

Marc-Aurèle Massard

MATHS ET INFORMATIQUE

BCPST 1

TOUT-EN-UN

3^e édition

DUNOD

l'intelligence

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Table des matières

Avant-propos	5
Pour bien commencer	7
1 Raisonnements, ensembles et applications	11

1 Techniques de calcul

2 Ensembles de nombres	43
3 Sommes et produits	63
4 Trigonométrie	79
5 Nombres complexes	91
6 Fonctions d'une variable réelle	117
7 Équations différentielles	149

2 Algèbre générale

8 Systèmes linéaires	175
9 Matrices	189
10 Polynômes	207
11 Géométrie du plan et de l'espace	227

3 Probabilités et statistiques

12 Dénombrement	251
13 Statistique descriptive	265
14 Probabilités	277
15 Variables aléatoires finies	295
16 Couples de variables aléatoires finies	317

4 Algèbre linéaire

17 Espaces vectoriels	335
18 Applications linéaires	357

5 Analyse réelle

19 Suites réelles.....	375
20 Limites et continuité	409
21 Dérivation	433
22 Développements limités	449
23 Intégration	471
24 Fonctions de deux variables réelles	489

6 Informatique

25 Variables et structures de contrôle	507
26 Fonctions et modules.....	525
27 Listes et matrices	535
28 Chaînes de caractères et fichiers texte	547
29 Tracés	555
30 Récursivité	565
31 Images.....	573
32 Tris.....	583
33 Dictionnaires.....	593
34 Bases de données	601
35 Graphes	609
36 Ingénierie numérique	619
37 Simulation aléatoire	629

Annexes

Lettres grecques	639
Formulaire de trigonométrie	640
Dérivées usuelles.....	641
Primitives usuelles.....	642
Développements limités usuels.....	643
Index.....	644

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de la filière BCPST. Il recouvre l'intégralité du programme 2021.

Ce livre ne se veut en aucun cas être un cours tout prêt ni se substituer au professeur. Il doit plutôt être vu comme un complément permettant de revoir les notions et méthodes abordées en cours avec un point de vue potentiellement différent.

Il est divisé en cinq parties thématiques de mathématiques, suivies d'une partie consacrée à l'informatique. L'ensemble totalise trente-sept chapitres : vingt-quatre en mathématiques et treize en informatique. Le livre commence par une brève introduction exposant quelques règles de rédaction mathématique. Les douze premiers chapitres portent sur le programme de mathématiques du premier semestre, et les douze suivants sur celui du second semestre (à l'exception du chapitre sur les suites, qui navigue entre les deux). La partie informatique couvre l'intégralité du programme officiel de première année.

Chaque chapitre de mathématiques se décompose en cinq parties :

- **L'essentiel du cours**, rappelant les points les plus importants du cours et permettant à l'élève de vérifier qu'il connaît bien les hypothèses exactes des résultats utilisés.
- **Les méthodes à maîtriser**, exposant quelques méthodes classiques illustrées d'exemples.
- **L'interro de cours**, regroupant des questions d'application directe du cours (Vrai/Faux, QCM, citation d'un résultat du cours ou petit exercice).
- **Les exercices**, regroupant des exercices classés par ordre de difficulté globalement croissant et séparés en deux parties :
 - ◊ « *Pour s'entraîner* » comprenant des exercices couvrant les différents points du chapitre.
 - ◊ « *Pour aller plus loin* » comprenant des exercices d'approfondissement.
- **La correction**, regroupant le corrigé détaillé de l'interro de cours et de tous les exercices du chapitre.

Les chapitres d'informatique adoptent une structure plus directe, composée de trois parties : l'essentiel du cours, les exercices et leur correction.

Tout au long de l'ouvrage, les symboles suivants ont été utilisés :



pour ajouter quelques remarques aux résultats et méthodes cités



pour signaler un piège ou une erreur à éviter



pour donner quelques conseils concernant la rédaction



pour exposer un programme en Python associé à un résultat du cours ou à une méthode

En tant qu'auteur, je me permets de souligner mon intérêt pour toute remarque des lecteurs de ce livre, étudiants ou enseignants.

Je termine en remerciant A. Lalauze, M. Marouby et J.-M. Monier pour leurs relectures avisées, leurs remarques et leurs suggestions sur une grande partie de cet ouvrage.

Pour bien commencer

Le but de cette introduction est de donner des conseils pour prendre de bonnes habitudes de rédaction dès le début de l'année.

Méthode 0.1 : Bien définir ses objets

Dans la rédaction d'un raisonnement, avant d'utiliser un objet, il convient de le définir. Sinon, une personne lisant votre raisonnement pourrait ne pas le comprendre. A priori, x n'est pas forcément un réel, n pas forcément un entier, f pas forcément une fonction (même si ces noms sont très courants pour chacun de ces objets).

On peut, par exemple, définir un objet (ici un réel x) par « soit $x \in \mathbb{R}$ » lorsque l'on veut définir un objet quelconque ou bien par « on pose $x = \dots$ » lorsque l'on veut définir un objet en particulier ou encore par « on dispose de $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dots$ » si un résultat préalable nous a justifié l'existence de cet objet.

Exemple d'application

Un élève a voulu utiliser le fait que toute suite croissante majorée converge de la façon suivante :

« Pour tout n , on a $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $a_n \leq M$. Donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. »

Compléter ce raisonnement pour définir correctement les objets utilisés.

Correction :

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et M un réel. Pour tout entier naturel n , on a $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $a_n \leq M$. Donc, on dispose d'un réel ℓ tel que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Méthode 0.2 : Prêter attention aux hypothèses d'un théorème

Il convient de bien regarder (et de bien connaître) les hypothèses d'un théorème avant de l'utiliser. On ne peut rien conclure tant que **toutes** les hypothèses ne sont pas remplies.

Par exemple, le théorème reliant signe de la dérivée d'une fonction et monotonie ne s'applique que sur un intervalle.

Exemple d'application

Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

- (1) Le carré d'un nombre est positif.
- (2) Deux nombres réels et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
- (3) Si la dérivée d'une fonction est nulle sur I , cette fonction est constante sur I .
- (4) Une fonction dont la dérivée s'annule peut être strictement monotone.

Correction :

- (1) **Faux.** Le carré d'un nombre réel est positif mais le carré d'un complexe, pas forcément.
- (2) **Faux.** Il faut que les deux réels soient positifs pour que ce résultat soit vrai. Par exemple, on a $(-1)^2 > 0^2$ alors que $-1 < 0$.

- (3) **Faux.** Comme expliqué dans la méthode, il faut que I soit un intervalle pour que le résultat soit vrai. Par exemple, on prend $I = [0, 1] \cup [2, 3]$ et f la fonction définie sur I par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{si } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas constante car $f(0) \neq f(2)$ mais sa dérivée est nulle sur $[0, 1]$ et sur $[2, 3]$. La dérivée f' est donc nulle sur I sans que f soit constante sur I .

- (4) **Vrai.** La courbe d'une fonction strictement monotone peut avoir une tangente horizontale (comme celle de la fonction $x \mapsto x^3$ en 0 par exemple).

Méthode 0.3 : Vérifier le bien-fondé des opérations à utiliser

Lors d'un raisonnement, avant de faire une opération, il faut bien vérifier que l'on peut la faire. On évitera typiquement de diviser par 0, de prendre la racine carrée d'un nombre négatif (ou d'un nombre complexe), de dériver une fonction si on ne sait pas qu'elle est dérivable, etc. A chaque fois qu'il y a besoin, on précise pourquoi on peut effectuer cette opération.

Exemple d'application

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« Soient a et b deux réels non nuls tels que $a = b$. On a donc

$$a^2 = ab \quad \text{donc} \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \text{et} \quad (a - b)(a + b) = (a - b)b \quad \text{ainsi} \quad a + b = b$$

Vu que $a = b$, on en déduit que $2b = b$ puis que $2 = 1$ en divisant par b . »

Correction :

L'erreur réside au moment où on passe de $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ à $a + b = b$. En effet, à ce moment-là, on a divisé par $a - b$ sans vérifier si on pouvait. Or, comme $a = b$ on a $a - b = 0$. Il n'est donc pas possible d'effectuer cette opération.

Méthode 0.4 : Faire attention au type des objets manipulés

En mathématiques, on manipule différents types d'objets : des ensembles, des fonctions, des nombres (entiers, réels, complexes), des vecteurs, des suites, etc. Il ne faut pas les confondre. Un élément peut appartenir à un ensemble, pas à un nombre. On peut comparer deux nombres réels (avec $\leq$), pas deux nombres complexes. On peut dire qu'une suite est croissante, pas un nombre. On peut dériver une fonction dérivable, pas un réel.

Exemple d'application

Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

- (1) La fonction $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (2) $\cos$, $\sin$ et $\exp$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- (3) $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 \geq 0$.
- (4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$. Cette fonction est dérivable et, si $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (x^2)' \times e^x + x^2 \times (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$$

Correction :

- (1) **Faux.** $\frac{1}{x}$ n'est pas une fonction, c'est un nombre. On peut corriger en « la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ».
- (2) **Vrai.** Il s'agit de trois fonctions, qui sont effectivement dérivables sur $\mathbb{R}$.
- (3) **Faux.** Il n'y a pas de relation d'ordre (avec $\leq$) sur les nombres complexes.
- (4) **Faux.** Même si le résultat obtenu pour $f'(x)$ est juste au final, il y a une erreur de rédaction dans le calcul de $f'(x)$. En effet, $(x^2)'$ et $(e^x)'$ n'ont pas de sens car x^2 et e^x sont des réels et non pas des fonctions, on ne peut donc pas les dériver. Pour la rédaction, il conviendrait donc de simplement sauter l'étape de calcul faisant intervenir ces expressions erronées. Dans le cas d'un calcul plus compliqué, on donnera des noms aux sous-fonctions que l'on veut dériver lors de ce calcul.



Dans d'autres matières scientifiques, comme la physique, les notations sont utilisées de manière un peu moins rigoureuse et il peut arriver de tolérer les écritures du type $(e^x)'$. Mais ces libertés ne doivent pas se retrouver en mathématiques.

Méthode 0.5 : Différencier implication et équivalence

Lors d'un raisonnement dans lequel on part des hypothèses A pour montrer une conclusion B , on montre que $A \Rightarrow B$. Mais on n'a pas nécessairement $A \Leftrightarrow B$, on ne peut pas forcément remonter toutes les implications effectuées lors de notre démonstration. C'est pour cela qu'il est toujours dangereux dans un calcul de partir de ce que l'on veut montrer pour finir par arriver à quelque chose de vrai, parce que cela ne montre rien et on n'a pas forcément équivalence. Dans ce cas, il convient de faire ce raisonnement au brouillon et de le rédiger dans le bon sens au propre (c'est-à-dire partir de ce que l'on sait pour arriver à ce que l'on veut) pour être sûr que le raisonnement ne soit pas erroné.

Exemple d'application**Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :**

« On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Si x est solution, on a

$$x^3 + x^2 + x = 0 \quad \text{puis} \quad x^3 = -x^2 - x = 1$$

D'où $x = 1$ (c' est la seule solution réelle de $x^3 = 1$). Pourtant $1^2 + 1 + 1 \neq 0$. »

Correction :

Ce qui a été montré dans ce raisonnement c'est que si x est une solution réelle de l'équation, alors $x = 1$. Mais il ne s'agit en aucun cas d'une équivalence. On n'a pas montré que si $x = 1$, alors x est solution de l'équation. Ce que montre finalement le raisonnement en entier est que la seule potentielle solution réelle est 1 et qu'elle n'est pas solution : cette équation n'a donc aucune solution réelle (ce qui se retrouve en calculant le discriminant du trinôme).



Dans une résolution d'équation, à moins d'avoir justifié au fur et à mesure du calcul qu'il y avait équivalence du début à la fin, il conviendra de vérifier que les valeurs trouvées sont bien solutions de l'équation.

Méthode 0.6 : Reasonner en français

Une succession d'égalités ou d'inégalités ne constitue pas un raisonnement mathématique. Il faut y mettre des mots pour savoir comment tout cela s'articule et qu'une autre personne que son auteur puisse suivre le même raisonnement.

Pour commencer à écrire un résultat, que l'on a supposé comme hypothèse ou que l'on veut montrer, on peut l'introduire par « on a » dans le premier cas et « on veut montrer que » dans le second cas.

Au sein d'un raisonnement pour passer d'un résultat à un autre, il ne peut y avoir qu'une implication (que l'on pourra traduire par « donc », « alors », « ainsi », « d'où », etc.) ou il peut y avoir équivalence entre ces deux résultats (que l'on pourra traduire par « si et seulement si », « c'est-à-dire », « i.e. », etc.).

Exemple d'application

Un élève a produit le raisonnement suivant pour encadrer $\frac{x}{y}$ avec $x \in [-1, 2]$ et $y \in [1, 2]$. Rédiger correctement ce raisonnement :

«

- $0 \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1, 0 \leq \frac{x}{y} \leq 2.$

- $-1 \leq x \leq 0, 0 \leq -x \leq 1, \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1, 0 \leq -\frac{x}{y} \leq 1, -1 \leq \frac{x}{y} \leq 0.$

$$-1 \leq \frac{x}{y} \leq 2.$$

»

Correction :

On souhaite encadrer $\frac{x}{y}$. On va distinguer deux cas, en fonction du signe de x :

- Si $0 \leq x \leq 2$, comme $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, on déduit par produit de facteurs positifs que $0 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.

- Si $-1 \leq x \leq 0$, on a $0 \leq -x \leq 1$. De plus $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$. Donc, par produit de facteurs positifs, on obtient $0 \leq -\frac{x}{y} \leq 1$, puis $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 0$.

Ainsi, on a donc montré que $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$.



- Les symboles $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$ sont à proscrire dans la rédaction d'un raisonnement. On peut éventuellement les utiliser dans la résolution d'une équation/inéquation ou d'un système d'équations.
- Le terme « i.e. » est une abréviation du latin *id est* (qui se traduit littéralement par « ce qui est » et qui a la même signification que « c'est-à-dire »). Cette locution est souvent utilisée en mathématiques.

Raisonnements, ensembles et applications

L'essentiel du cours

■ 1 Bases de la logique

Définition

Une **assertion** est une phrase plus ou moins complexe qui est soit vraie, soit fausse. On peut opérer sur des assertions de la façon suivante, où P et Q sont deux assertions :

- **Négation** : non P est aussi une assertion qui est vraie si et seulement si P est fausse. On peut aussi noter $\bar{P}$.
- **Conjonction** : P et Q est une assertion qui est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie. On peut aussi noter $P \wedge Q$.
- **Disjonction** : P ou Q est une assertion qui est vraie si et seulement si P est vraie ou Q est vraie (ou les deux en même temps). On peut aussi noter $P \vee Q$.

Définition

Si P et Q sont deux assertions, on note :

- $P \Rightarrow Q$, l'assertion (non P) ou Q (qui se lit « P implique Q »)
- $P \Leftrightarrow Q$, l'assertion $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (qui se lit « P équivaut à Q »).



- Si $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une **condition suffisante** pour Q (en effet, il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie). On dit aussi que Q est une **condition nécessaire** pour P (en effet, pour que P soit vraie, il est nécessaire que Q soit vraie).
- Si $P \Leftrightarrow Q$, on dit P est une **condition nécessaire et suffisante** pour Q (on abrège souvent par CNS).

Contraposée

Si P et Q sont deux assertions, alors $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$. On appelle cette deuxième assertion la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.



Ne pas confondre la contraposée avec $Q \Rightarrow P$, qui est la **réciroque** de $P \Rightarrow Q$.

Négation des connecteurs logiques

Si P et Q sont deux assertions, alors :

- non (non P) est équivalente à P
- non (P et Q) est équivalente à (non P) ou (non Q)
- non (P ou Q) est équivalente à (non P) et (non Q)
- non ($P \Rightarrow Q$) est équivalente à P et (non Q).



La négation d'une implication n'est pas une implication.

Distributivité du « et » et du « ou »

Si P , Q et R sont trois assertions, alors :

- l'assertion P et (Q ou R) est équivalente à (P et Q) ou (P et R)
- l'assertion P ou (Q et R) est équivalente à (P ou Q) et (P ou R).

Définition

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x , on définit alors les assertions suivantes :

- $\forall x \in E$, $P(x)$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E (qui se lit « pour tout x appartenant à E , $P(x)$ »)
- $\exists x \in E$, $P(x)$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E (qui se lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ »)
- $\exists! x \in E$, $P(x)$ est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E (qui se lit « il existe un unique x appartenant à E tel que $P(x)$ »).



Chacune des trois assertions précédentes ne dépend plus de x . On dit alors que x est une variable muette.

- L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire. Ils ne doivent donc pas apparaître comme abréviation dans la rédaction d'un raisonnement.
- On ne peut pas intervertir les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans une assertion. L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x$$

signifie que pour tout réel x on peut trouver un réel y , **qui peut dépendre de x** , qui soit strictement inférieur à x . Cette assertion est clairement vraie (il suffit de prendre $y = x - 1$). Alors que l'assertion

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y < x$$

signifie qu'il existe un réel y , **ne dépendant pas de x** (x n'a pas encore été introduit lorsqu'on introduit y), qui soit strictement inférieur à tous les réels x . Cela reviendrait donc à dire que $\mathbb{R}$ est minoré, ce qui est clairement faux.



Négation des quantificateurs

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x , alors

- non $(\forall x \in E, P(x))$ est équivalente à $\exists x \in E, \text{non } (P(x))$
- non $(\exists x \in E, P(x))$ est équivalente à $\forall x \in E, \text{non } (P(x))$.



En ajoutant à ces deux règles, les règles de négation des connecteurs logiques, on est maintenant à même de nier n'importe quelle assertion.

Assertion	Négation
$P \text{ ou } Q$	$(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
$P \text{ et } Q$	$(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
$P \Rightarrow Q$	$P \text{ et } (\text{non } Q)$
$\forall x \in E, P(x)$	$\exists x \in E, (\text{non } P(x))$
$\exists x \in E, P(x)$	$\forall x \in E, (\text{non } P(x))$

■ 2 Ensembles

Définition

Si E et F sont deux ensembles, on dit que F est **inclus** dans E (ou que F est un **sous-ensemble** de E ou encore que F est une **partie** de E), que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont aussi dans E , autrement dit :

$$\forall x \in F, x \in E$$

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .



Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles.

Double inclusion

Si E et F sont deux ensembles, alors

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Définition

Si E est un ensemble et $P(x)$ une assertion comportant une variable x , on définit un ensemble contenant les éléments x de E vérifiant la propriété $P(x)$. On note cet ensemble

$$\{x \in E \mid P(x)\}.$$



Cet ensemble peut aussi être noté $\{x \in E ; P(x)\}$.

Définition

- Si E et F sont deux ensembles, on appelle **couple** de E et F tout élément de la forme (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On appelle **produit cartésien** de E et F , noté $E \times F$, l'ensemble des couples de E et F .
- Si n est un entier naturel non nul et $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on appelle **n -uplet** de $E_1, \dots, E_n$ tout élément de la forme $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout entier $1 \leq i \leq n$. On appelle produit cartésien de $E_1, \dots, E_n$, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, l'ensemble des n -uplets de $E_1, \dots, E_n$.



Si $E_1 = \dots = E_n = E$, on simplifie la notation par $E_1 \times \dots \times E_n = E^n$. Dans ce cas, on dit qu'un élément de E^n est une **n -liste** d'éléments de E .

Définition

Si E est un ensemble et A et B sont des parties de E , alors :

- le **complémentaire** de A , noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

- la **différence** de A et B , noté $A \setminus B$ et qui se lit « A privé de B », est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

- l'**intersection** de A et B , noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois aux deux ensembles A et B :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

- l'**union** de A et B , noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à au moins un des deux ensembles A et B :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Complémentaire et opérations

Si E est un ensemble et A et B sont deux parties de E , alors

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Distributivité de l'intersection et de l'union

Si E est un ensemble et A, B et C sont trois parties de E , alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$



Toutes ces propriétés reviennent à traduire les propriétés sur le « non », le « ou » et le « et » vues plus tôt.

■ 3 Méthodes de raisonnement

En mathématiques, il existe principalement 5 types de méthodes de démonstration :

- la preuve directe : on part de ce que l'on sait pour montrer le résultat recherché
- la preuve par contraposée
- la preuve par l'absurde
- la preuve par récurrence
- la preuve par analyse-synthèse.

Les notions de ces différents types de raisonnements, mis à part la preuve directe, sont présentés ci-dessous. Leur mise en œuvre sera faite dans la partie « Les méthodes à maîtriser ».

Contraposée

Soient P et Q deux assertions. Les assertions « $P \Rightarrow Q$ » et « $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ » sont équivalentes.

L'assertion « $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ » est la **contraposée** de l'assertion « $P \Rightarrow Q$ ».



Cela revient à dire que « la cause implique la conséquence » est la même chose que « l'absence de conséquence implique l'absence de cause ».

Absurde

Soit P une assertion. Si non P implique un résultat faux (on parle d'une absurdité), alors l'assertion P est vraie.



Ce principe un peu curieux au départ est en fait fréquemment utilisé hors des mathématiques. Un exemple simple, dans un jeu de Sudoku, lorsqu'on hésite entre deux valeurs pour une case, on suppose l'une des deux valeurs comme étant la bonne. Si on arrive à une contradiction dans la suite de la résolution de la grille, c'est que notre supposition initiale n'était pas la bonne, c'était donc l'autre valeur qui était bonne.

Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n . Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.



- Ce principe de récurrence se découpe en deux parties : l'**initialisation** qui consiste à montrer que $P(0)$ est vraie ; l'**hérédité** qui consiste à montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

- Si on veut juste montrer que $P(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$, il suffit d'initialiser avec $P(n_0)$.
- Si on se rend compte qu'on n'utilise pas le fait que $P(n)$ est vraie pour montrer que $P(n+1)$ est vraie, il ne sert à rien de faire une récurrence. Un raisonnement classique suffit alors.
- Avant de se lancer dans une récurrence il faut toujours réfléchir à comment montrer l'hérédité (l'initialisation est souvent très simple à montrer). Si on ne voit pas comment montrer l'hérédité, il vaut mieux se tourner vers une autre méthode de raisonnement.



Pour que l'assertion $P(n)$ dépende de n il ne faut surtout pas qu'elle commence (ou même comporte) « $\forall n \in \mathbb{N}$ ».

Principe de récurrence double

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n . Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier naturel n . Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k)) \Rightarrow P(n+1)$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Définition

L'**analyse-synthèse** est une façon de rédiger assez codifiée pour montrer une équivalence par double implication. Elle est appropriée quand on veut montrer que $P \Leftrightarrow Q$ sans connaître Q , quand on cherche une condition nécessaire et suffisante pour avoir P . Elle se décompose en deux phases :

- **Analyse** : on suppose P et on essaye de spécifier le plus possible les éléments apparaissant dans l'assertion P . On montre que $P \Rightarrow Q$ et on détermine Q en même temps.
- **Synthèse** : on vérifie que ce que l'on a trouvé à la fin de la synthèse réalise bien l'assertion P . On regarde si on bien $Q \Rightarrow P$.



C'est un peu ce qu'on fait quand on résout une équation sans utiliser d'équivalences et que l'on doit vérifier si les solutions trouvées sont bien solutions de l'équation.

■ 4 Applications

Définition

Une **application** est définie par son ensemble de départ E , son ensemble d'arrivée F et sa façon de transformer tout élément x de E en un unique élément de F , que l'on notera $f(x)$. On la note

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}(E, F)$ (ou F^E) l'ensemble des applications de E dans F .



■ Par souci de gain de place, on peut aussi noter l'application $f : E \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$.

Définition

- Si E est un ensemble, on appelle **application identité** de E l'application

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

- Si E est un ensemble et A une partie de E , on appelle **fonction indicatrice** de A l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Définition

Si f est une application de E dans F et A est une partie de E , on appelle **image directe** de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A , c'est-à-dire

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Définition

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ sont deux applications et $f(E) \subset G$, on appelle **composée** de f par g l'application :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\rightarrow H \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Définition

Si f est une application de E dans F , on dit que f est :

- **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E par f , c'est-à-dire

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E par f , c'est-à-dire

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

- **bijective** si tout élément de F possède exactement un antécédent dans E par f , c'est-à-dire

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$



On remarque qu'une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Définition

Si $f : E \rightarrow F$ est une application bijective, on appelle **réciroque** de f (ou **bijection réciroque**), notée f^{-1} , l'application de F dans E qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f .

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est une application bijective, alors $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$.

Théorème

Si $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow E$ sont deux applications vérifiant $u \circ v = \text{Id}_F$ et $v \circ u = \text{Id}_E$, alors u et v sont bijectives et réciroques l'une de l'autre.

Proposition

- Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.



Il faut bien faire attention à l'inversion d'une composée : on inverse l'ordre des applications. L'opération inverse de remplir une bouteille puis de la fermer est d'ouvrir la bouteille puis de la vider.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Montrer une implication

Si l'on veut montrer $P \Rightarrow Q$, on suit le schéma suivant :

Supposons P .

Raisonnement où l'on traduit l'hypothèse P , la conclusion Q et où l'on essaye de compléter entre les deux.

Donc Q .

Exemple d'application

Montrer que le carré d'un entier pair est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ pair. On dispose de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Ainsi $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est pair.



Voir exercices 1.3 et 1.20.

Méthode 1.2 : Reasonner par contraposée

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, il peut être plus facile de montrer que $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$, tout particulièrement quand la négation de la conclusion ($\text{non } Q$) est plus simple à utiliser que l'hypothèse (P).

Exemple d'application

Montrer que si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On veut montrer que « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair ». On raisonne par contraposée, supposons que n n'est pas pair, donc impair. On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.



Voir exercice 1.3.

Méthode 1.3 : Montrer une équivalence

A part dans des résolutions d'équations, de systèmes d'équations ou d'équivalence simple où l'on procède par équivalences successives, pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on montre séparément les deux implications (on dit qu'on procède par double implication).

Exemple d'application

Montrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On procède par double implication :

- On montre que n pair $\Rightarrow n^2$ pair (cf. ci-dessus).
- Réciproquement, on montre que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair (cf. ci-dessus).

On peut donc conclure que n est pair si et seulement si n^2 est pair.



Voir exercices 1.9, 1.16 et 1.19.

Méthode 1.4 : Montrer un énoncé avec $\forall$

Pour montrer que $\forall x \in E, P(x)$, on suit le schéma suivant :

Soit $x \in E$.

Raisonnement utilisant le fait que x est dans E et aucune autre propriété sur x .

Alors $P(x)$. On a donc montré que $\forall x \in E, P(x)$.

Exemple d'application

Montrons que $\forall x \in [-1, 1], x^2 - 1 \leq 0$

Soit $x \in [-1, 1]$. On a $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Or $x - 1$ est négatif (car $x \leq 1$) et $x + 1$ est positif (car $-1 \leq x$). Alors, par produit, $x^2 - 1 \leq 0$. On a donc montré que $\forall x \in [-1, 1], x^2 - 1 \leq 0$.



Voir exercice 1.19.

Méthode 1.5 : Montrer un énoncé avec $\exists$

Pour montrer que $\exists x \in E, P(x)$, il faut réussir à trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$. Il convient donc de chercher cet élément par un raisonnement préliminaire ou de l'intuiter. Une fois trouvé on suit le schéma suivant :

Posons $x = \text{l'élément qu'on a trouvé}$.

Raisonnement en utilisant ce x .

Alors $P(x)$. On a donc montré que $\exists x \in E, P(x)$.

Exemple d'application

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R}, \int_0^x (2t^3 + yt) dt = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On commence par calculer l'intégrale donnée

$$\int_0^x (t^3 + yt) dt = \left[2\frac{t^4}{4} + y\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^4}{2} + \frac{yx^2}{2}$$

Ainsi, l'intégrale serait nulle pour $y = -x^2$. Posons donc $y = -x^2$. On a $\int_0^x (t^2 + yt) dt = 0$.

On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R}, \int_0^x (2t^3 + yt) dt = 0$.



Voir exercice 1.4.

Méthode 1.6 : Reasonner par disjonction de cas

Pour montrer une assertion P , on peut être amené à distinguer plusieurs cas lors du raisonnement. Il convient de bien faire attention à n'oublier aucun cas.

Exemple d'application

Pour tout entier naturel n , montrons que $n(n + 1)$ est un entier pair.

On s'intéresse à la parité de $n(n + 1)$, distinguons donc les cas selon la parité de n .

- **Si n pair :** alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n(n + 1) = 2 \times k(2k + 1)$ est pair.

- **Si n impair** : alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Donc $n(n+1) = 2 \times (2k+1)(k+1)$ est pair.

Dans tous les cas $n(n+1)$ est pair.



Voir exercices 1.4, 1.15, 1.16 et 1.17.

Méthode 1.7 : Nier une assertion

Pour nier une assertion, on va utiliser les règles de négation : les $\forall$ deviennent des $\exists$ et vice-versa, les « et » deviennent des « ou » et vice-versa.

Exemple d'application

Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Donnons la négation de « E est majoré ».

On commence par traduire l'assertion à nier. Donc dire que E est majoré revient à dire que $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leq M$. Sa négation est donc $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in E, x > M$.



Voir exercices 1.1, 1.2 et 1.13.

Méthode 1.8 : Raisonner par l'absurde

Pour montrer une assertion P , on peut supposer non P et arriver à montrer quelque chose de faux (on parle d'une absurdité).

Exemple d'application

Pour $a, b \in \mathbb{Q}$, montrons que si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$.

Supposons que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Traitons 2 cas :

- Si $b = 0$, alors $a + 0\sqrt{2} = 0$ et $a = 0$, ce qui est absurde car on a supposé que soit a soit b est non nul.
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car on sait que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

On arrive bien à une absurdité dans tous les cas. Ainsi $a = 0$ et $b = 0$.



Voir exercices 1.4, 1.8 et 1.13.

Méthode 1.9 : Raisonner par analyse/synthèse

Pour déterminer l'ensemble des éléments vérifiant une assertion P , on peut procéder en deux temps.

Analyse : on prend un élément x vérifiant l'assertion et on cherche à la spécifier le plus possible/à en tirer le plus d'information possible (on analyse la situation).

Synthèse : on vérifie que le ou les éléments x obtenus conviennent (on fait une synthèse de ce qu'on a trouvé).

Exemple d'application

Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} = x-1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- **Analyse :** Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation, vérifiant donc $\sqrt{x+1} = x-1$. On élève au carré et on obtient que

$$x+1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Ainsi

$$x^2 - 3x = 0, \text{ c'est-à-dire } x(x-3) = 0.$$

On en déduit que $x = 0$ ou $x = 3$.

- **Synthèse :** On suppose que $x = 0$ ou $x = 3$.
 - ◇ Si $x = 0$, $\sqrt{x+1} = 1$ et $x-1 = -1$ donc 0 n'est pas solution.
 - ◇ Si $x = 3$, $\sqrt{x+1} = 2$ et $x-1 = 2$, donc 3 est bien solution.

On en conclut que l'équation $\sqrt{x+1} = x-1$ n'admet qu'une seule solution réelle : $x = 3$.



- La phase d'analyse permet de trouver les candidats potentiels et la phase de synthèse permet de vérifier que ces candidats conviennent bien.
- Dans le cas où, comme dans l'exemple ci-dessus, la phase d'analyse ne nous laisse qu'un seul candidat vérifié par la synthèse, on obtient en plus l'unicité de l'élément vérifiant l'assertion.
- Ce type de raisonnement est très approprié pour montrer des énoncés du genre « Montrer que ... s'écrit de manière unique sous la forme ... ».



Voir exercices 1.17 et 1.18.

Méthode 1.10 : Montrer une unicité

Pour montrer qu'un élément x vérifiant $P(x)$ est unique, on prend deux éléments x et y vérifiant cette propriété et on montre que $x = y$.

Exemple d'application

Montrons que la décomposition d'un réel sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ est unique.

Soit x un réel se décomposant sous la forme $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. On suppose que x s'écrit aussi sous la forme $x = c + d\sqrt{2}$ avec $c, d \in \mathbb{Q}$. On obtient donc que $a + b\sqrt{2} = x = c + d\sqrt{2}$ et donc que $(a-c) + (b-d)\sqrt{2} = 0$ avec $a-c \in \mathbb{Q}$ et $b-d \in \mathbb{Q}$. Alors $a-c = 0$ et $b-d = 0$ (cf. exemple d'illustration du raisonnement par l'absurde). Ainsi $(a, b) = (c, d)$, ce qui montre l'unicité de l'écriture demandée.



■ Cette méthode ne montre que l'unicité, elle ne montre en aucun cas l'existence.



Voir exercices 1.5 et 1.15.

Méthode 1.11 : Raisonner par récurrence

Pour raisonner par récurrence

- On définit proprement la proposition $P(n)$ à montrer.
- On repère quel type de récurrence on veut faire. Pour ce faire, on regarde de quoi on a besoin pour montrer $P(n+1)$: si l'on n'a besoin que de $P(n)$, il s'agit d'une **récurrence simple** ; si on a besoin de $P(n)$ et $P(n-1)$, il s'agit d'une **récurrence double** ; si on a besoin de tous les $P(k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il s'agit d'une **récurrence forte**.
- On initialise : on montre $P(0)$ pour les récurrences simples et fortes ; on montre $P(0)$ et $P(1)$ pour les récurrences doubles.
- On montre l'hérédité : on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on montre l'implication qui traduit l'hérédité (c'est-à-dire pour une récurrence simple, on suppose $P(n)$ vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie).
- On n'oublie pas de conclure.

Exemple d'application

(1) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

(2) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^n u_k$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$.

(1) On note $P(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}$ ». On remarque que les termes de la suite (u_n) sont définis à l'aide des deux précédents : on va donc utiliser une récurrence double (cette remarque n'a pas forcément besoin d'être écrite au propre).

Initialisation : $u_0 = u_1 = 1 \in \mathbb{N}$, ce qui montre $P(0)$ et $P(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et $P(n+1)$. On a donc $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Ainsi $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}$, ce qui montre $P(n+2)$.

On a donc montré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

(2) On note $Q(n)$: « $u_n = 2^n$ ». On remarque que les termes de la suite (u_n) sont définis à l'aide de tous les précédents : on va donc utiliser une récurrence forte.

Initialisation : $u_0 = 1 = 2^0$, ce qui montre $Q(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(k)$. On a donc

$$u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^n u_k = 1 + \sum_{k=0}^n 2^k = 1 + \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 1 + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1}$$

ce qui montre $P(n+1)$.

On a donc montré par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$.



Voir exercices 1.6, 1.7, 1.14 et 1.15.

Méthode 1.12 : Montrer une inclusion d'ensembles

Si E et F sont deux ensembles, montrer que $F \subset E$ revient à montrer que $\forall x \in F, x \in E$.
En reprenant ce que l'on a vu précédemment, on suit le schéma suivant :

Soit $x \in F$.

Raisonnement utilisant le fait que x est dans F et aucune autre propriété sur x .

Alors $x \in E$. On a donc montré que $F \subset E$.

Exemple d'application

Si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $F = \{\lambda(1, -2, 1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$, montrons que $F \subset E$.

Soit $u = (x, y, z) \in F$. Par définition de F , on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1, -2, 1) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$. Ainsi $x = \lambda, y = -2\lambda$ et $z = \lambda$. Donc $x + y + z = \lambda - 2\lambda + \lambda = 0$, ce qui montre que $u \in E$. On a donc montré que $F \subset E$.



Voir exercices 1.9, 1.10 et 1.19.

Méthode 1.13 : Montrer une égalité d'ensembles

Si E et F sont deux ensembles, pour montrer que $E = F$, sauf cas particuliers où on peut montrer aisément que $x \in E \Leftrightarrow x \in F$, on procède par double inclusion : on montre séparément que $E \subset F$ et que $F \subset E$.

Exemple d'application

Pour $A \subset B$, montrons que $A \cap B = A$.

On procède par double inclusion.

- $A \cap B \subset A$: Soit $x \in A \cap B$. On a, par définition de l'intersection, $x \in A$ et $x \in B$. Donc, entre autres, $x \in A$. On a donc montré que $A \cap B \subset A$.
- $A \subset A \cap B$: Soit $x \in A$. On a $A \subset B$, donc $x \in B$. On a alors que $x \in A$ et $x \in B$. Donc $x \in A \cap B$, ce qui montre que $A \subset A \cap B$.

On a alors montré, par double inclusion, que $A \cap B = A$.



Voir exercices 1.9, 1.16 et 1.19.

Méthode 1.14 : Montrer qu'une application est injective

Si $f : E \rightarrow F$, montrer que f est injective revient à montrer que

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En reprenant ce que l'on a déjà vu, on suit le schéma suivant :

Soient x_1 et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Raisonnement.

Alors $x_1 = x_2$. On a donc montré que f est injective.

Exemple d'application

Montrons que $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n - 1$ est injective.

Soient n et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n) = f(m)$. On a donc que $n - 1 = m - 1$ et alors $n = m$. On a donc montré que f est injective.



Voir exercices 1.12, 1.19 et 1.20.

Méthode 1.15 : Montrer qu'une application est surjective

Si $f : E \rightarrow F$, montrer que f est surjective revient à montrer que $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
En reprenant ce que l'on a vu précédemment, on suit le schéma suivant :

Soit $y \in F$.

On pose $x =$ *valeur intuitée au brouillon*. *Raisonnement*.

Alors $y = f(x)$. On a donc montré que f est surjective.

Exemple d'application

Montrons que $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n - 1$ est surjective.

Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $n = m + 1 \in \mathbb{N}^*$ et on a $f(n) = n - 1 = m + 1 - 1$. Alors $f(n) = m$.
On a donc montré que f est surjective.



Voir exercices 1.12 et 1.20.

Méthode 1.16 : Montrer qu'une application est bijective

Si $f : E \rightarrow F$, pour montrer que f est bijective il existe trois méthodes générales

Méthode 1 : on montre que f est injective et surjective.

Méthode 2 : on arrive directement à trouver la réciproque g de f de manière intuitive et on vérifie que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.

Méthode 3 : on montre que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution pour tout $y \in F$.

Exemple d'application

(1) **Montrons que $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n - 1$ est bijective.**

(2) **Montrons que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-, x \mapsto -\ln(1 + \sqrt{x})$ est bijective.**

(1) **Méthode 1** : On a montré déjà que f est injective et surjective, donc elle est bijective.

Méthode 2 : On peut assez naturellement penser que l'opération inverse d'enlever 1 est d'ajouter 1, on pose donc $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*, n \mapsto n + 1$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on a $f \circ g(n) = f(n + 1) = n + 1 - 1 = n$ donc $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $g \circ f(n) = g(n - 1) = n - 1 + 1 = n$ donc $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}^*}$.

Ainsi f est bijective.

(2) **Méthode 3** : Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow \ln(1 + \sqrt{x}) = -y \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x} = e^{-y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = e^{-y} - 1 \underset{\text{car } x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = (e^{-y} - 1)^2.$$

L'équation $y = f(x)$ admet donc bien une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ et ce pour tout $y \in \mathbb{R}_-$.

L'application f est donc bijective.



En utilisant la méthode 3, si on résout l'équation, on trouve même une expression de la réciproque de f .



Voir exercice 1.12.

Interro de cours

1. Déterminer la négation, la réciproque et la contraposée de :

- (a) « Il fait beau donc il ne pleut pas »
- (b) « J'ai bien dormi donc je suis en forme »
- (c) « J'ai bien révisé donc je connais mon cours ».

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on pose

- $P : \langle \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \rangle$
- $Q : \langle \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \rangle$.

(a) Associer les assertions P et Q aux phrases suivantes :

« f s'annule », « f est la fonction nulle ».

(b) Nier les assertions P et Q .

(c) Déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P \quad \text{et} \quad \text{non } Q \Rightarrow \text{non } P.$$

3. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{R}$. Montrer que $p \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $n + p \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Quelles assertions a-t-on le droit d'écrire ?

- | | | | |
|-------------------|---------------------------|--------------------------------|--|
| (a) $1 \in E$ | (d) $\{1\} \subset E$ | (g) $1 \in \mathcal{P}(E)$ | (j) $\{1\} \subset \mathcal{P}(E)$ |
| (b) $1 \subset E$ | (e) $\emptyset \in E$ | (h) $1 \subset \mathcal{P}(E)$ | (k) $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ |
| (c) $\{1\} \in E$ | (f) $\emptyset \subset E$ | (i) $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$ | (l) $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$. |

6. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

7. Soit f l'application qui va de l'ensemble des aéroports dans l'ensemble des villes et qui à un aéroport associe la ville où il se situe. Dire que f n'est pas surjective revient à dire que :

- (a) il y a des aéroports qui ne sont pas associés à une ville,
- (b) il y a au moins une ville sans aéroport,
- (c) tous les aéroports sont associés à une ville,
- (d) une ville ne peut pas avoir plus d'un aéroport.

8. De la même manière qu'à la question précédente transformer les affirmations suivantes en applications qui sont ou non surjectives, injectives, bijectives :

- (a) Une mairie possède un et un seul maire.
- (b) Les raisins ne possèdent pas tous des pépins.
- (c) Une place de parking ne peut pas être occupée par plus d'une voiture à la fois.
- (d) Un arbre possède au moins une branche.

Exercices

Pour s'entraîner

Exercice 1.1

Transcrire les énoncés suivants en assertions logiques puis donner leur négation :

1. La somme de deux éléments d'un ensemble E appartient encore à E .
2. La fonction réelle f est croissante.
3. La partie E de $\mathbb{R}$ est minorée.
4. La fonction f s'annule.

Exercice 1.2

Donner la négation des assertions suivantes :

1. $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$
2. $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Exercice 1.3

Soit x un nombre réel. Montrer que

1. $(\forall \varepsilon \geq 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$
2. $(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.4

1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.
3. En déduire qu'il existe deux irrationnels a et b tel que a^b soit rationnel.

Exercice 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On admet que f possède une primitive qui s'annule en 0 (on verra ce résultat plus tard). Montrer que f admet une unique primitive qui s'annule en 0.

Exercice 1.6

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 1.7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par récurrence par

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n)$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n-1)!$.

Exercice 1.8

Montrer qu'il n'existe pas de nombre à la fois pair et impair.

Exercice 1.9

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que

1. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
2. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$
3. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exercice 1.10

Soient $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $B = \{\lambda(1, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $B \subset A$.
2. A-t-on $A = B$?
3. Écrire A sous la forme $A = \{au + bv \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ où u et v sont des triplets à déterminer.

Exercice 1.11

Déterminer si les transformations suivantes définissent des applications et le cas échéant donner leur ensemble de départ et leur ensemble d'arrivée :

1. À deux réels associer leur somme
2. À deux réels associer leur quotient
3. À un rationnel associer son dénominateur
4. À une fonction associer sa primitive
5. À une suite associer son premier terme
6. À une suite associer sa limite.

Exercice 1.12

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n + 1$
2. $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto \begin{cases} n - 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
3. $g \circ f$
4. $f \circ g$
5. $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
6. $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

Pour aller plus loin**Exercice 1.13**

Soient $n + 1$ réels vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. On veut montrer qu'il y en a au moins deux consécutifs qui sont distants d'au plus $\frac{1}{n}$.

1. Écrire l'assertion mathématique correspondant à ce que l'on veut montrer.
2. Donner la négation de cette assertion.
3. Démontrer par l'absurde le résultat que l'on veut montrer.

Exercice 1.14

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

On pourra commencer par développer l'expression $\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Exercice 1.15

Montrer que tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^p(2q + 1)$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
Pour l'existence, on utilisera une récurrence forte sur l'hypothèse

$$P(n) : \ll \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q + 1) \gg.$$

Exercice 1.16

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

1. Montrer que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$.
2. Montrer que

a. $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

b. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

c. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Exercice 1.17

En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer toutes les applications de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 1.18

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 1.19

Soient $f : E \rightarrow F$ et A, B des parties de E .

1. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercice 1.20

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Corrections

Interro de cours

1. Pour les négations, on utilise la négations de $A \Rightarrow B$ qui est A et non B . On obtient

- (a) « Il fait beau et il pleut »
- (b) « J'ai bien dormi et je suis fatigué »
- (c) « J'ai bien révisé et je ne connais pas mon cours ».

Pour les réciproques :

- (a) « Il ne pleut pas donc il fait beau »
- (b) « Je ne suis pas fatigué donc j'ai bien dormi »
- (c) « Je connais mon cours donc j'ai bien révisé ».

Pour les contraposées :

- (a) « Il pleut donc il ne fait pas beau »
- (b) « Je suis fatigué donc j'ai mal dormi »
- (c) « Je ne connais pas mon cours donc je n'ai pas bien révisé ».

2. (a) On a P : « f est la fonction nulle » et Q : « f s'annule ».

(b) On a les négations suivantes

- non P : « f n'est pas la fonction nulle », c'est-à-dire « $\exists x \in E, f(x) \neq 0$ »
- non Q : « f ne s'annule pas », c'est-à-dire « $\forall x \in E, f(x) \neq 0$ ».

(c) « Si f est la fonction nulle, alors elle s'annule » est vrai et sa contraposée aussi, mais sa réciproque est fausse. Ainsi $P \Rightarrow Q$ et non $Q \Rightarrow$ non P sont vraies et $Q \Rightarrow P$ est fausse.

3. On procède par double implication.

- « Si $p \in \mathbb{Z}$, alors $n + p \in \mathbb{Z}$ » : On suppose que $p \in \mathbb{Z}$.

On sait que la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif. Donc, comme $n \in \mathbb{Z}$, on a $n + p \in \mathbb{Z}$.

- « Si $n + p \in \mathbb{Z}$, alors $p \in \mathbb{Z}$ » : On suppose que $n + p \in \mathbb{Z}$.

On a $p = (n + p) - n$. Or $n + p$ et n sont des entiers relatifs et la différence de deux entiers relatifs est un entier relatif. Ainsi $p \in \mathbb{Z}$.

4. On procède par récurrence en posant l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : \left\langle \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\rangle.$$

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^0 k^2 = 0^2 = \frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6},$$

ce qui montre $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$.

On a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

On factorise ensuite l'expression trouvée

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6).$$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. On obtient donc que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6},$$

ce qui montre $\mathcal{P}(n+1)$.

On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.



Il ne faut pas hésiter à écrire explicitement (au brouillon ou au propre) ce que l'on doit montrer. Cela peut toujours guider la manière de mener les calculs. C'est ce qui a permis ici de factoriser $2n^2 + 7n + 6$ (sans passer par l'étude du trinôme).

5. Les assertions que l'on a le droit d'écrire sont : (a), (d), (f), (i), (k), (l).

6. On procède par double inclusion.

- « $\overline{A \setminus B} \subset B \setminus A$ » : Soit $x \in \overline{A \setminus B}$.

On a $x \in \overline{A}$ donc $x \notin A$ et $x \notin \overline{B}$ donc $x \in B$. Ainsi x est un élément de B qui n'est pas dans A , c'est-à-dire $x \in B \setminus A$.

Alors $\overline{A \setminus B} \subset B \setminus A$.

- « $B \setminus A \subset \overline{A \setminus B}$ » : Soit $x \in B \setminus A$.

On a $x \in B$ donc $x \notin \overline{B}$ et $x \notin A$ donc $x \in \overline{A}$. Ainsi $x \in \overline{A \setminus B}$.

Alors $B \setminus A \subset \overline{A \setminus B}$.

On a donc montré, par double inclusion, que $\overline{A \setminus B} = B \setminus A$.

7. Dire que f n'est pas surjective revient à dire qu'un élément de l'ensemble d'arrivée de f (une ville) n'a pas d'antécédent par f (ne possède pas d'aéroport), ce qui correspond à (b).

(a) veut dire que f n'est pas bien définie; (c) veut dire que f est bien définie et (d) veut dire que f est injective.

8. (a) L'application qui va de l'ensemble des maires dans l'ensemble des mairies et qui à un maire associe sa mairie est bijective.

(b) L'application qui va de l'ensemble des pépins de raisins dans l'ensemble des raisins et qui à un pépin associe le raisin dans lequel il se trouve n'est pas surjective.

(c) L'application qui va de l'ensemble des voitures garées sur le parking dans l'ensemble des places de ce parking et qui à une voiture associe la place où elle est garée est injective.

(d) L'application qui va de l'ensemble des branches d'arbres dans l'ensemble des arbres et qui à une branche associe l'arbre sur lequel elle se trouve est surjective.

Exercice 1.1

1. Assertion : « $\forall x, y \in E, x + y \in E$ » ; négation : « $\exists x, y \in E, x + y \notin E$ ».

2. Assertion : « $\forall a, b \in D_f, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ » ; négation : « $\exists a, b \in D_f, a \leq b$ et $f(a) > f(b)$ ».

3. Assertion : « $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \geq m$ » ; négation : « $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in E, x < m$ ».

4. Assertion : « $\exists x \in D_f, f(x) = 0$ » ; négation « $\forall x \in D_f, f(x) \neq 0$ ».

Exercice 1.2

1. $\exists y \in F, \forall x \in E, y \neq f(x)$.
2. $\exists (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.
3. $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

Exercice 1.3

1. On suppose que $\forall \varepsilon \geq 0, |x| \leq \varepsilon$. Cette assertion est vraie même si $\varepsilon = 0$. Donc, pour $\varepsilon = 0$, on obtient $|x| \leq 0$. Ainsi $|x| = 0$ et $x = 0$, ce qui montre l'implication demandée.
2. On suppose que $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$. On suppose, par l'absurde, que $x \neq 0$. On a donc $|x| > 0$. Donc si on pose $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$, on a $|x| \leq \varepsilon = \frac{|x|}{2}$. En divisant de chaque côté par $|x| > 0$, on obtient que $1 \leq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.
Alors $x = 0$, ce qui montre l'implication demandée.

Exercice 1.4

1. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. On dispose donc de $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs. On a donc $p = \sqrt{2} \times q$ puis $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc p est pair (cf. exemple d'application de la méthode 1.2). On dispose donc de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. On en déduit que $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$. Donc q^2 est pair et q est aussi pair. Ainsi, p et q sont tous les deux pairs, ce qui est absurde car, par hypothèse, p et q ne sont pas tous les deux pairs.
On en conclut que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. On a $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2} \times \sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$.
3. On distingue deux cas :
 - Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, alors on pose $a = b = \sqrt{2}$ et on a bien a et b irrationnels tels que a^b est rationnel.
 - Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, alors on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$. D'après la question précédente, on a $a^b = 2$ qui est rationnel. Donc on a bien a et b deux irrationnels tels que a^b est rationnel.
 Dans les deux cas, on dispose de a et b irrationnels tels que a^b est rationnel.

Exercice 1.5

Soient F et G deux primitives de f s'annulant en 0. On a $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, donc la fonction $F - G$ est constante sur $\mathbb{R}$. On dispose donc de $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - G(x) = k$. Or $F(0) = G(0) = 0$, donc $k = 0$. Ainsi $F = G$.
On a donc montré que f n'admet qu'une seule primitive s'annulant en 0.

Exercice 1.6

On procède par récurrence en posant l'hypothèse de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{P}(n) : \ll 2^{n-1} \leq n! \leq n^n \gg.$$

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $2^{1-1} = 1 \leq 1! = 1 \leq 1^1 = 1$, ce qui montre $\mathcal{P}(1)$.