*

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a\alpha + b\beta = -1 \end{cases}$$

d'inconnues a et b admet une solution ; et vérifier qu'un tel couple solution convient.

2. *Pour $x \in E$, remarquer que $x = \mathrm{id}_E(x)$, puis utiliser la question précédente.*

4. *Justifier que α et β ont des rôles symétriques.*

Ex. 1.16

3. *Penser à utiliser les déterminants.*

4. *On rappelle que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E car u est un projecteur de E.*

Ex. 1.17

3. *Justifier que $\mathrm{Im}(u) = \ker(v)$ si et seulement si $BA = 0$.*

Ex. 1.19

2. *Procéder par double inclusion.*

3. *Déterminer la dimension de* $\ker(f)$ *puis déterminer deux polynômes de* E *non proportionnels qui s'annulent en* 1 *et en* -1.

Ex. 1.20

2. *On rappelle que* $\ker(p)$ *et* $\mathrm{Im}(p)$ *sont supplémentaires dans* E.

Ex. 1.21

2. *Établir que* $\ker(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Ex. 1.22

2. *Établir, par récurrence sur* n, *que* $x_n \in F$.

3. a. *Introduire* $I = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, \dots, x_{k-1}) \text{ soit libre}\right\}$, *et justifier que* I *est une partie non vide, majorée de* $\mathbb{N}^*$.

b. *La famille* $(x_0, \dots, x_p)$ *est liée.*

5. *Remarquer que pour tout* k, $h^k(x) = x_k$.

6. a. *Établir* $h^p(x_k) = h^{p+k}(x_0) = h^k\big(h^p(x_0)\big) = h^k(x_p)$.

b. *Deux endomorphismes de* E_x *sont égaux s'ils coïncident sur une base de* E_x.

Ex. 1.23

2. *Choisir une droite* Δ *supplémentaire de* $\ker(f)$ *dans* E *et se placer dans une base adaptée à* $E = \ker(f) \oplus \Delta$.

Ex. 1.26

2. *Pour toute matrice* A *de* $\ker(u)$, *déterminer* $\mathrm{Tr}\big(u(A)\big)$.

Ex. 1.27

1. *Se placer dans une base de* E *et raisonner matriciellement.*

3. a. *Choisir* β *comme étant une solution de l'équation d'inconnue* z : $z^2 = \lambda$.

Ex. 1.29

(ii) $\Longrightarrow$ *(i) - Pour* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *vérifiant* $AX = 0$, *introduire la matrice* M *dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première qui elle, est égale à* X ; *vérifier que cette matrice appartient à* Γ_2.

Ex. 1.30

3. *Raisonner par récurrence ; établir que* $UA = \lambda U$ *et* $VA = \mu V$ *en utilisant les deux questions précédentes.*

Ex. 1.31

2. *Une matrice de* $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ *est symétrique, donc égale à sa transposée.*

4. a. *Si* M *est une matrice, alors la matrice* M^{T} *est inversible et* $\left(M^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$.

Utiliser également l'égalité : $(MN)^{\mathsf{T}} = N^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V	V

1. Cet ensemble ne contient pas $(0,0)$.
2. Cet ensemble est inclus dans $\mathbb{R}^4$, il est défini par une équation $x-y=0$. C'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
3. Une droite est de dimension $1=\dim(\mathbb{R}^2)-1$.
4. On pose $i=(1,0,0)$ et $j=(0,1,0)$. Notons $D_1=\mathrm{Vect}(i)$, $D_2=\mathrm{Vect}(j)$ et $D_3=\mathrm{Vect}(i+j)$. Ces trois droites sont bien deux à deux distinctes, mais on a $i+j-(i+j)=0$, avec $i\in D_1$, $j\in D_2$ et $i+j\in D_3$. Le vecteur nul ne se décompose pas de manière unique, la somme $D_1+D_2+D_3$ n'est pas directe.
5. On note F l'ensemble des matrices de trace nulle :

$$A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in F \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n} a_{kk}=0.$$

L'ensemble F est contenu dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et relativement à la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il est défini par une équation : c'est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (**théorème 1.8**).
6. On note $A=\mathrm{diag}(1,-1,0,\dots,0)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B=\mathrm{diag}(-1,1,0,\dots,0)$; on a $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(B)$ et $A\neq B$.
7. Si M est une matrice, on note $L_i(M)$ sa i-ème ligne et $C_j(M)$ sa j-ième colonne. On pose $A=(a_{ij})$ et $A^{\mathsf{T}}A=(b_{ij})$. Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$:

$$b_{kk}=L_k(A^{\mathsf{T}})C_k(A)=\big(C_k(A)\big)^{\mathsf{T}}C_k(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^2.$$

On en déduit que : $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}^2$. Puisque A est à coefficients réels, on a donc :

$$\forall(i,k)\in[\![1,n]\!],\qquad 0\leqslant a_{ik}^2\leqslant\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A).$$

Puisque $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}A)=0$, alors tous les coefficients de A sont nuls et $A=0$.
8. Soit $x\in\mathrm{Im}(u)$, alors $u(x)\in\mathrm{Im}(u)$.
9. ▷ Montrons que $\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)\subset\mathrm{Im}(u)$. Soit $y\in\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $y=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u(e_k)$. La linéarité de u implique alors :

$$y=u\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right)\in\mathrm{Im}(u).$$

▷ Montrons que $\mathrm{Im}(u)\subset\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$. Soit $y\in\mathrm{Im}(u)$. Il existe un vecteur $x\in E$ tel que $y=u(x)$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$. Comme précédemment, on utilise la linéarité de u :

$$y=u(x)=u\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda u(e_k)\in\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big).$$

10. En général, on n'a pas $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$; en effet supposons que $y \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. On a :

$$u(y) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x \in E, \quad u(x) = y.$$

On en déduit que $u^2(x) = 0$. Cependant, pour établir que $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, on a besoin de justifier que $y = 0$ et donc $x \in \ker(u)$. Cependant, on sait uniquement que $x \in \ker(u^2)$ et en général, cela n'implique pas que $x \in \ker(u)$.
11. On pose $A = \mathrm{diag}(1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $A^2 = \mathrm{diag}(1, 1, 0, \ldots, 0)$ et on a $\mathrm{Tr}(A^2) = 2$ et $\big(\mathrm{Tr}(A)\big)^2 = 0$.
12. Il suffit d'appliquer la **Proposition 1.14**.
13. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose $A = \mathrm{diag}(\alpha, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on a $\mathrm{Tr}(A) = \alpha$. Ainsi pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = \alpha$: l'application Tr est surjective.

❑ **Erreurs classiques**

- Pour montrer que la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels est directe, il ne suffit pas de montrer que leurs intersections deux à deux sont réduites à $\{0_E\}$.
- Croire que l'image et le noyau d'une application sont toujours supplémentaires.
- Oublier que l'image d'une application linéaire est, en dimension finie, le sous-espace vectoriel engendré par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.
- Penser que la trace d'un produit est égale au produit des traces.
- Croire que l'application trace est injective.

Corrigé

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. ($\Longrightarrow$) Puisque $c \in \text{Vect}(a,b,c)$, alors $c \in \text{Vect}(a,b)$.
▷ ($\Longleftarrow$) On a $\text{Vect}(a,b) \subset \text{Vect}(a,b,c)$. Montrons que $\text{Vect}(a,b,c) \subset \text{Vect}(a,b)$.
Soit $x \in \text{Vect}(a,b,c)$. Il existe α, β et γ des réels tels que :

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Or par hypothèse $c \in \text{Vect}(a,b)$, donc il existe λ et μ tels que : $c = \lambda a + \mu b$.
Finalement :

$$x = (\alpha + \lambda)a + (\beta + \mu)b.$$

On en déduit que $x \in \text{Vect}(a,b)$; finalement : $\text{Vect}(a,b) = \text{Vect}(a,b,c)$.
2. Puisque $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est une famille liée, il existe une famille de scalaires non tous nuls $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k = 0.$$

▷ Supposons que $\lambda_{n+1} = 0$, on a alors : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$.
Or les λ_k, $k \in [\![1,n]\!]$, ne sont pas tous nuls. La relation précédente implique alors que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée ; ce qui est impossible par hypothèse.
Ainsi $\lambda_{n+1} \neq 0$ et on a :

$$e_{n+1} = \frac{-1}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)\,.$$

Exercice 1.2

✎ $p^2 = p$ *et* $p \circ q = 0$

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tels que $ap + bq = 0$. On compose cette relation à gauche par p, il vient $ap = 0$. Puisque p est non nul, alors $a = 0$. Il vient alors $bq = 0$ et, puisque q est non nul, on a $b = 0$.
Finalement, la famille (p,q) est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 1.3

1. La famille $\mathscr{C}$ est de cardinal $n = \dim(E)$; pour établir que cette famille est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des réels tels que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_k = 0$. Montrons que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

✎ $\forall k \in [\![1,n]\!]$: $\varepsilon_k = x - e_k$.

On note $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$ et $s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x - e_k) = x \sum_{k=1}^{n} \lambda_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Or $x\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = sx = s\sum_{k=1}^{n}e_k = \sum_{k=1}^{n}se_k$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n}(s-\lambda_k)e_k$ et

$$\sum_{k=1}^{n}(s-\lambda_k)e_k = 0.$$

Puisque la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, la relation précédente implique :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad s-\lambda_k = 0.$$

On en déduit alors que : $\sum_{k=1}^{n}(s-\lambda_k) = 0$ et donc que $(n-1)s = 0$.
Puisque $n\geqslant 2$, il vient $s = 0$.
Finalement, pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\lambda_k = 0$. La famille $\mathscr{C}$ est une base de E.

2. On sait que P est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est constituée par les coordonnées de ε_j dans $\mathscr{B}$, ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

▷ La matrice P^{-1} est la matrice de passage entre la base $\mathscr{C}$ et la base $\mathscr{B}$. Avec les notations précédentes, on sait que

Pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, on doit déterminer les coordonnées de e_k dans $\mathscr{C}$.

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad \varepsilon_k = x - e_k.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = nx - \sum_{k=1}^{n}e_k = (n-1)x.$$

Ainsi :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\qquad e_k = x-\varepsilon_k = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \varepsilon_k.$$

Finalement :

$$P^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 2-n\end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4

1. Puisque u^{p-1} n'est pas l'application nulle, il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x)\neq 0$
2. Soit $(\lambda_k)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ une famille de réels telle que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1}u^{p-1}(x) = 0. \qquad (*)$$

Corrigé

On compose l'égalité $(*)$ par $\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^{p-1}$. Puisque pour tout entier $k \geqslant p$, $u^k(x) = 0$, il vient :

$$\begin{cases} \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0 \\ \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + \cdots + \lambda_{p-2} u^{p-1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0 u^{p-2}(x) + \lambda_1 u^{p-1}(x) = 0 \\ \lambda_0 u^{p-1}(x) = 0 \end{cases}.$$

Puisque $u^{p-1}(x) \neq 0$, le système précédent conduit successivement à $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{p-1} = 0$. La famille $\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre.

3. La famille $\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est de cardinal p, elle est libre dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n donc $n \geqslant p$. Puisque $u^p = 0$, on a donc :

$$u^n = u^{n-p} \circ u^p = 0.$$

Exercice 1.5

✎ $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim(E)\dim(\mathbb{K})$.

1. $\dim(E^*) = n$.

2. a. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base, ce qui justifie l'existence et l'unicité de φ_k.

✎ ***Méthode 1.3***

b. Puisque $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est de cardinal $n = \dim(E^*)$, il suffit d'établir qu'elle est libre pour justifier qu'elle forme une base de E^*. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires tels que :

$$\forall x \in E, \qquad \lambda_1 \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(x) = 0.$$

En particulier pour $x = e_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, il vient $\lambda_k = 0$. La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

c. ✎ $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est appelée la base duale de la base* $(e_1, \dots, e_n)$ *de* E.

▷ On vient de prouver que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*.
Il existe une unique famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires telle que :

$$\forall x \in E, \quad \psi(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(x).$$

En particulier pour $x = e_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, il vient $\lambda_k = \psi(e_k)$. ψ a pour coordonnées dans la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$: $\big(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)\big)$.

Exercice 1.6

Notons $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, f, g)$; la famille $(\cos, \sin, f, g)$ est génératrice de E, montrons qu'elle est libre. Soit λ, β, α et γ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda f(x) + \alpha g(x) + \beta \cos(x) + \gamma \sin(x) = 0.$$

✎ *Au voisinage de* 0, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$ $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$.

La fonction $h : x \mapsto \lambda f(x) + \alpha g(x) + \beta \cos(x) + \gamma \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un développement limité en 0 à l'ordre 3 :

$$h(x) = \beta + (\gamma + \lambda)x + \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)x^2 - \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\lambda}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right).$$

✎ *On en déduit que* $f(x) = x - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$ $g(x) = x^2 + o\left(x^3\right)$.

Puisque h est nulle, l'unicité du développement limité entraîne que :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma + \lambda = 0 \\ \alpha - \dfrac{\beta}{2} = 0 \\ \dfrac{\gamma}{6} + \dfrac{\lambda}{2} = 0 \end{cases} \iff \beta = \gamma = \alpha = \lambda = 0.$$

La famille $(f, g, \cos, \sin)$ est libre ; c'est une base de E.
Finalement, $\dim(E) = 4$.

Exercice 1.7

1. On a $E \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2\right)$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Les matrices A et I_2 ne sont pas proportionnelles donc la famille (A, I_2) est libre. Puisqu'elle engendre E, cette famille est une base de E et donc $\dim(E) = 2$.

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. On a $F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $F = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33})$: F est sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. La famille $(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33})$ est libre car c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$; et donc $\dim(F) = 5$.

Exercice 1.8

1. F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ (**théorème 1.8**) : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3. Pour déterminer une base de F, il suffit de déterminer une famille libre de vecteurs de F comportant 3 éléments. Par exemple $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0, -1)$.

2. G est l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$, d'équations respectives $x + y = 0$ et $z + t = 0$. On sait donc que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et $\dim(G) \geqslant 4 - 2 = 2$ (**théorème 1.10**). Cependant G n'est pas un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ car les vecteurs $(1, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 1)$ ne sont pas proportionnels (**théorème 1.9**). Par conséquent G est de dimension 2. Une base de G est par exemple la famille constituée des vecteurs $(1, -1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, -1)$.

Puisque G n'est pas un hyperplan, on a :

$$\dim(G) \leqslant 2.$$

Exercice 1.9

1. Puisque $\Delta \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, montrons alors que Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

▷ La matrice nulle appartient à Δ car $A\,0 = 0\,A = 0$: Δ est non vide.

▷ Soit M et N deux matrices appartenant à Δ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $M + \lambda N \in \Delta$.

Puisque $AM = MA$ et $AN = NA$, on a

$$(M + \lambda N)A = MA + \lambda NA = AM + \lambda AN = A(M + \lambda N).$$

Ainsi $M + \lambda N \in \Delta$ et Δ est stable par combinaison linéaire.

Autre méthode : on montre que l'application $f : M \mapsto AM - MA$ est linéaire. Puisque $\Delta = \ker(f)$, alors Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Notons $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$. Alors $AM = \begin{pmatrix} y & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$AM = MA \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases}.$$

Corrigé

On en déduit que :

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(I_2, A).$$

La famille (I_2, A) engendre Δ, elle est libre (les matrices I_2 et A ne sont pas proportionnelles) : c'est une base de Δ.

3. Si on note (x,z,y,t) les coordonnées d'une matrice M dans $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, on a établi :

$$M \in \Delta \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases}.$$

Les équations sont relatives à la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

Soit F l'hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ d'équation $y = 0$ et H l'hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ d'équation $x = t$. On vient d'obtenir que $\Delta = F \cap H$.

Exercice 1.10

1. Montrons que Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

▷ On note o l'application nulle de $\mathcal{L}(E)$, on a alors $\ker(o) = E$ et puisque F est un sous-espace vectoriel de E, $F \subset \ker(o)$: Δ est non vide.

$x \in F$ donc $x \in \ker(f)$ et $x \in \ker(g)$.

▷ Soit $f, g \in \Delta$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $F \subset \ker(f + \lambda g)$. Soit $x \in F$, on a :

$$(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = 0.$$

Ainsi $f + \lambda g$ appartient à Δ et Δ est stable par combinaison linéaire.

▷ Finalement, Δ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$; c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. a. La base $\mathscr{B}$ est formée par la concaténation d'une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de F et d'une base (w) de D. Puisque $F \subset \ker(f)$, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = 0$. On désigne par $(a_1, \dots, a_n)$ les coordonnées de $f(w)$ dans $\mathscr{B}$ et on a :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

b. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

On sait alors que : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = 0$. Puisque $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, on a $F \subset \ker(f)$ et $f \in \Delta$.

On note $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On vient d'établir l'équivalence suivante :

$$f \in \Delta \iff \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on note f_i l'endomorphisme de E défini par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_i) = E_{in}$. On a alors :

$$f \in \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_i).$$

Puisque $\sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_i) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)$, et puisqu'un endomorphisme de E est uniquement déterminé par la donnée de sa matrice dans $\mathscr{B}$, on a :

$$f \in \Delta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

Finalement, on vient d'établir que $\Delta = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

▷ Montrons que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)$ et par conséquent :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, $a_1 = \cdots = a_n = 0$: la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre et engendre Δ, c'est une base de Δ.

▷ Finalement, Δ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Exercice 1.11

1. L'ensemble F est défini, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par l'équation $x + y + z = 0$: c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

✎ ***Théorème 1.8***

▷ On constate que

$$G = \big\{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\,\big((1, -1, 1)\big).$$

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

2. ▷ De la question précédente, on déduit que :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

▷ Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. On a alors :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \qquad\quad x = -y \\ \qquad\quad x = z \end{cases}.$$

✎ *F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, donc* $(0, 0, 0) \in F \cap G$.

On en déduit que : $0 = x + y + z = 2x$; ainsi $x = 0$ et par suite $y = z = 0$.

Finalement $F \cap G = \big\{0\big\}$.

▷ On vient de prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

✎ *On applique la* ***méthode 1.4****.*

Exercice 1.12

Soit $x \in E$.

▷ *Analyse* – On suppose qu'il existe $(y,z) \in E^2$ tel que :

(i) $x = y + z$;

(ii) $y \in \ker(f)$, c'est-à-dire $f(y) = 0$;

(iii) $z \in \ker(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$, c'est-à-dire $f^2(z) + f(z) + z = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} z &= -f^2(z) - f(z) \\ z &= -f^2(x-y) - f(x-y) \\ z &= -f^2(x) - f(x) + f^2(y) + f(y) && \text{(linéarité de } f\text{)} \\ z &= -f^2(x) - f(x) && f(y) = f^2(y) = 0 \text{ (car } y \in \ker(f)\text{)} \end{aligned}$$

On en déduit que $z = -f(x) - f^2(x)$ et que $y = x - z = x + f(x) + f^2(x)$. La décomposition, si elle existe, est unique.

▷ *Synthèse* – On pose $z = -f(x) - f^2(x)$ et $y = x + f(x) + f^2(x)$. On a :

(i) $x = y + z$;

(ii) $y \in \ker(f)$; en effet $f(y) = f(x) + f^2(x) + f^3(x) = 0$ car $f^3 + f^2 + f = 0$;

(iii) $z \in \ker(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$ car

$$\begin{aligned} f^2(z) + f(z) + z &= -f^3(x) - f^4(x) - f^2(x) - f^3(x) - f(x) - f^2(x) \\ &= \underbrace{-f^4(x) - f^3(x) - f^2(x)}_{-f(0)=0} - \underbrace{f^3(x) - f^2(x) - f(x)}_{=0}. \end{aligned}$$

On vient de prouver que : $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.

Exercice 1.13

✎ $\dim(F) = 2$

1. ▷ Puisque $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$, F est un sous-espace vectoriel de E.

▷ Les applications $\varphi : g \mapsto g(0)$ et $\psi : g \mapsto g(\pi/2)$ sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Puisque $G = \ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$, G est un sous-espace vectoriel de E.

✎ *On raisonne par analyse-synthèse, voir* ***Méthode 1.4***

2. Soit $h \in E$.

▷ *Analyse* - On suppose qu'il existe un couple $(f,g) \in E^2$ tel que

(i) $h = f + g$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + g(x)$;

(ii) $f \in F$, c'est-à-dire : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$;

(iii) $g \in G$, c'est-à-dire $g(0) = g(\pi/2) = 0$.

On en déduit que :

$$h(0) = f(0) \qquad \text{et} \qquad h(\pi/2) = f(\pi/2).$$

Or par définition de f, on a : $\alpha = f(0)$ et $\beta = f(\pi/2)$. Finalement, les fonctions f et g sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = h(0)\cos(x) + h(\pi/2)\sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = h(x) - f(x).$$

La décomposition, si elle est existe, est unique.

▷ *Synthèse* - Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = h(0)\cos(x) + h(\pi/2)\sin(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = h(x) - f(x).$$

(i) On a bien $h = f + g$.

(ii) Puisque f est une combinaison linéaire des fonctions cos et sin, f appartient à F.

(iii) Puisque $g(0) = g(\pi/2) = 0$, g appartient à G.

✎ $h(0) = f(0)$ *et* $h(\pi/2) = f(\pi/2)$

▷ Finalement les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 1.14

1. Puisque $AY = 0$ et que A est antisymétrique, on a :

✎ $A^{\mathsf{T}} = -A$

$$Y^{\mathsf{T}}Y = X^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Y = -X^{\mathsf{T}}\big(AY\big) = 0.$$

2. D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim\big(\mathbb{R}^n\big) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big).$$

Il reste à établir que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$ pour justifier que $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

✎ *Puisque* $\ker(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E*, on sait que* $\{0\} \subset \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. On sait alors que :

- $f(y) = 0$;
- il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$.

On note X et Y les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formées par les coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On sait alors que :

$$AX = Y \quad \text{et} \quad AY = 0.$$

D'après la question précédente, on en déduit que $Y^{\mathsf{T}}Y = 0$. Or si on note $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on a :

✎ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$Y^{\mathsf{T}}Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Puisque $Y^{\mathsf{T}}Y = 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = 0$ et donc $y = 0$.

▷ Finalement les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à décomposition $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(f) \oplus \ker(f)$:

$$\mathscr{B} = (y_1, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_q)$$

avec $(y_1, \ldots, y_p)$ une base de $\operatorname{Im}(f)$ et $(x_1, \ldots, x_q)$ une base de $\ker(f)$.
On sait que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f donc :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \qquad f(y_i) \in \operatorname{Im}(f).$$

On note h l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}(f)$:

$$\begin{array}{rccc} h : & \operatorname{Im}(f) & \longrightarrow & \operatorname{Im}(f) \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Corrigé

✎ *On applique le* ***Théorème 1.12****.*

De plus, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on a $f(x_i) = 0$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

avec $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(h)$ avec $\mathcal{D} = (y_1, \ldots, y_p)$.
▷ Puisque $\ker(h) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$, l'endomorphisme h est bijectif donc la matrice C est inversible.
▷ Les matrices A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : elles sont semblables.

Exercice 1.15

1. On développe :

$$a\,(f - \alpha Id_E) + b\,(f - \beta Id_E) = (a+b)f - (a\alpha + b\beta)\,\mathrm{id}_E\,.$$

On considère le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a\alpha + b\beta = -1 \end{cases}.$$

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$, le système précédent admet une unique solution

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{\beta - \alpha} \\ b = \dfrac{1}{\alpha - \beta} \end{cases}.$$

Pour un tel choix de a et b, on a : $a\,(f - \alpha Id_E) + b\,(f - \beta Id_E) = \mathrm{id}_E$.
2. Soit $x \in E$, on a :

$$x = \underbrace{a(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)(x)}_{\in \mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)} + \underbrace{b(f - \beta\,\mathrm{id}_E)(x)}_{\in \mathrm{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)}.$$

✎ *Une somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, donc est incluse dans E.*

Ainsi $E \subset \mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.
▷ Puisque $\mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E) \subset E$, on a bien :

$$E = \mathrm{Im}(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E).$$

3. Soit $y \in \mathrm{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$, montrons que $y \in \ker(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$.
On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $y = (f - \beta\,\mathrm{id}_E)(x)$ et ainsi :

$$(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)(y) = \big((f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \beta\,\mathrm{id}_E)\big)(x) = 0.$$

Finalement, on a $\mathrm{Im}(f - \beta\,\mathrm{id}_E) \subset \ker(f - \alpha\,\mathrm{id}_E)$.
4. Les endomorphismes $f - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $f - \beta\,\mathrm{id}_E$ commutent et ainsi

$$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = (f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E) = 0.$$

Ainsi les réels α et β ont des rôles symétriques, de la question précédente, on déduit alors que $\operatorname{Im}(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)\subset\ker(f-\beta\,\mathrm{id}_E)$.
On a alors

$$E=\operatorname{Im}(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)+\operatorname{Im}(f-\beta\,\mathrm{id}_E)\subset\ker(f-\beta\,\mathrm{id}_E)+\ker(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)\subset E$$

et donc

$$\ker(f-\beta\,\mathrm{id}_E)+\ker(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)=E.$$

5. Il nous reste à établir que $\ker(f-\beta\,\mathrm{id}_E)\cap\ker(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)=\{0\}$.
Soit $x\in\ker(f-\beta\,\mathrm{id}_E)\cap\ker(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)$, on sait alors que

$$f(x)=\alpha x\quad\text{et}\quad f(x)=\beta x.$$

Ainsi $(\alpha-\beta)x=0$ et donc $x=0$ car $\alpha\neq\beta$.
6. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une base de $\ker(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)$ et soit $(y_1,\dots,y_q)$ une base de $\ker(f-\beta\,\mathrm{id}_E)$. La famille $\mathscr{B}=(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E=\ker(f-\alpha\,\mathrm{id}_E)\oplus\ker(f-\beta\,\mathrm{id}_E)$ et on a :

$$\forall i\in[\![1,p]\!],\quad f(x_i)=\alpha x_i\quad\text{et}\quad\forall j\in[\![1,q]\!],\quad f(y_j)=\beta y_j.$$

Par conséquent :

L'endomorphisme f est diagonalisable.

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\operatorname{diag}(\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{p\text{ fois}},\underbrace{\beta,\dots,\beta}_{q\text{ fois}}).$$

Exercice 1.16

1. Puisque $A^2=A$, alors $u^2=u$ et u est un projecteur. La matrice A est de rang 2, car (C_1,C_2) forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et $C_1=-C_3$. Ainsi u est de rang 2.

C_j désigne la $j^{ième}$ colonne de A.

2. Du théorème du rang, on déduit que $\ker(u)$ est de dimension 1. On constate que $u(e_1)=-u(e_3)$, soit $u(e_1+e_3)=0$. Ainsi $e_1+e_3\in\ker(u)$ donc e_1+e_3 est une base de $\ker(u)$.
On a $\operatorname{Im}u=\operatorname{Vect}\big(u(e_1),u(e_2)\big)=\operatorname{Vect}(e_1-e_3,e_1+e_2+e_3)$; la famille $(e_1-e_3,e_1+e_2+e_3)$ engendre $\operatorname{Im}(u)$, elle est de cardinal $2=\operatorname{rg}(u)$: c'est une base de $\operatorname{Im}(u)$.
3. Soit x un vecteur de coordonnées (x_1,x_2,x_3) dans $\mathcal{B}$. Ce vecteur appartient à $\operatorname{Im}(u)$ si et seulement si la famille $\big(x,e_1-e_3,e_1+e_2+e_3\big)$ est liée. On a donc :

$$x\in\operatorname{Im}u\iff\det_{\mathcal{B}}\big(x,e_1-e_3,e_1+e_2+e_3\big)=0\iff\begin{vmatrix}x_1&1&1\\x_2&0&1\\x_3&-1&1\end{vmatrix}=0.$$

Une équation de $\operatorname{Im}(u)$ dans $\mathcal{B}$ est alors $x_1-2x_2+x_3=0$.

Corrigé

4. Puisque u est un projecteur de E, on sait que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires dans E. La famille $\mathcal{B}' = \big(e_1+e_3, e_1-e_3, e_1+e_2+e_3\big)$ est alors une base de E car c'est la concaténation d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$.

✎ *Pour tout vecteur y de $\mathrm{Im}(u)$, on a $u(y) = y$.*

Dans cette base, la matrice de u est $\mathrm{diag}(0,1,1)$. Les matrices A et Δ représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : elles sont semblables.

5. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, convient.

En effet les formules de changement de bases nous donnent : $P^{-1}AP = \Delta$.

Exercice 1.17

1. Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

✎ *D'après le théorème du rang, $\ker(u)$ est de dimension 2.*

La matrice A est de rang 2. Ses deux premières colonnes ne sont pas colinéaires : elles forment une base de $\mathrm{Im}(A)$. On en déduit que :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\big((1,1,1),(1,2,3)\big).$$

▷ *Recherche de* $\ker(u)$: agir sur les lignes de A par opérations élémentaires équivaut à multiplier A à gauche par des matrices d'opérations élémentaires. Il s'agit de matrices inversibles et donc :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+2t = 0 \\ \quad y-z-t = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que :

$$(x,y,z,t) \in \ker(u) \iff \begin{cases} x = -2z-3t \\ y = z+t \end{cases}.$$

✎ *Ils correspondent aux choix $(z,t) = (1,0)$ et $(z,t) = (0,1)$.*

Les vecteurs $(-2,1,1,0)$ et $(-3,1,0,1)$ appartiennent à $\ker(u)$, ils sont linéairement indépendants. Puisque $\ker(u)$ est de dimension 2, ils forment une base de $\ker(u)$:

$$\ker(u) = \mathrm{Vect}\big((-2,1,1,0),(-3,1,0,1)\big).$$

2. B n'est pas la matrice nulle donc $\mathrm{rg}(B) \geqslant 1$. Toutes les colonnes de B sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\mathrm{rg}(B) \leqslant 1$. Finalement, $\mathrm{rg}(B) = 1$; on en déduit que :

$$\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Vect}\big((1,3)\big).$$

▷ *Recherche de* $\ker(v)$ *:*

$$(x,y,z)\in\ker(v) \quad\Longleftrightarrow\quad x+by+cz=0.$$

✎ *D'après le théorème du rang, $ker(v)$ est de dimension 2.*

Les vecteurs $(-b,1,0)$ et $(-c,0,1)$ appartiennent à $\ker(v)$ et sont non colinéaires. Puisque $\ker(v)$ est de dimension 2, ils forment une base de $\ker(v)$:

$$\ker(v)=\text{Vect}\big((-b,1,0),(-c,0,1)\big).$$

3. Puisque $\text{Im}(u)$ et $\ker(v)$ ont même dimension, on a :

$$\text{Im}(u)=\ker(v) \quad\Longleftrightarrow\quad \text{Im}(u)\subset\ker(v) \quad\Longleftrightarrow\quad v\circ u=0.$$

✎ $\text{Im}(u)$ *et* $\ker(v)$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.

Finalement : $\text{Im}(u)=\ker(v) \quad\Longleftrightarrow\quad BA=0.$
On a :

$$BA=\begin{pmatrix}1+b+c & 1+2b+3c & 1-c & 2+b\\ 3(1+b+c) & 3(1+2b+3c) & 3(1-c) & 3(2+b)\end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$BA=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}1+b+c=0\\ 1+2b+3c=0\\ 1-c=0\\ 2+b=0\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}c=1\\ b=-2\end{cases}.$$

Exercice 1.18

1. Soit $u=(x,y)$, $v=(z,t)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$:

✎ $u+\lambda v=(x+\lambda z, y+\lambda t)$.

$$f(u+\lambda v)=\big(x+\lambda z+2(y+\lambda t),x+\lambda z-(y+\lambda t),x+\lambda z+y+\lambda t\big);$$

$$f(u+\lambda v)=(x+2y,x-y,x+y)+\lambda(z+2t,z-t,z+t).$$

Finalement, $f(u+\lambda v)=f(u)+\lambda f(v)$: l'application f est linéaire.
2. On applique le théorème du rang :

$$2=\dim\big(\ker(f)\big)+\text{rg}(f).$$

Ainsi $\text{rg}(f)<3=\dim(\mathbb{R}^3)$: f n'est pas surjective.
3. Notons A la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

▷ Cette matrice est de rang 2 donc $\text{Im}(f)$ est un plan. Il est engendré par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(2,-1,1)$; il admet pour équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\ y & 1 & -1\\ z & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad\text{soit}\qquad 2x+y-3z=0.$$

Corrigé

4. Le théorème du rang implique $\dim\big(\ker(f)\big) = 0$: f est injective.

5. On a $8 + 1 - 9 = 0$ donc $(4, 1, 3)$ appartient à l'image de f : le premier système admet une unique solution.

▷ $8 + 3 - 3 = 8 \neq 0$, donc $(4, 3, 1)$ n'appartient pas à l'image de f : le second système n'admet pas de solution.

✎ f étant injective, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'équation $f(x, y) = (a, b, c)$ admet au plus une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1.19

1. On sait que l'application $P \mapsto P(1)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}$. Puisque $X(X-1) \in \mathbb{R}_3[X]$, l'application $P \mapsto P(1)X(X-1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

▷ Ainsi f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}_3[X]$: c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

✎ On justifie de même que $P \mapsto P(-1)X(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Par construction, on a :

$$\forall P \in E, \qquad f(P) \in \text{Vect}\big(X(X-1), X(X+1)\big).$$

On en déduit que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}\big(X(X-1), X(X+1)\big)$.

▷ Pour établir l'inclusion réciproque, il suffit de justifier que $X(X-1) \in \text{Im}(f)$ et que $X(X+1) \in \text{Im}(f)$.

Posons $P = X + 1$, de sorte que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 0$; ainsi :

$$f(P) = 2X(X-1) \qquad \text{soit} \qquad X(X-1) = f\left(\frac{P}{2}\right).$$

De même, en posant $Q = X - 1$, on constate que :

$$f\left(-\frac{Q}{2}\right) = X(X+1).$$

Les polynômes $X(X-1)$ et $X(X+1)$ appartiennent à l'image de f ; donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(X(X-1), X(X+1)\big).$$

▷ Il reste à établir que ces deux polynômes forment une famille libre. Ils ne sont pas proportionnels car l'un s'annule en 1 et l'autre non : ils sont donc linéairement indépendants. La famille $\big(X(X-1), X(X+1)\big)$ est une famille de $\text{Im}(f)$ qui est libre et génératrice de $\text{Im}(f)$: c'est une base de cet espace.

3. On applique le théorème du rang : $\ker(f)$ est de dimension 2.

Puisque $X^2 - 1$ et $X(X^2-1)$ s'annulent en 1 et en -1, on a :

$$f(X^2-1) = f\big(X(X^2-1)\big) = 0.$$

Ainsi la famille $\big(X^2-1, X(X^2-1)\big)$ est constituée de polynômes de degrés étagés, elle est donc libre. Ainsi la famille $\big(X^2-1, X(X^2-1)\big)$ est une famille de $\ker(f)$ de cardinal $2 = \dim\big(\ker(f)\big)$: c'est une base de $\ker(f)$.

4. On sait, par le théorème du rang, que :

$$\dim(E) = \dim\big(\text{Im}(f)\big) + \dim\big(\ker(f)\big).$$

Il reste à établir que $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

▷ Soit P un polynôme appartenant à l'intersection $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$.
On a :

$$P \in \mathrm{Im}(f) \implies \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad P = \lambda X(X-1) + \mu X(X+1)$$

et

$$P \in \ker(f) \implies \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad P = aX^2 - 1 + bX(X^2-1) \implies P(1) = P(-1) = 0.$$

Puisque

$$P(1) = 2\mu \qquad \text{et} \qquad P(-1) = 2\lambda$$

on a $\lambda = \mu = 0$.
▷ On vient d'établir que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
Finalement :

$$E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

5. On se place dans la base

$$\mathscr{B} = \big(X^2 - 1, X(X^2-1), X(X-1), X(X+1)\big).$$

On a

$$f(X^2 - 1) = f\big(X(X^2-1)\big) = 0$$

et

$$f(X(X-1)) = 2X(X+1), \quad f(X(X+1)) = 2X(X-1).$$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.20

1. ▷ Soit $x \in \ker(g)$, on a :

$$g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = f(0) = 0.$$

Ainsi $f(x) \in \ker(g)$ et $\ker(g)$ est stable par f.
▷ Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a : $f(y) = f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$. Ainsi $f(y) \in \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ est stable par f.
2. Supposons que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ soient stables par u. Soit $x \in E$. On sait qu'il existe un unique couple $(y, z) \in \ker(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tel que :

$$x = y + z. \qquad (*)$$

✎ *p est un projecteur de E donc :*

$$E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$

On rappelle que pour tout $z \in \mathrm{Im}(p)$ on a $p(z) = z$, ainsi :

$$u\big(p(x)\big) = u\big(p(z)\big) = u(z).$$

D'autre part, puisque $u(y) \in \ker(p)$ et $u(z) \in \mathrm{Im}(p)$, on a :

$$p\big(u(x)\big) = p\big(u(y)\big) + p\big(u(z)\big) = u(z).$$

✎ *$u\big(\ker(p)\big) \subset \ker(p)$ et $u\big(\mathrm{Im}(p)\big) \subset \mathrm{Im}(p)$.*

Corrigé

On vient de prouver que pour tout $x \in E$: $u\big(p(x)\big) = p\big(u(x)\big)$; les endomorphismes p et u commutent.
La réciproque a été établie à la question précédente.

Exercice 1.21

1. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, on a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$; ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.

2. On rappelle que g est défini par :

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

▷ Soit $x \in E$. On a :

$$x \in \ker(g) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) = 0.$$

Ainsi : $\ker(g) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$.
▷ *Montrons que* $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.
▷ Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Il existe alors $x \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $y = g(x) = f(x)$. Puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ et ainsi $y = f^2(t) \in \mathrm{Im}(f^2)$.
▷ Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f\big(f(x)\big)$. Puisque $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, on a : $f\big(f(x)\big) = g\big(f(x)\big)$ et ainsi $y = g\big(f(x)\big) \in \mathrm{Im}(g)$.
Finalement, on vient d'établir par double inclusion que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f^2)$.

3. Puisque E est de dimension finie, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Le théorème du rang appliqué à g nous donne :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) + \dim\big(\ker(g)\big).$$

✎ *Rappel :* $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

De la question précédente, on déduit alors :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) + \dim\big(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)\big).$$

4. ▷ (i) $\Longrightarrow$ (ii) - Puisque $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, on sait que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. La question précédente implique alors que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Puisque $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$, on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

✎ *Si* $y \in \mathrm{Im}(f^2)$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f^2(x) = f(f(x))$ *et donc* $y \in \mathrm{Im}(f)$.

▷ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) - La linéarité de f implique que

$$\forall x \in \ker(f), \qquad f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(0) = 0.$$

Ainsi : $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. En appliquant le théorème du rang f et à f^2, on a :

$$\dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f) = \dim\big(\ker(f^2)\big) + \mathrm{rg}(f^2).$$

Puisque $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, il vient : $\dim\big(\ker(f)\big) = \dim\big(\ker(f^2)\big)$, ce qui établit la propriété (iii).

✎ *On applique le* ***théorème 1.6***.

▷ (iii) $\Longrightarrow$ (i) - Le théorème du rang appliqué à f nous donne :

$$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f).$$

✎ *Puisque* $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E, *on a :* $0 \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Montrons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$:

$$f(y) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

On en déduit que $f^2(x) = 0$ et ainsi $x \in \ker(f^2)$. La propriété (iii) implique alors que $x \in \ker(f)$ et donc $f(x) = 0$. Finalement, $y = 0$; les espaces $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 1.22

1. Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x_n) \in E_x$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition : $f(x_n) = x_{n+1}$. Puisque $x_{n+1} \in E_x$, E_x est stable par f.

Si $y \in E_x$, alors y est combinaison linéaire des x_k. Ainsi $f(y)$ est combinaison linéaire des $f(x_k)$.

2. Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$.
Montrons ce résultat par récurrence sur n.
▷ $x_0 = x \in F$ par hypothèse.
▷ Supposons que x_n appartienne à F pour un certain $n \geqslant 0$. Puisque F est stable par f, $f(x_n)$ est un élément de F et par conséquent $x_{n+1} = f(x_n) \in F$.
Ce qui termine la récurrence.
▷ Toute combinaison linéaire des x_k appartient à F : $E_x \subset F$.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, il est donc stable par combinaison linéaire.

3. a. Notons

$$I = \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, \ldots, x_{k-1}) \text{ soit libre } \right\}.$$

▷ I est non vide, car $1 \in I$. En effet x_0 n'est pas nul par hypothèse.
▷ I est majorée par $d = \dim(\mathbb{R}^d)$.
On sait que toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un plus grand élément ; cela justifie l'existence de p.

b. Par définition de p, la famille $(x_0, \ldots, x_p)$ est liée. Il existe ainsi des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1} + \lambda_p x_p = 0.$$

*La famille $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ est libre et la famille $(x_0, \ldots, x_p)$ est liée. Donc x_p est combinaison linéaire de $x_0, \ldots, x_{p-1}$. Cela a été établi à l'**exercice 1.1**.*

Supposons que $\lambda_p = 0$, on a alors

$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1} = 0.$$

Les scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ ne sont pas tous nuls, ce qui contredit la définition de p et la liberté de la famille $(x_0, \ldots, x_{p-1})$.
Ainsi $\lambda_p \neq 0$ et par conséquent :

$$x_p = \frac{-1}{\lambda_p}\left(\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1}\right).$$

On vient de justifier l'existence de $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que : $x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$.

$a_i = \dfrac{-\lambda_i}{\lambda_p}$

c. Il suffit de justifier que : $\forall i \in [\![0, p-1]\!], \quad f(x_i) \in E'_x$.
▷ Soit $i \in [\![0, p-2]\!]$, puisque $f(x_i) = x_{i+1}$ et $i+1 < p$, on a bien $x_i \in E'_x$.
▷ Pour $i = p-1$, on a $f(x_{p-1}) = x_p$. On vient de justifier que x_p est combinaison linéaire de $x_0, \ldots, x_{p-1}$ soit $x_p \in E'_x$.
Finalement E'_x est stable par f.

d. De la question 2, on déduit que $E_x \subset E'_x$. Par construction, on a d'autre part : $E'_x \subset E_x$. Finalement, $E_x = E'_x$.
▷ La famille $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ est alors une famille libre et génératrice de E_x : c'est une base de cet espace.

Corrigé

4. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(h) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

5. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 \,\mathrm{id} + \lambda_p h + \cdots + \lambda_{p-1} h^{p-1} = 0.$$

On en déduit que :

$$\big(\lambda_0 \,\mathrm{id} + \lambda_1 h + \cdots + \lambda_{p-1} h^{p-1}\big)(x) = 0$$

soit

$$\lambda_0 x + \lambda_1 h(x) + \lambda_{p-1} h^{p-1}(x) = 0.$$

Par définition, $x = x_0$.

▷ Il nous reste à calculer $h^k(x)$, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. On a :

$$h(x) = h(x_0) = x_1.$$

Ainsi $h^2(x) = h(x_1) = x_2$; par récurrence on constate que : $h^k(x) = x_k$.
▷ Finalement, nous obtenons :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1} = 0.$$

Puisque la famille $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ est libre, on déduit que :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0.$$

▷ La famille $(\mathrm{id}, h, h^2, \ldots, h^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.
6. a. Soit $k < p$, on a établi que : $x_k = h^k(x_0)$.
Ainsi

$$h^p(x_k) = h^{p+k}(x_0) = h^k\big(h^p(x_0)\big) = h^k(x_p).$$

On utilise maintenant la question 3b, et on obtient :

$$h^p(x_k) = h^k\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i\right) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i h^k(x_i).$$

Soit $i \in [\![0, p-1]\!]$, on a :

$$h^k(x_i) = h^k\big(h^i(x_0)\big) = h^i\big(h^k(x_0)\big) = h^i(x_k).$$

Finalement, on vient d'obtenir :

$$h^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 h(x_k) + \cdots + a_{p-1} h^{p-1}(x_k).$$

b. h^p et $a_{p-1}h^{p-1}+\cdots+\mathrm{id}$ sont deux endomorphismes de E_x ; on vient d'établir que pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$:

$$h^p(x_k)=a_0x_k+a_1h(x_k)+\cdots+a_{p-1}h^{p-1}(x_k)=(a_0\,\mathrm{id}+\cdots+a_{p-1}h^{p-1})(x_k).$$

Les endomorphismes h^p et $a_{p-1}h^{p-1}+\cdots+\mathrm{id}$ coïncident sur la famille $\mathcal{B}_p$; puisque cette famille est une base de E_x, ces deux endomorphismes sont égaux :

$$h^p=a_{p-1}h^{p-1}+\cdots+\mathrm{id}\qquad\text{soit}\qquad h^p-a_{p-1}h^{p-1}-\cdots-\mathrm{id}=0.$$

Exercice 1.23

1. On applique le théorème du rang :

$$\dim\big(\ker(f)\big)=\dim(E)-\mathrm{rg}(f)=n-1.$$

La **proposition 1.7** implique que $\ker(f)$ est un hyperplan de E.

2. Soit $\Delta=\mathrm{Vect}(a)$ une droite supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. On note $(e_1,\dots,e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$. La famille $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_{n-1},a)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E=\ker(f)\oplus\Delta$. Si on désigne par $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ les coordonnées de $f(a)$ dans la base $\mathscr{B}$, on a :

*Voir au besoin la propriété (iv) du **théorème 1.6**.*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\alpha_1\\0&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&0&\alpha_{n-1}\\0&\cdots&0&\alpha_n\end{pmatrix}.$$

On désigne par A cette matrice. Puisque $\mathrm{Tr}(f)=\mathrm{Tr}(A)$, il vient $\alpha_n=\mathrm{Tr}(f)$. Puisque $\ker(f)\subset\ker(f^2)$, on a :

$$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\quad f^2(e_i)=0.$$

Par linéarité de f, il vient :

$$f^2(a)=f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_ie_i+\alpha_na\right)=\alpha_nf(a).$$

On en déduit que :

On peut également effectuer un produit matriciel et constater que $A^2=\alpha_nA$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2)=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\alpha_n\alpha_1\\0&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&0&\alpha_n\alpha_{n-1}\\0&\cdots&0&\alpha_n^2\end{pmatrix}=\alpha_n\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Un endomorphisme est déterminé par sa matrice dans une base de E, donc $f^2=\alpha_nf=\mathrm{Tr}(f)f$.

Corrigé