PCSI

Matthieu Fèvre
Roland Gorlier

Questions de maths



- Mémentos de cours
- Questions et exercices
- Solutions détaillées

ellipses

Références sciences

PCSI

Questions de maths

- Mémentos de cours
- Questions et exercices
- Solutions détaillées

Matthieu Fèvre
Roland Gorlier

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-116696
Dépôt légal : septembre 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné en priorité aux étudiants en classe préparatoire PCSI. Divisé en quinze chapitres, il est conçu pour être utilisé par des étudiants de tout niveau. Dans chaque chapitre, on trouvera les parties suivantes.

◇ **Un mémento du cours**

Celui-ci contient un récapitulatif exhaustif des définitions et résultats du cours. Ces éléments sont présentés assortis de perspectives sur leur utilisation. Ces perspectives sont introduites par les symboles ♥ ou ✍.

Le symbole ♥ signale des précisions sur des situations où l'on aimera appliquer le théorème ou la propriété énoncés.

Le symbole ✍ signale une remarque concernant des écueils à éviter ou des points de vigilance.

◇ **Une sélection de questions à résoudre**

Les premières questions portent sur des applications usuelles et élémentaires du cours. Les suivantes reprennent des problèmes classiques ou sont extraites d'énoncés d'oraux de concours et peuvent être plus originales. Elles demandent plus de réflexion.

Tous les énoncés sont courts de façon à ce qu'un étudiant puisse s'y pencher dès qu'il dispose de quelques minutes.

◇ **Des éclairages**

Pour chaque question, sont proposés des liens avec le cours et des tactiques de résolution classiques, des points d'attention à la lumière desquels la résolution des questions sera facilitée.

◇ **Des réponses**

Une réponse détaillée est donnée à chaque question. Le lecteur trouvera au début de chaque réponse des renvois aux principaux résultats de cours qu'il est utile d'avoir en mémoire pour comprendre cette réponse.

L'ouvrage ne se substitue pas à un cours en classe où seraient présentées les preuves des résultats. Chaque étudiant pourra s'assurer de connaître son cours avant de se lancer dans la résolution des questions.

Pour préserver le plaisir de la recherche et la joie éventuelle de trouver sa propre solution, il est conseillé de prendre un temps suffisant pour l'étude de chaque question avant de lire les éclairages puis les solutions.

Le regroupement des notions du programme en quinze chapitres permet d'avoir une synthèse sur les quinze domaines principaux. Les exercices d'approfondissement sont à aborder de préférence lorsque le domaine est maîtrisé, soit en première année, soit lors de révisions estivales pour préparer la deuxième année.

Nous avons pris beaucoup de plaisir à mettre au point cet ouvrage et espérons susciter de l'intérêt dans l'étude des questions proposées.
Nous remercions nos amis et collègues pour leur soutien et leurs relectures avisées, en particulier Laura GAY, Anne GORLIER, Frédéric MATHÉUS et Alexandre MONTAGNIER. Nous remercions aussi Marie FROPO, normalienne et ancienne élève de PC* au lycée Aux Lazaristes pour sa relecture enthousiaste et efficace.

Table des matières

I Ensembles et raisonnements **17**
I.1 Cours . . . 17
I.1.1 Rudiments de logique . . . 17
I.1.2 Quantificateurs . . . 18
I.1.3 Raisonnements par récurrence . . . 19
I.1.4 Autres raisonnements . . . 20
I.1.5 Ensembles . . . 21
I.1.6 Applications . . . 22
I.1.7 Ensembles de nombres usuels . . . 24
I.1.8 Dénombrement . . . 28
I.2 Questions . . . 31
I.3 Éclairages . . . 34
I.4 Réponses . . . 35
[R I. 1] (Récurrence simple) . . . 35
[R I. 2] (Récurrence double) . . . 36
[R I. 3] (Récurrence forte) . . . 36
[R I. 4] (Paire - Impaire) . . . 37
[R I. 5] (Une équation fonctionnelle) . . . 38
[R I. 6] (Récurrence forte) . . . 38
[R I. 7] (Images directes et réciproques) . . . 39
[R I. 8] (Injections, bijections) . . . 40
[R I. 9] (Injections, surjections, bijections) . . . 41
[R I. 10] (Indicatrices et opérations ensemblistes) . . . 42
[R I. 11] (Formule de différence symétrique) . . . 43
[R I. 12] (Petit théorème de Fermat) . . . 43
[R I. 13] (Formule de Vandermonde) . . . 44
[R I. 14] (Dénombrement de parties) . . . 44
[R I. 15] (Deux formules classiques) . . . 45
[R I. 16] (Suites croissantes) . . . 46

II Compléments de calculs **47**
II.1 Cours . . . 47
II.1.1 Sommes et produits finis . . . 47
II.1.2 Inégalités dans $\mathbb{R}$ . . . 52
II.1.3 Trigonométrie . . . 55
II.2 Questions . . . 58
II.3 Éclairages . . . 60
II.4 Réponses . . . 62
[R II. 1] (Changements d'indice - Télescopages) . . . 62
[R II. 2] (Inégalités) . . . 63
[R II. 3] (Valeurs absolues) . . . 64
[R II. 4] (Partie entière) . . . 65
[R II. 5] (Formule de Vandermonde : le retour et application) . . . 66
[R II. 6] (Sommes diverses) . . . 66
[R II. 7] (Coefficients binomiaux) . . . 67
[R II. 8] (Itération de Pascal et applications) . . . 69
[R II. 9] (Sommes doubles) . . . 70
[R II. 10] (Trigonométrie) . . . 72
[R II. 11] (Des équations trigonométriques) . . . 73
[R II. 12] (Un produit télescopique) . . . 73
[R II. 13] (Pour préparer des changements de variables) . . . 74

III Nombres complexes **75**
III.1 Cours . . . 75
III.1.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . 75
III.1.2 L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 . . . 77
III.1.3 Forme trigonométrique . . . 78
III.1.4 Équations algébriques . . . 79
III.1.5 Racines n-ièmes . . . 81
III.1.6 Exponentielle complexe . . . 82
III.1.7 Applications à la géométrie - Transformations . . . 82
III.2 Questions . . . 84
III.3 Éclairages . . . 87
III.4 Réponses . . . 89
[R III. 1] (Réel ou imaginaire pur) . . . 89
[R III. 2] (Formes algébriques et trigonométriques) . . . 89
[R III. 3] (Linéarisation - Développement) . . . 90
[R III. 4] (Racines carrées et équations polynomiales) . . . 92
[R III. 5] (Arc moitié) . . . 93
[R III. 6] (Autour des racines n-ième de l'unité) . . . 94
[R III. 7] (Racines n-ièmes) . . . 95

[R III. 8] (Des sommes classiques) 97
[R III. 9] (Calculs de sommes) 99
[R III. 10] (Formule aux huit carrés) 100
[R III. 11] (Triangles équilatéraux) 100
[R III. 12] (Droites perpendiculaires) 101
[R III. 13] (Un quadrilatère) 102
[R III. 14] (Similitude directe) 102

IV Suites numériques 103
IV.1 Cours 103
IV.1.1 Généralités 103
IV.1.2 Limite et nature 104
IV.1.3 Limite de suites réelles et inégalités 105
IV.1.4 Opérations et limites 106
IV.1.5 Suites adjacentes 107
IV.1.6 Suites extraites 108
IV.1.7 Suites arithmético-géométriques 109
IV.1.8 Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants 110
IV.1.9 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 111
IV.2 Questions 113
IV.3 Éclairages 116
IV.4 Réponses 117
[R IV. 1] (Exemple de suite sans limite) 117
[R IV. 2] (Natures de suites et limites) 118
[R IV. 3] (Limite d'une suite) 120
[R IV. 4] (Suites adjacentes) 121
[R IV. 5] (Suites extraites) 122
[R IV. 6] (Suites récurrentes simultanées) 122
[R IV. 7] (Suite arithmético-géométrique) 123
[R IV. 8] (Suite arithmético-géométrique) 124
[R IV. 9] (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2) 125
[R IV. 10] (Suites récurrentes) 125
[R IV. 11] (Suite récurrente) 127
[R IV. 12] (Quasi extractions) 128
[R IV. 13] (Théorème de Cesàro) 128
[R IV. 14] (Équivalent d'une suite récurrente) 130
[R IV. 15] (Étude d'une suite récurrente par suites extraites) . . 131
[R IV. 16] (Suite récurrente complexe) 133
[R IV. 17] (Suites sous-additives) 133

V Fonctions de la variable réelle 135
V.1 Cours . . . 135
V.1.1 Généralités . . . 135
V.1.2 Limites . . . 138
V.1.3 Continuité en un point . . . 144
V.1.4 Continuité sur un intervalle de $\mathbb{R}$ . . . 145
V.1.5 Dérivabilité . . . 146
V.1.6 Fonctions convexes, concaves . . . 152
V.1.7 Fonctions à valeurs complexes . . . 154
V.1.8 Fonctions exponentielle, logarithme népérien et puissances . . . 155
V.1.9 Fonctions circulaires : sinus, cosinus et tangente . . . 157
V.1.10 Fonctions circulaires réciproques . . . 157
V.1.11 Fonctions hyperboliques sh et ch . . . 159
V.1.12 Tableau des dérivées usuelles . . . 160
V.2 Questions . . . 161
V.3 Éclairages . . . 166
V.4 Réponses . . . 169
[R V. 1] (Calculs de limites) . . . 169
[R V. 2] (Recherche de fonctions) . . . 171
[R V. 3] (Continuité de la limite d'une suite de fonctions) . . . 172
[R V. 4] (Prolongements par continuité) . . . 172
[R V. 5] (Une équation fonctionnelle) . . . 173
[R V. 6] (Utilisation du nombre dérivé) . . . 174
[R V. 7] (Calculs de dérivées) . . . 175
[R V. 8] (Prolongement et régularité) . . . 176
[R V. 9] (Bijection réciproque) . . . 178
[R V. 10] (Exemples de fonctions sans limites) . . . 179
[R V. 11] (Fonctions bornées) . . . 180
[R V. 12] (Existence d'une solution) . . . 180
[R V. 13] (Existence d'une solution) . . . 181
[R V. 14] (Des idées fixes ?) . . . 181
[R V. 15] (Continuité et surjectivité) . . . 182
[R V. 16] (Dérivation et parité ou périodicité) . . . 182
[R V. 17] (Règle de L'Hospital) . . . 183
[R V. 18] (Application du théorème de Rolle) . . . 184
[R V. 19] (Application du théorème de Rolle : le retour) . . . 184
[R V. 20] (Valeur de la dérivée et limite à l'infini) . . . 184
[R V. 21] (Calculs de dérivées n-ièmes) . . . 185
[R V. 22] (Fonctions usuelles) . . . 187

[R V. 23] (Inégalité de Jensen) 187
[R V. 24] (Inégalité des trois pentes) 189
[R V. 25] (Monotonie et convexité) 190
[R V. 26] (Encadrement classique issu de la convexité) 191
[R V. 27] (Une équation fonctionnelle) 191
[R V. 28] (Une équation fonctionnelle) 192
[R V. 29] (Une équation fonctionnelle) 192
[R V. 30] (Étude d'une suite récurrente) 193

VI Analyse asymptotique 195
VI.1 Cours 195
VI.1.1 Relations de comparaison pour les fonctions 195
VI.1.2 Relations de comparaison pour les suites 198
VI.1.3 Généralités sur les développements limités 201
VI.1.4 Obtention de développements limités 203
VI.2 Questions 206
VI.3 Éclairages 210
VI.4 Réponses 212
[R VI. 1] (Détermination d'équivalents de fonctions) 212
[R VI. 2] (Composition d'équivalents par exp ou ln) 213
[R VI. 3] (Détermination d'équivalents de suites) 214
[R VI. 4] (Utilisation du théorème de Cesàro) 216
[R VI. 5] (Détermination d'équivalents par encadrement) 216
[R VI. 6] (Calculs de développements limités) 217
[R VI. 7] (Application de la formule de Taylor-Young) 221
[R VI. 8] (Développement limité d'une fonction réciproque) . . 221
[R VI. 9] (Calculs de limites de fonctions) 222
[R VI. 10] (Études de branches infinies) 224
[R VI. 11] (Prolongement par continuité, régularité) 225
[R VI. 12] (Équivalent d'une suite définie par une somme) . . . 225
[R VI. 13] (Somme des factorielles des n premiers entiers) . . . 226
[R VI. 14] (Équivalent du terme général d'une suite implicite) . 227
[R VI. 15] (Équivalent d'une suite récurrente) 228
[R VI. 16] (Équivalent d'une suite récurrente) 229
[R VI. 17] (Équivalent d'une suite récurrente) 229
[R VI. 18] (Suite implicite et développement asymptotique) . . 230
[R VI. 19] (Suite implicite et développement asymptotique) . . 232
[R VI. 20] (Suite implicite et développement asymptotique) . . 233

VII Polynômes **235**
VII.1 Cours . . . 235
VII.1.1 Ensemble des polynômes à une indéterminée . . . 235
VII.1.2 Dérivation des polynômes et formule de Taylor . . . 236
VII.1.3 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ . . . 237
VII.1.4 Racines d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ . . . 238
VII.1.5 Décomposition en facteurs irréductibles . . . 239
VII.1.6 Fractions rationnelles . . . 241
VII.2 Questions . . . 242
VII.3 Éclairages . . . 245
VII.4 Réponses . . . 246
[R VII. 1] (Division euclidienne - Nombre de racines) . . . 246
[R VII. 2] (Racines) . . . 247
[R VII. 3] (Équations liant un polynôme et ses dérivées) . . . 248
[R VII. 4] (Factorisation dans $\mathbb{C}$ et calcul de $\zeta(2)$) . . . 249
[R VII. 5] (Expressions à l'aide de polynômes dérivés) . . . 252
[R VII. 6] (Inégalité liant un polynôme et ses dérivés) . . . 252
[R VII. 7] (Décompositions en éléments simples) . . . 253
[R VII. 8] (Relations entre coefficients et racines) . . . 254
[R VII. 9] (Une factorisation dans $\mathbb{C}$) . . . 255
[R VII. 10] (Caractérisation des polynômes scindés) . . . 256
[R VII. 11] (Une équation polynomiale) . . . 256
[R VII. 12] (Une autre équation polynomiale) . . . 257
[R VII. 13] (Équation différentielle et polynômes) . . . 258
[R VII. 14] (Module sur le cercle unité) . . . 259

VIII Algèbre linéaire **261**
VIII.1 Cours . . . 261
VIII.1.1 Espaces vectoriels . . . 261
VIII.1.2 Sous-espaces vectoriels . . . 264
VIII.1.3 Bases . . . 265
VIII.1.4 Somme de deux sous-espaces vectoriels . . . 268
VIII.1.5 Espaces vectoriels de dimension finie . . . 269
VIII.1.6 Applications linéaires . . . 273
VIII.1.7 Applications linéaires de E dans F en dimension finie 279
VIII.1.8 Formes linéaires en dimension finie - hyperplans . . 280
VIII.1.9 Équations linéaires - Système d'équations linéaires . 281
VIII.2 Questions . . . 283
VIII.3 Éclairages . . . 287
VIII.4 Réponses . . . 290
[R VIII. 1] (Espace vectoriel or not, that is the question) . . . 290

[R VIII. 2] (Une somme qui n'est pas directe) 292
[R VIII. 3] (Images et noyaux d'endomorphismes) 292
[R VIII. 4] (Image et image réciproque) 295
[R VIII. 5] (Projecteurs et symétries) 295
[R VIII. 6] (Familles libres) 296
[R VIII. 7] (Autour du rang) 297
[R VIII. 8] (Propriété du rang) 297
[R VIII. 9] (Un automorphisme) 298
[R VIII. 10] (Centre de GL(E)) 298
[R VIII. 11] (Espace de suites récurrentes) 299
[R VIII. 12] (Puissances d'endomorphisme) 301
[R VIII. 13] (Polynômes de Gregory) 303
[R VIII. 14] (Quotient de division euclidienne) 304
[R VIII. 15] (Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$) 305
[R VIII. 16] (Stabilité de sous-espace vectoriels) 306
[R VIII. 17] (Hyperplan et forme linéaire) 307
[R VIII. 18] (Un espace vectoriel de dimension paire) 307
[R VIII. 19] (Un espace vectoriel de suites) 308
[R VIII. 20] (Utilisation de la formule de Grassmann) 310
[R VIII. 21] (Supplémentaire commun) 310
[R VIII. 22] (Endomorphismes de même noyau) 311
[R VIII. 23] (Familles libres d'un espace de matrices) 311

IX Matrices **313**
IX.1 Cours 313
IX.1.1 L'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 313
IX.1.2 Matrices et systèmes linéaires 317
IX.1.3 Matrices carrées 320
IX.1.4 Matrices carrées inversibles 322
IX.1.5 Matrice d'une application linéaire 323
IX.1.6 Changement de bases 325
IX.1.7 Noyau, image et rang d'une matrice 327
IX.1.8 Application aux systèmes linéaires 328
IX.1.9 Déterminants - généralités 329
IX.1.10 Calculs des déterminants 330
IX.1.11 Inversibilité d'une matrice, détermination de l'inverse 332
IX.2 Questions 333
IX.3 Éclairages 338
IX.4 Réponses 341
[R IX. 1] (Méthodes pour déterminer l'inverse d'une matrice) . 341
[R IX. 2] (Des propriétés de la trace) 344

[R IX. 3] (Projection) . . . 345
[R IX. 4] (Puissances de matrices et division euclidienne) 345
[R IX. 5] (Suite récurrente) . . . 347
[R IX. 6] (Puissance de matrices) . . . 347
[R IX. 7] (Déterminant de Vandermonde) . . . 349
[R IX. 8] (Calculs de déterminants) . . . 350
[R IX. 9] (Étude d'un endomorphisme) . . . 354
[R IX. 10] (Rang de matrices) . . . 355
[R IX. 11] (Noyau de matrices) . . . 356
[R IX. 12] (Polynômes définis par récurrence) . . . 357
[R IX. 13] (Résolution d'une équation matricielle) . . . 358
[R IX. 14] (Calcul de déterminant) . . . 359
[R IX. 15] (Un automorphisme) . . . 359
[R IX. 16] ($\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) 360
[R IX. 17] (Résolution d'une équation matricielle) . . . 361
[R IX. 18] (Résolution d'une équation matricielle) . . . 361
[R IX. 19] (Inverse d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$) . . . 362
[R IX. 20] (Inverse de matrice et polynôme) . . . 363
[R IX. 21] (Petite matrice circulante) . . . 364
[R IX. 22] (Des matrices rectangulaires) . . . 364
[R IX. 23] (Un isomorphisme entre $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^*$) . . . 365
[R IX. 24] (Formes linéaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ en fonction de la trace) . 366

X Intégration 367
X.1 Cours . . . 367
X.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment . 367
X.1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment . . 368
X.1.3 Intégrale et primitive . . . 371
X.1.4 Calculs d'intégrales . . . 373
X.1.5 Formules de Taylor . . . 375
X.2 Questions . . . 375
X.3 Éclairages . . . 380
X.4 Réponses . . . 382
[R X. 1] (Calculs de primitives de fonctions rationnelles) . . . 382
[R X. 2] (Calculs de primitives) . . . 383
[R X. 3] (Primitives de fonctions en sin et cos) . . . 386
[R X. 4] (Suites d'intégrales) . . . 387
[R X. 5] (Calculs de sommes de Riemann) . . . 389
[R X. 6] (Intégrale fonction des bornes 1) . . . 390
[R X. 7] (Intégrale fonction des bornes 2) . . . 392
[R X. 8] (Intégrale fonction des bornes 3) . . . 393

[R X. 9] (Obtention d'encadrements) 395
[R X. 10] (Équivalent d'une fonction définie par une intégrale) . 397
[R X. 11] (Intégrales de Wallis) 397
[R X. 12] (Limites et intégrale) 398
[R X. 13] (Lemme de Lebesgue) 399
[R X. 14] (Calcul de $\zeta(2)$) 400
[R X. 15] (Un produit d'intégrale) 401
[R X. 16] (Intégrale d'une fonction périodique) 402
[R X. 17] (Équivalent d'une fonction définie par une intégrale) . 403
[R X. 18] (Nombre de zéros) 404
[R X. 19] (Lemme de Gronwall) 404
[R X. 20] (Majoration intégrale) 405
[R X. 21] (Inégalité intégrale) 406

XI Équations différentielles 407
XI.1 Cours 407
XI.1.1 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre 407
XI.1.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants 409
XI.2 Questions 411
XI.3 Éclairages 412
XI.4 Réponses 413
[R XI. 1] (Équations différentielles linéaires d'ordre 1) 413
[R XI. 2] (Équations différentielles linéaires d'ordre 2) 416
[R XI. 3] (Un problème de Cauchy) 419
[R XI. 4] (Une inéquation différentielle) 420

XII Probabilités sur un univers fini 421
XII.1 Cours 421
XII.1.1 Dénombrement 421
XII.1.2 Espaces probabilisés 423
XII.1.3 Probabilité 424
XII.1.4 Probabilités conditionnelles 426
XII.1.5 Indépendance 427
XII.1.6 Variables aléatoires discrètes finies 429
XII.1.7 Couples de variables aléatoires 430
XII.1.8 Espérance d'une variable aléatoire discrète finie . . 432
XII.1.9 Variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie 433
XII.1.10 Indépendance de variables aléatoires 435
XII.1.11 Variables aléatoires discrètes finies usuelles 437

XII.1.12 Inégalités probabilistes 440
XII.2 Questions 440
XII.3 Éclairages 449
XII.4 Réponses 452
[R XII. 1] (Les dominos) 452
[R XII. 2] (On ajoute des boules dans une urne) 453
[R XII. 3] (Tirages conditionnés dans deux urnes) 455
[R XII. 4] (La ruine d'un joueur) 456
[R XII. 5] (Des unions d'intersections) 457
[R XII. 6] (Couplage binomiale-binomiale) 458
[R XII. 7] (Théorème de transfert) 460
[R XII. 8] (Des fonctions de variables aléatoires) 460
[R XII. 9] (Théorème de stabilité pour les lois binomiales) . . . 462
[R XII. 10] (Vidage d'une urne bicolore) 463
[R XII. 11] (Indépendance de produits de variables) 465
[R XII. 12] (Une autre formule pour l'espérance) 467
[R XII. 13] (Stairway to heaven) 467
[R XII. 14] (Les urnes de Laplace) 469
[R XII. 15] (Problème de Monty Hall) 470
[R XII. 16] (Exemple de dénombrement de retours à l'origine) . 471
[R XII. 17] (Un virus et des matrices) 472
[R XII. 18] (La loi hypergéométrique) 474
[R XII. 19] (Une relation de récurrence linéaire d'ordre 1) . . . 475
[R XII. 20] (Une urne bicolore) 477
[R XII. 21] (La première urne qui sera pleine...) 478
[R XII. 22] (Un intervalle de confiance 1) 480
[R XII. 23] (Un intervalle de confiance 2) 480
[R XII. 24] (Majoration d'une probabilité) 481
[R XII. 25] (Probabilité d'avoir deux parties disjointes) 481
[R XII. 26] (Indicatrice de l'heure) 482
[R XII. 27] (Intersection de deux parties et loi de probabilité) . 483

XIII Espaces préhilbertiens réels 485
XIII.1 Cours 485
XIII.1.1 Produit scalaire 485
XIII.1.2 Orthogonalité 488
XIII.2 Questions 493
XIII.3 Éclairages 497
XIII.4 Réponses 499
[R XIII. 1] (Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$) 499
[R XIII. 2] (Produit scalaire sur un espace de matrices) 499

[R XIII. 3] (Produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$) 500
[R XIII. 4] (Norme associée à un produit scalaire) 501
[R XIII. 5] (Caractérisations d'un projecteur orthogonal) 501
[R XIII. 6] (Le losange) 503
[R XIII. 7] (Des matrices symétriques) 503
[R XIII. 8] (Caractérisation d'une isométrie) 503
[R XIII. 9] (Trace et produit scalaire) 504
[R XIII. 10] (Inégalité de Bessel) 504
[R XIII. 11] (Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$) 505
[R XIII. 12] (Projection orthogonale sur un hyperplan) 506
[R XIII. 13] (Orthogonalité et opérations) 506
[R XIII. 14] (Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^4$) 507
[R XIII. 15] (Maximum sur la boule unité) 508
[R XIII. 16] (Des endomorphismes adjoints) 509
[R XIII. 17] (Un calcul de distance) 510
[R XIII. 18] (Polynômes de Legendre 1) 511
[R XIII. 19] (Polynômes de Legendre 2) 512
[R XIII. 20] (Endomorphisme antisymétrique) 512
[R XIII. 21] (Matrice de Gram) 514
[R XIII. 22] (Utilisation du déterminant de Gram) 515

XIV Séries numériques 517
XIV.1 Cours 517
XIV.1.1 Généralités 517
XIV.1.2 Séries de référence 520
XIV.1.3 Séries à termes positifs 521
XIV.1.4 Comparaisons séries-intégrales 522
XIV.1.5 Étude des séries complexes ou de signe quelconque . 523
XIV.1.6 Séries alternées 524
XIV.2 Questions 524
XIV.3 Éclairages 528
XIV.4 Réponses 530
[R XIV. 1] (Natures de séries) 530
[R XIV. 2] (Cas où l'équivalent n'est pas de signe constant) . . 533
[R XIV. 3] (Calculs de sommes) 534
[R XIV. 4] (Série harmonique) 537
[R XIV. 5] (Série harmonique alternée) 537
[R XIV. 6] (Nature et somme d'une série alternée) 538
[R XIV. 7] (Calculs de sommes) 539
[R XIV. 8] (Formule du binôme négatif) 540
[R XIV. 9] (Ersatz de la formule de Stirling) 542

[R XIV. 10] (Transformation d'Abel) 543
[R XIV. 11] (Somme irrationnelle d'une série de rationnels) . . 545
[R XIV. 12] (Domination des sommes partielles) 546
[R XIV. 13] (Nature et somme d'une série) 547
[R XIV. 14] (Un critère de convergence) 548
[R XIV. 15] (Nouveau critère de convergence) 549
[R XIV. 16] (Exemple de suite récurrente) 550
[R XIV. 17] (Série associée à une suite implicite) 551
[R XIV. 18] (Théorème d'Abel) 551

XV Fonctions de deux variables **553**
XV.1 Cours 553
XV.1.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$ 553
XV.1.2 Graphe et lignes de niveau 554
XV.1.3 Dérivées partielles 554
XV.1.4 Règle de la chaîne 558
XV.1.5 Extremum 558
XV.2 Questions 559
XV.3 Éclairages 561
XV.4 Réponses 561
[R XV. 1] (Points critiques - Plans tangents) 561
[R XV. 2] (Dérivée directionnelle) 562
[R XV. 3] (Recherche de points critiques) 563
[R XV. 4] (Nature de points critiques) 563
[R XV. 5] (Image d'une fonction) 564
[R XV. 6] (Fonctions homogènes) 565
[R XV. 7] (Recherche d'extrema) 566

Index **567**

Chapitre I
Ensembles et raisonnements

I.1 - Cours

I.1.1 - Rudiments de logique

[Définition I.1] Proposition mathématique
On appelle **proposition** ou **assertion** mathématique un énoncé susceptible de prendre la valeur *vrai* ou la valeur *faux*.

> ♥ *Une proposition mathématique est toujours soit vraie soit fausse (logique dite du « tiers exclu »).*

[Définition I.2] Négation - Conjonction - Disjonction
Soit P et Q deux propositions mathématiques.
$(-)$ On appelle **négation de** P la proposition « Non P » qui est fausse si et seulement si P est vraie. On la note aussi $\neg P$.
$(-)$ La **disjonction de** P **et** Q, notée « P ou Q » ou « $P \vee Q$ » est une proposition vraie si et seulement si l'une au moins des propositions P et Q est vraie.
$(-)$ La **conjonction de** P **et** Q notée « P et Q » ou « $P \wedge Q$ » est une proposition vraie si et seulement si les propositions P et Q sont vraies.

[Définition I.3] Implication - Contraposition d'une implication
Soit P et Q deux propositions mathématiques.
$(-)$ P **implique** Q (ou si P alors Q) est la proposition mathématique notée $P \Longrightarrow Q$ définie par (non P) ou Q.
Si $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on dit alors que P est une **condition suffisante** pour avoir Q ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.

$(-)$ La proposition $(\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P))$ est la **contraposée** de $(P \Longrightarrow Q)$.

[Définition I.4] Équivalence
Soit P et Q deux propositions mathématiques.
$(-)$ P **équivaut à** Q (ou P si et seulement si Q) est la proposition notée $P \iff Q$ définie par $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$.
Si $P \iff Q$ est vraie, on dit alors que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q.

$(-)$ On a : $(P \implies Q) \iff (\text{non}(Q) \implies \text{non}(P))$.

✍ *On ne doit pas employer les symboles $\implies$ et $\iff$ comme des abréviations. Par exemple $\implies$ ne remplace pas le mot « donc ».*
On écrit $P \implies Q$ pour signifier que « si P est vraie alors Q est vraie ». Il est maladroit d'écrire $P \implies Q$ lorsque l'on sait que P est vraie. Dans ce cas mieux vaut écrire en toutes lettres « on sait que P est vraie, on en déduit donc que Q est vraie ».

[Propriété I.5] Règles de calcul
Soit P, Q et R trois propositions mathématiques.
$(-)$ Associativité : $(P$ et $Q)$ et R est la proposition P et $(Q$ et $R)$.
$(P$ ou $Q)$ ou R est la proposition P ou $(Q$ ou $R)$.

$(-)$ Distributivité : P ou $(Q$ et $R)$ est la proposition $(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$.
P et $(Q$ ou $R)$ est la proposition $(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$.

$(-)$ Négation : non(non P) est la proposition P.
La proposition non(P ou Q) est la proposition (non P) et (non Q).
La proposition non(P et Q) est la proposition (non P) ou (non Q).
La proposition non$(P \implies Q)$ est la proposition (P et non(Q)).
Autrement dit $(P \implies Q)$ est fausse si P est vraie et pourtant Q est fausse.

I.1.2 - Quantificateurs

Soit x une indéterminée appartenant à un ensemble E connu. On note $P(x)$ une proposition mathématique qui dépend de x.

[Définition I.6] Le quantificateur existentiel : $\exists$
$(-)$ S'il existe **au moins** un élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie, on écrit : $\exists x \in E, P(x)$ et on lit : « il existe x dans E tel que $P(x)$ ».

$(-)$ S'il existe **un unique** élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie, on écrit : $\exists ! \, x \in E, P(x)$ et on lit : « il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ ».

[Définition I.7] Le quantificateur universel : $\forall$
Si, pour tous les éléments de E, la proposition $P(x)$ est vraie, on écrit : $\forall x \in E$, $P(x)$ et on lit : « **quel que soit** (ou **pour tout** ou **pour chaque**) x appartenant à E, $P(x)$ ».

✍ *Le quantificateur est toujours placé **avant** la proposition qu'il quantifie.*
D'autre part l'ordre des quantificateur est fondamental :
$\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)$ *: ici x ne dépend pas de y.*
$\forall y \in E, \exists x \in E, P(x,y)$ *: ici x peut a priori dépendre de y.*

I.1.3 - Raisonnements par récurrence

Il s'agit d'établir qu'une proposition $P(n)$ qui dépend de l'entier naturel n est vraie pour tous les entiers n tels que $n \geq n_0$.

[Propriété I.8] Récurrence simple
(−) Initialisation : on montre que la propriété $P(n_0)$ est vraie.
(−) Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier n fixé quelconque, $n \geq n_0$. On démontre alors que $P(n+1)$ est vraie.
(−) Conclusion : la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

♥ *Voir les exercices :* [Q I.1 p. 31], [Q I.12 p. 33]

[Propriété I.9] Récurrence double
(−) Initialisation : on montre que les propriétés $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.
(−) Hérédité : on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un entier n fixé quelconque, $n \geq n_0$. On démontre alors que $P(n+2)$ est vraie.
(−) Conclusion : la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.2 p. 31]

[Propriété I.10] Récurrence forte
Pour l'hérédité, on suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers compris entre n_0 et n et on la démontre pour $n+1$.
(−) Initialisation : on montre que la propriété $P(n_0)$ est vraie.
(−) Hérédité : on suppose que $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ..., $P(n)$ sont vraies pour un entier $n \geq n_0$ fixé quelconque. On démontre alors que $P(n+1)$ est vraie.
(−) Conclusion : la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

♥ *Voir les exercices :* [Q I.3 p. 31], [Q I.5 p. 31], [Q I.6 p. 31]

✍ *On peut aussi envisager des récurrences descendantes ou des récurrences finies.*
Si lors de l'hérédité on n'a pas utilisé l'hypothèse de récurrence, c'est qu'il n'y a pas lieu de réaliser une récurrence.

I.1.4 - Autres raisonnements

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

[Propriété I.11] Déduction - Double implication
(−) Raisonnement par déduction :
si P est vraie et si $P \Longrightarrow Q$ alors Q est vraie.
(−) Raisonnement par double implication : pour montrer que $P \Longleftrightarrow Q$ on peut commencer par montrer que $P \Longrightarrow Q$ puis montrer que $Q \Longrightarrow P$.

[Propriété I.12] Le raisonnement par disjonction de cas
On étudie tous les cas de figure.
Si $Q \Longrightarrow P$ est vraie et si non$(Q) \Longrightarrow P$ est vraie alors P est vraie.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.5 p. 31]

[Propriété I.13] Le raisonnement par l'absurde
Pour établir que $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et que Q est fausse, puis on montre que cela conduit à une contradiction.

♥ *On utilise par exemple ce type de raisonnement pour montrer qu'un certain objet n'existe pas. On suppose qu'il en existe un et l'on aboutit à une contradiction.*

[Propriété I.14] Le raisonnement par analyse-synthèse
Ce raisonnement est souvent utilisé quand on demande de prouver l'existence (ou la non existence) de solutions à un problème donné (et d'identifier la ou les solutions éventuelles). Ce raisonnement se déroule en 3 étapes :
- L'analyse : on suppose que le problème admet des solutions et on procède par **conditions nécessaires** permettant d'accumuler suffisamment de renseignements pour dégager un ou plusieurs « candidats solutions ».
- La synthèse : on vérifie si les « candidats solutions » sont **effectivement** solutions du problème.
- Conclusion : on donne la ou les solutions du problème s'il y en a.

♥ *Voir les exercices :* [Q I.4 p. 31], [Q I.5 p. 31]

I.1.5 - Ensembles

[Définition I.15] Appartenance - Inclusion - Parties
Soit F et E des ensembles.
(−) $x \in E$ signifie : x est un élément de E c'est-à-dire x appartient à E.
Si x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$.
(−) On admet l'existence d'un ensemble qui ne contient aucun élément. Il est appelé **ensemble vide** et est noté $\emptyset$.
(−) On dit que F est inclus dans E si tout élément de F est aussi dans E et l'on note $F \subset E$. Donc $F \subset E$ équivaut à $\forall x \in F,\ x \in E$.
L'ensemble F est alors **une partie** de E, **un sous-ensemble** de E.
(−) **L'ensemble des parties de** E est notée $\mathcal{P}(E)$. C'est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. Un sous-ensemble est donc un élément de $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit : $F \subset E \iff F \in \mathcal{P}(E)$.
(−) Soit A et B deux parties de l'ensemble E.
La **réunion** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$.
Il est défini par : $A \cup B = \left\{ x \in E \;\middle|\; x \in A \,\text{ou}\, x \in B \right\}$.
L'**intersection** de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$.
Il est défini par : $A \cap B = \left\{ x \in E \;\middle|\; x \in A \,\text{et}\, x \in B \right\}$
(−) Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble noté $\overline{A}$ ou $E \setminus A$ ou A^c. Il est défini par : $\overline{A} = \left\{ x \in E \;\middle|\; x \notin A \right\}$.
(−) La **différence** de A et B est l'ensemble noté $A \setminus B$.
Il est défini par : $A \setminus B = \left\{ x \in E \;\middle|\; x \in A \,\text{et}\, x \notin B \right\} = A \cap \overline{B}$.

[Propriété I.16] Opérations sur les ensembles
Soit A, B et C des parties de l'ensemble E.
(−) $E \setminus (E \setminus A) = A$.
(−) Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
(−) Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
(−) Distributivité :
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(−) Lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

♥ *Pour prouver l'égalité des ensembles A et B, on procède souvent par double inclusion. On prouve $A \subset B$ puis $B \subset A$.* [Q I.11 p. 32]

[Définition I.17] Produit cartésien
Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E par F est noté $E \times F$ et est défini par : $E \times F = \left\{ (a,b) \;\middle|\; a \in E \text{ et } b \in F \right\}$.
Les éléments de $E \times F$ sont des couples dans lesquels l'ordre intervient : $(a,b) \neq (b,a)$ si et seulement si $a \neq b$.
$(-)$ Si $E = F$ on note $E \times E = E^2$.
$(-)$ Généralisation : soit E, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, des ensembles :
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \iff x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$.
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \iff x_1 \in E, x_2 \in E, \ldots, x_n \in E$.

[Définition I.18] Partition d'un ensemble
Soit I une partie de $\mathbb{N}$. On appelle **partition** d'un ensemble E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E vérifiant :

i) $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$.
ii) $\forall (i,j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

I.1.6 - Applications

Conformément au programme, nous ne distinguerons pas les notions de fonction et d'application.
Soit E et F des ensembles.

[Définition I.19] Application - Fonction
Une **application (ou fonction)** de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F qui s'appelle **l'image par f de x**.
On notera : $f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x)$.
L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.
L'ensemble $\left\{ (x, f(x)) \;\middle|\; x \in E \right\}$ s'appelle le **graphe** de la fonction f.
En particulier, $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto x$ est la **fonction identité** de E.
Si $y \in F$, on appelle **antécédent de** y, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Il peut exister 0, 1 ou plusieurs antécédents d'un élément $y \in F$.

[Définition I.20] Famille d'éléments de E
Soit I un ensemble fini. On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i \in I}$ cette famille.

[Définition I.21] Fonction indicatrice
Soit A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A la fonction de E dans $\{0,1\}$ notée $\mathbb{1}_A$ définie par $\mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

♥ *Voir les exercices :* [Q I.10 p. 32], [Q I.11 p. 32]

[Définition I.22] Restriction - Prolongement
Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, soit A une partie de E et E' un ensemble tel que $E \subset E'$.
$(-)$ On appelle **restriction** de f à A la fonction notée $f|_A$ définie par :

$$f|_A : A \longrightarrow F,\ x \longmapsto f(x).$$

$(-)$ On appelle **prolongement** de f à E' toute fonction $g : E' \mapsto F$

$$\text{telle que : } \forall x \in E,\ g(x) = f(x).$$

[Propriété I.23] Égalité de deux fonctions
Deux fonctions f et g sont égales si elles ont le même ensemble de départ (noté E), le même ensemble d'arrivée et vérifient : $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

[Définition I.24] Image directe et image réciproque d'une partie
Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, soit A une partie de E et soit B une partie de F.
$(-)$ **L'image directe de** A **par** f est le sous-ensemble de F noté $f(A)$ défini par : $f(A) = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in A \right\} = \left\{ y \in F \;\middle|\; \exists x \in A, y = f(x) \right\}$.
C'est **l'ensemble des images** des éléments de A par la fonction f.

$(-)$ **L'image réciproque de** B **par** f est le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ défini par : $f^{-1}(B) = \left\{ x \in E \;\middle|\; f(x) \in B \right\}$.
C'est **l'ensemble des antécédents** des éléments de B.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.7 p. 32]

[Définition I.25] Composition
Soit E, F et G des ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.
La fonction « f suivie de g » est une fonction de E dans G qui s'appelle la **composée** de f par g.
Notée $g \circ f$, elle est définie par : $g \circ f : E \longrightarrow G,\ x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

[Définition I.26] Injection, surjection, bijection, réciproque
Soit E et F des ensembles et soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.
(−) La fonction f est une **injection** (ou est **injective**) si et seulement si : $\forall (x,x') \in E^2$, $(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$.

(−) La fonction f est une **surjection** (ou est **surjective**) si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$.

(−) La fonction f est une **bijection** (ou est **bijective**) si et seulement si elle est injective et surjective, c'est-à-dire : $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$, $y = f(x)$.

(−) Lorsque la fonction f est bijective, on définit sa **fonction réciproque** notée f^{-1}. Elle appartient à $\mathcal{F}(F,E)$ et vérifie :

$$\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

♥ *La fonction f est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent dans E. Autrement dit, des éléments distincts de E ont des images distinctes : $\forall (x,x') \in E^2$, $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.*
♥ *La fonction f est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent dans E.*
♥ *La fonction f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent dans E.*
♥ *Voir les exercices :* [Q I.7 p. 32], [Q I.8 p. 32], [Q I.9 p. 32]

[Propriété I.27] Composition d'injections ou de surjections
(−) La composée de deux injections est une injection.

(−) La composée de deux surjections est une surjection.

[Propriété I.28] Étude des bijections
Soit E, F et G des ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.
(−) Si les fonctions f et g sont bijectives, alors la fonction $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(−) La fonction f est bijective si et seulement s'il existe une fonction $h \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ h = \mathrm{id}_F$. Alors $h = f^{-1}$.

I.1.7 - Ensembles de nombres usuels

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

[Définition I.29] Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$
La relation $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$. Autrement dit :

i) elle est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,
ii) elle est antisymétrique : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y$,
iii) elle est transitive : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$,
iv) l'ordre est total : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. On définit alors les ensembles :

$$[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\} \quad ; \quad]a, b[= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$$
$$[a, b[= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\} \quad ; \quad]a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}.$$

[Définition I.30] L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels
$(-)$ $\mathbb{N}$ est muni de la relation d'ordre $\leq$ induite par celle de $\mathbb{R}$.
$(-)$ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
$(-)$ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

[Définition I.31] L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs
$(-)$ L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ est muni de la relation d'ordre $\leq$ induite par celle de $\mathbb{R}$.
$(-)$ Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
$(-)$ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \leq b$. On définit alors les ensembles :

$$[\![a, b]\!] = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b \,\} \quad \text{et} \quad [\![a, +\infty[\![= \{\, x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \,\}.$$

[Définition I.32] Divisibilité, diviseur, multiple
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
On dit que b **divise** a si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$.
On dit alors que b est un **diviseur** de a et a est un **multiple** de b.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.12 p. 33]

[Propriété I.33] Division euclidienne
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

On dit que q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne.
On en déduit que b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

[Définition I.34] Congruence
(−) Dans $\mathbb{Z}$: soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On dit que a **est congru à** b **modulo** n et l'on note $a \equiv b \ [n]$ si et seulement si n divise $b - a$.
(−) Dans $\mathbb{R}$: soit θ_1, θ_2 et a trois nombres réels. On dit que θ_1 **est congru à** θ_2 **modulo** a et l'on note $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_2 - \theta_1 = ka$.

[Propriété I.35] Calculs avec les congruences
(−) La relation de congruence vérifie :
i) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \theta \equiv \theta \ [a]$,
ii) $\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R}, (\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]) \Longrightarrow (\theta_2 \equiv \theta_1 \ [a])$,
iii) elle est transitive : $\forall (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3, \forall a \in \mathbb{R}$:
$(\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a])$ et $(\theta_2 \equiv \theta_3 \ [a]) \Longrightarrow (\theta_1 \equiv \theta_3 \ [a])$.

On dit que c'est une relation d'équivalence.

(−) Règles de calcul dans $\mathbb{Z}$.
Soit θ_1, θ_2, ϕ_1, ϕ_2 et a des éléments de $\mathbb{Z}$ vérifiant : $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]$ et $\phi_1 \equiv \phi_2 \ [a]$.
Alors on a :

i) $\theta_1 + \phi_1 \equiv \theta_2 + \phi_2 \ [a]$,
ii) $\theta_1 \phi_1 \equiv \theta_2 \phi_2 \ [a]$,
iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \theta_1^k \equiv \theta_2^k \ [a]$.

(−) Règles de calcul dans $\mathbb{R}$.
Soit θ_1, θ_2, ϕ_1, ϕ_2 et a des réels vérifiant : $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [a]$ et $\phi_1 \equiv \phi_2 \ [a]$.
Alors on a :

i) $\theta_1 + \phi_1 \equiv \theta_2 + \phi_2 \ [a]$,
ii) $\forall r \in \mathbb{R}, r\theta_1 \equiv r\theta_2 \ [ra]$.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.12 p. 33]

[Définition I.36] PGCD, PPCM
(−) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, l'un au moins de ces nombres étant non nul. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est non vide et majoré donc possède un plus grand élément appelé **PGCD(a, b) : plus grand commun diviseur à** a **et** b. On le note aussi $a \wedge b$ et l'on a : $a \wedge 0 = a$.
On convient de plus que PGCD(0, 0)= 0.
(−) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que a et b sont non nuls. L'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b est non vide et minoré donc possède un plus petit élément appelé **PPCM(a, b) : plus petit commun multiple à** a **et** b. On le note aussi $a \vee b$ et l'on a : $a \vee 0 = 0$.

[Propriété I.37] Algorithme d'Euclide : recherche du PGCD
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $b \leq a$.
$(-)$ Si b divise a alors PGCD(a,b)= b.
$(-)$ Si b ne divise pas a.
Par division euclidienne il existe un unique couple $(q_1, r_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < b$ et l'on a : PGCD(a,b)=PGCD(b, r_1).
Par itération du procédé, on construit les couples (q_1, r_1), $(q_2, r_2), \ldots$ tels que $0 < \cdots < r_2 < r_1$. Ce procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes et le PDCD(a,b) est le dernier reste non nul.

[Définition I.38] Nombres premiers, premiers entre eux
Un entier naturel $p \geq 2$ est dit **premier** s'il a exactement deux diviseurs.
Deux entiers naturels n et p sont dit **premiers entre eux** si PGCD(n,p)=1.
En conséquence deux nombres premiers distincts ont 1 pour PGCD et sont premiers entre eux.

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.12 p. 33]

[Propriété I.39] Décomposition en produit de nombres premiers
$(-)$ Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en produit de nombres premiers, unique à l'ordre près des facteurs.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$, des nombres premiers $p_1, \ldots, p_N$ deux à deux distincts et des entiers non nuls $r_1, \ldots, r_N$ tels que :

$$n = p_1^{r_1} \times \cdots \times p_N^{r_N} = \prod_{i=1}^{N} p_i^{r_i}.$$

$(-)$ Si $p \notin \{p_1, \ldots, p_N\}$, on peut écrire : $n = p^0 \times \prod_{i=1}^{N} p_i^{r_i}$.

[Propriété I.40] Application au PGCD et au PPCM
Soit a et b des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$, des nombres premiers $p_1, \ldots, p_N$ deux à deux distincts et des entiers $r_1, \ldots, r_N$ et $s_1, \ldots, s_N$ tels que : $a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{r_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i}$.

Alors on a : PGCD(a,b)= $\prod_{i=1}^{N} p_i^{\max(r_i,s_i)}$ et PPCM(a,b)= $\prod_{i=1}^{N} p_i^{\min(r_i,s_i)}$.

[Propriété I.41] Ensemble des nombres premiers
L'ensemble des nombres premiers est infini.

[Définition I.42] Nombres décimaux
L'ensemble $\left\{ a \times 10^{-n} \;\middle|\; (a,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est appelé **ensemble des nombres décimaux**. Ce sont les nombres qui admettent une écriture décimale finie, c'est-à-dire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

[Définition I.43] Nombres rationnels
L'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$ est appelé **ensemble des nombres rationnels**.

[Définition I.44] Nombres réels, nombres irrationnels
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est appelé **ensemble des nombres irrationnels**. En particulier $\sqrt{2}$, π et e sont irrationnels.

I.1.8 - Dénombrement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$.

[Définition I.45] Cardinal d'un ensemble fini
$(-)$ Un ensemble non vide E est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas, l'entier naturel n est unique et est appelé le **cardinal de** E. On notera $\text{card}(E) = n$. On peut aussi noter $|E| = n$.

$(-)$ On convient que $\text{card}(\emptyset) = 0$.

$(-)$ Soit E et F deux ensembles finis. Les ensembles E et F sont **disjoints** si et seulement si $\text{card}(E \cap F) = 0$.

[Propriété I.46] Cardinal d'une partie d'un ensemble fini
Soit A un sous-ensemble d'un ensemble fini E.

$(-)$ On a $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.

$(-)$ $A = E$ si et seulement si $\text{card}(A) = \text{card}(E)$.

[Propriété I.47] Cardinaux et applications
Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E vers F.
(−) Si f est injective alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
(−) Si f est surjective alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.
(−) Si f est bijective alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.
(−) Si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ alors :

$$(f \text{ injective}) \iff (f \text{ surjective}) \iff (f \text{ bijective}).$$

(−) On a : $\text{card}(\mathcal{F}(E,F)) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$.

♥ *Une méthode efficace et rigoureuse pour trouver le cardinal d'un ensemble A, c'est de trouver une bijection de A vers un ensemble de cardinal connu.*

[Propriété I.48] Opération sur les cardinaux
Soit E et F deux ensembles finis. Soit A une partie de E.
(−) $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.
(−) $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$.
(−) Si E et F sont disjoints, on a $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.
(−) $\text{card}(E \setminus A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.
Généralisation. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_p$ p ensembles finis.
(−) $\text{card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \cdots \times \text{card}(E_p)$.
(−) Si de plus les ensembles $E_1, \ldots, E_p$ sont deux à deux disjoints on a :

$$\text{card}(E_1 \cup \cdots \cup E_p) = \text{card}(E_1) + \cdots + \text{card}(E_p).$$

(−) En particulier si $(A_1, \ldots, A_p)$ est une partition de l'ensemble fini E :

$$\text{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = \text{card}(E).$$

♥ *Voir l'exercice :* [Q I.13 p. 33], [Q I.16 p. 33]

[Définition I.49] p-listes
Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **p-liste ou p-uplet d'éléments de** E tout élément $(a_1, \ldots, a_p)$ de E^p.
Dans cet élément, l'ordre compte et il peut y avoir des répétitions d'un ou plusieurs éléments.

[Propriété I.50] Dénombrement de p-listes
On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. On a : $0! = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E un ensemble fini de cardinal n.
(−) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.
(−) Soit $p \in [\![1, n]\!]$.
Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
(−) Conséquence : le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal $p \in [\![1, n]\!]$ dans un ensemble de cardinal n est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

[Propriété I.51] Permutations
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n.
Une **permutation de** E est une bijection de E dans lui-même.
Le nombre de permutations de E est $n!$ qui est aussi le nombre de bijections de E vers E ou encore le nombre de n-listes d'éléments distincts de E.

[Définition I.52] Combinaisons
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}$.
Une **p-combinaison d'éléments de** E est une partie de E à p éléments.

♥ *Voir les exercices :* [Q I.14 p. 33], [Q I.16 p. 33]

[Propriété I.53] Nombre de combinaisons - Nombre de parties
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}$.
(−) Le nombre de p-combinaisons est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
(−) Le nombre de parties de E à p éléments est donc $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
(−) Le nombre de parties de E est donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

♥ *Voir les exercices :* [Q I.12 p. 33], [Q I.13 p. 33], [Q I.14 p. 33] [Q I.15 p. 33], [Q I.16 p. 33]

I.2 - Questions

[Question I.1] Pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $a_k = k(k+1)(k+2)$ et $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{(n+3)!}{4(n-1)!}$.

(*Éclairage page* 34, *Réponse page* 35)

[Question I.2] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation : $u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right]$.

(*Éclairage page* 34, *Réponse page* 36)

[Question I.3] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}\left(u_1 + 2u_2 + \cdots + (k+1)u_k + \cdots + nu_{n-1}\right)$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$. (*Éclairage page* 34, *Réponse page* 36)

[Question I.4] On dit qu'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire (respectivement impaire) si : $\forall x \in I$, $(-x) \in I$ et $f(-x) = f(x)$ (respectivement : $\forall x \in I$, $(-x) \in I$ et $f(-x) = -f(x)$).
On note P (respectivement I) le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formé des fonctions paires (respectivement impaires).
Montrer que toute fonction f de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. (*Éclairage page* 34, *Réponse page* 37)

[Question I.5] Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes telles que : $f(2) = 2$ et pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $f(pq) = f(p)f(q)$.

(*Éclairage page* 34, *Réponse page* 38)

[Question I.6] Montrer le résultat de cours [P I.40 p.27] : « tout entier de $[\![2, +\infty[\![$ s'écrit comme le produit d'un ou plusieurs nombres premiers ».

(*Éclairage page* 34, *Réponse page* 38)

[Question I.7] Soit E, F deux ensembles, A et A' des parties de E, H une partie de F et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer les propositions suivantes.
$(-)$ $A \subset f^{-1}(f(A))$.
$(-)$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$ si et seulement si f est injective.
$(-)$ $f(f^{-1}(H)) \subset H$.
$(-)$ $\forall H \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(H)) = H$ si et seulement si f est surjective.
$(-)$ f est injective si et seulement si $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
$(-)$ f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.

(*Éclairage page* 34, *Réponse page* 39)

[Question I.8] Soit $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2,\ (x,y) \longmapsto (2x+y, 5x+3y)$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|g(x) - g(y)| \geq |x - y|$.

$(-)$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

$(-)$ Montrer que g est injective. (*Éclairage page* 34, *Réponse page* 40)

[Question I.9] Soit E, F et G trois ensembles et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(G,E)$. Montrer les implications suivantes.
$(-)$ $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow$ f est injective.
$(-)$ $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow$ g est surjective.
$(-)$ $g \circ f$ est surjective et g injective $\Longrightarrow$ f est surjective.
$(-)$ $g \circ f$ est injective et f surjective $\Longrightarrow$ g est injective.
$(-)$ $h \circ g \circ f$ et $f \circ h \circ g$ injectives et $g \circ f \circ h$ surjective $\Longrightarrow$ f, g et h sont bijectives. (*Éclairage page* 34, *Réponse page* 41)

[Question I.10] Soit A, B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B \ ;\ \mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A \ ;\ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}.$$

(*Éclairage page* 35, *Réponse page* 42)

[Question I.11] Soit E, F deux ensembles. On note

$$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F).$$

Pour A, B et C trois parties de E, montrer que : $A\Delta C = B\Delta C \Longleftrightarrow A = B$.

(*Éclairage page* 35, *Réponse page* 43)

[Question I.12] Montrer que si p est un nombre premier, alors pour tout entier k tel que $0 < k < p$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
En déduire que si p est premier et a non divisible par p alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 \ [p].$$

(*Éclairage page* 35, *Réponse page* 43)

[Question I.13] Soit m, n et p des entiers naturels tels que $p \leq n + m$.
Par un double décompte, établir :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

(*Éclairage page* 35, *Réponse page* 44)

[Question I.14] Soit E ensemble fini de cardinal $\text{card}(E) = n$.
Déterminer le nombre de couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$.

(*Éclairage page* 35, *Réponse page* 44)

[Question I.15] Soit n, p et k des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$. Montrer par dénombrement les deux formules suivantes.

(−) Formule des représentants : $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

(−) Formule du capitaine : si $p \in \mathbb{N}^*$: $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

(*Éclairage page* 35, *Réponse page* 45)

[Question I.16] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

(−) Déterminer le nombre de suites strictement croissantes de p entiers pris dans $[\![1, n]\!]$.

(−) Déterminer le nombre de suites croissantes de p entiers pris dans $[\![1, n]\!]$.

(*Éclairage page* 35, *Réponse page* 46)

I.3 - Éclairages

[Éclairage I.1] Le résultat qui dépend de l'indice entier n est donné. On peut donc envisager une récurrence. (*Réponse page* 35)

[Éclairage I.2] Le résultat qui dépend de l'indice entier n est donné et la relation qui détermine le terme suivant dépend des deux termes précédents. On peut donc envisager une récurrence double. (*Réponse page* 36)

[Éclairage I.3] Le résultat qui dépend de l'indice entier n est donné, mais la relation qui détermine le terme suivant dépend de tous les termes précédents. On peut donc envisager une récurrence forte. (*Réponse page* 36)

[Éclairage I.4] On pourra envisager un raisonnement par analyse-synthèse. (*Réponse page* 37)

[Éclairage I.5] On pourra envisager un raisonnement par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, on pourra penser à réaliser une récurrence forte et travailler par disjonction de cas. (*Réponse page* 38)

[Éclairage I.6] On pourra penser à réaliser une récurrence forte et travailler par disjonction de cas. (*Réponse page* 38)

[Éclairage I.7] Pour montrer qu'un ensemble U est inclus dans un ensemble V, on peut montrer que : $\forall x \in U,\ x \in V$.
Pour montrer que $U = V$ on peut justifier successivement $U \subset V$ puis $V \subset U$.
Soit $f : U \longrightarrow V$ une fonction. Pour justifier que f est injective, on montre en général que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$. Pour justifier que f est surjective, on montre en général que : $\forall y \in V,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$. (*Réponse page* 39)

[Éclairage I.8] Pour justifier qu'une fonction $f : U \longrightarrow V$ est injective, on montre en général que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$, et pour justifier qu'elle est bijective, on peut prouver que : $\forall y \in V,\ \exists\,!\, x \in U,\ y = f(x)$. (*Réponse page* 40)

[Éclairage I.9] Pour justifier qu'une fonction $f : U \longrightarrow V$ est injective, on montre en général que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$, et pour justifier qu'elle est surjective, on montre en général que : $\forall y \in V,\ \exists x \in U,\ y = f(x)$.
(*Réponse page* 41)

[Éclairage I.10] Voir la définition des fonctions indicatrices [D I.21 p.23]. (*Réponse page* 42)

[Éclairage I.11] On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent. (*Réponse page* 43)

[Éclairage I.12] On pourra utiliser la formule du capitaine [Q I.15 p. 33] et le lemme de Gauss : soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, si $\text{PGCD}(a, b) = 1$ et si a divise bc alors a divise c, puis la formule du binôme [P II.10 p.50]. (*Réponse page* 43)

[Éclairage I.13] Si A est un ensemble avec $\text{card}(A) = n$, B est un ensemble avec $\text{card}(B) = m$ et $A \cap B = \emptyset$, dénombrer de deux façons les parties à p éléments de $A \cup B$. (*Réponse page* 44)

[Éclairage I.14] On pourra utiliser la formule du binôme [P II.10 p.50]. (*Réponse page* 44)

[Éclairage I.15] On pourra utiliser une population de n individus et déterminer de deux façons le nombre d'équipes de p personnes ayant k représentants. (*Réponse page* 45)

[Éclairage I.16] Pour les suites croissantes, on pourra associer à une suite donnée un mot constitué avec deux types de caractères et dénombrer le nombre de mots possibles. (*Réponse page* 46)

I.4 - Réponses

[Réponse I.1] (**Récurrence simple**)

(*Relire la question : page* 31, *le cours :* [P I.8 p.19])

Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: « $S_n = \dfrac{(n+3)!}{4(n-1)!}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$(-)$ $S_1 = 1 \times 2 \times 3 = 6$ et $\dfrac{(1+3)!}{4(1-1)!} = \dfrac{4!}{4 \times 1} = 3! = 6$. Donc $P(1)$ est vraie.

$(-)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $P(n)$ est vérifiée.

$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)(n+3)$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $S_{n+1} = \dfrac{(n+3)!}{4(n-1)!} + \dfrac{(n+3)!}{n!}$.
Par réduction au même dénominateur on obtient :
$S_{n+1} = \dfrac{(n+3)!(n+4)}{4n!} = \dfrac{(n+1+3)!}{4(n+1-1)}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
$(-)$ D'après le principe de récurrence simple [P I.8 p.19] on a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{(n+3)!}{4(n-1)!}.}$$

[Réponse I.2] (**Récurrence double**)

(*Relire la question : page* 31, *le cours :* [P I.9 p.19])
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation : $u_{n+1} + u_{n-1} = 4u_n$.
Montrons que la propriété $P(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right]$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une récurrence double.
$(-)$ $\dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^0 + (2-\sqrt{3})^0\right] = 1 = u_0$ donc $P(0)$ est vérifiée.
$\dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^1 + (2-\sqrt{3})^1\right] = 2 = u_1$ donc $P(1)$ est vérifiée.
$(-)$ Soit n un entier non nul fixé quelconque. Supposons que $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies. On a $u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$ d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :
$u_{n+1} = 2\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] - \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{n-1} + (2-\sqrt{3})^{n-1}\right]$ donc
$u_{n+1} = (2+\sqrt{3})^{n-1}\left(4 + 2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\right) + (2-\sqrt{3})^{n-1}\left(4 - 2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\right)$ d'où
$u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(2+\sqrt{3})^{n-1}\left(7 + 4\sqrt{3}\right) + \dfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})^{n-1}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$. On en déduit
$u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(2+\sqrt{3})^{n-1}\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \dfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})^{n-1}\left(2-\sqrt{3}\right)^2$. C'est-à-dire
$u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(2+\sqrt{3})^{n+1} + \dfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})^{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vérifiée.
$(-)$ D'après le principe de récurrence double [P I.9 p.19] on a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right].}$$

[Réponse I.3] (**Récurrence forte**)

(*Relire la question : page* 31, *le cours :* [P I.10 p.19])
Notons $P(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 1$ ». Montrons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une récurrence forte.

(−) $P(0)$ est vérifiée.

(−) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$ est vraie.

$u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2+1}\,(u_1 + 2u_2 + \cdots + (k+1)u_k + \cdots + nu_{n-1} + (n+1)u_n)$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $0 \leq u_k \leq 1$.

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1)^2+1}\,(1 + 2 + \cdots + n + (n+1))$. Or la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1 nous donne :

$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, d'où $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{(n+1)(n+2)}{2((n+1)^2+1)}$.

Or $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2((n+1)^2+1)} = \dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+4n+2} \leq 1$.

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. $P(n+1)$ est ainsi vérifiée.

(−) D'après le principe de récurrence forte [P I.10 p.19] on a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1.}$$

[Réponse I.4] (**Paire - Impaire**)

(*Relire la question : page* 31, *le cours :* [P I.14 p.20])

Analyse : soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Supposons qu'il existe $u \in P$ et $v \in I$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(x) + v(x) \quad (\star)$. La parité de u et l'imparité de v donnent : $f(-x) = u(-x) + v(-x) = u(x) - v(x) \quad (\star\star)$.

En ajoutant $(\star\star)$ à $(\star)$ on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

D'autre part en soustrayant $(\star\star)$ à $(\star)$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Synthèse : soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Posons $u : x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Montrons que les fonctions u et v sont respectivement paire et impaire et que leur somme donne f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) + v(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $u(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = u(x)$. Donc u est paire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $v(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -v(x)$. Donc v est impaire.

Donc toute fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est bien la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

☞ L'analyse a de plus prouvé que cette décomposition est unique.

[Réponse I.5] (**Une équation fonctionnelle**)

(*Relire la question : page* 31, *le cours :* [P I.10 p.19], [P I.12 p.20], [P I.14 p.20])

(−) Analyse. Soit f une application convenant.
$f(2) = f(1 \times 2) = f(1)f(2) = 2f(1) = 2$. Donc $f(1) = 1$.
Par croissance stricte de f, $f(0) = 0$.
Montrons par récurrence forte que la propriété $P(n)$: « $f(n) = n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ $f(0) = 0 < f(1) = 1 < f(2) = 2$. Donc $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supposons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$.

Si $n+1$ est pair : $\exists\, p \in \left\{0, \ldots, \dfrac{n+1}{2}\right\}$, $n + 1 = 2p$.

D'où $f(n+1) = f(2p) = f(2)f(p) = 2p = n+1$. Donc $P(n+1)$ est vérifiée.

Si $n+1$ est impair : $\exists p \in [\![0, \dfrac{n}{2}]\!]$, $n + 1 = 2p + 1$ donc $n + 2 = 2(p + 1)$.

D'où $f(n + 2) = f(2)f(p + 1) = 2(p + 1) = n + 2$.

Par stricte croissance de f, $f(n) = n < f(n + 1) < f(n + 2) = n + 2$.

D'où $f(n + 1) = n + 1$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

◇ D'après le principe de récurrence forte [P I.10 p.19], on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n.}$$

(−) Synthèse. Soit $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Alors $f(2) = 2$, f est strictement croissante et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a : $f(pq) = pq = f(p)f(q)$.

Donc $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est l'unique application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f(2) = 2$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $f(pq) = f(p)f(q)$.

[Réponse I.6] (**Récurrence forte**)

(*Relire la question : page* 31, *le cours :* [P I.10 p.19])

Procédons par récurrence forte. Notons $P(n)$ la propriété : « l'entier naturel $n \in [\![2, +\infty[\![$ s'écrit comme le produit d'un ou plusieurs nombres premiers ».
(−) 2 est premier, donc $P(2)$ est vraie.

(−) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Supposons que, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $P(k)$ est vérifiée.

◇ Si $n + 1$ est premier, alors $P(n + 1)$ est acquise.

◇ Si $n+1$ n'est pas premier, alors il existe $(a, b) \in [\![2, n]\!]^2$ tel que : $n+1 = ab$. D'après l'hypothèse de récurrence forte, a et b s'écrivent comme le produit d'un ou plusieurs nombres premiers, donc $n + 1$ aussi. Donc $P(n + 1)$ est vérifiée.

(−) D'après le principe de récurrence forte [P I.10 p.19], tout entier de $[\![2, +\infty[\![$ s'écrit comme le produit d'un ou plusieurs nombres premiers.

[Réponse I.7] (**Images directes et réciproques**)

(*Relire la question : page* 32, *le cours :* [D I.24 p.23], [D I.26 p.24])

(−) Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Or par définition, $f^{-1}(f(A))$ est l'ensemble des éléments de E qui ont leur image par f dans $f(A)$.
Donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi : $\boxed{A \subset f^{-1}(f(A)).}$

(−) Supposons que la fonction f est injective. Montrons que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$. Autrement dit, il existe $a \in A$, tel que $f(x) = f(a)$. Donc $x = a$ car f est injective, d'où $x \in A$. $\boxed{\text{Donc } f^{-1}(f(A)) \subset A.}$

D'après l'inclusion précédente, par double inclusion on a : $\boxed{f^{-1}(f(A)) = A.}$

Réciproquement, montrons que si pour toute partie A de E on a $f^{-1}(f(A)) = A$ alors f est injective.
Soit $(a, a') \in E^2$ tel que $f(a) = f(a')$. Montrons que $a = a'$.
Prenons alors $A = \{a\}$. Ainsi $f(A) = \{f(a)\} = \{f(a')\}$.
Donc par définition $a' \in f^{-1}(f(A))$.
Or $f^{-1}(f(A)) = A = \{a\}$ d'où $a' = a$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc injective.}}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A \Longleftrightarrow f \text{ est injective.}}$$

(−) $f^{-1}(H) = \{\, x \in E \mid f(x) \in H \,\}$ donc par définition :
$f(f^{-1}(H)) = \{\, f(x), x \in E \mid f(x) \in H \,\}$. $\boxed{\text{D'où } f(f^{-1}(H)) \subset H.}$

(−) Supposons que f est surjective. Soit H une partie quelconque de F.
Montrons que $H \subset f(f^{-1}(H))$.
Soit $y \in H$. Alors $\exists x \in E,\ y = f(x)$. Donc $x \in f^{-1}(H)$ d'où $y \in f(f^{-1}(H))$.
Par conséquent $\boxed{H \subset f(f^{-1}(H)).}$

Donc d'après l'inclusion précédente : $\boxed{H = f(f^{-1}(H)).}$

Réciproquement, supposons que $\forall H \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(H)) = H$. Cette égalité est en particulier vraie pour $H = F$.
Ainsi : $\forall y \in F,\ \exists x \in f^{-1}(F) \subset E,\ y = f(x)$. $\boxed{\text{Donc } f \text{ est surjective.}}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall H \in \mathcal{P}(F),\ f\left(f^{-1}(H)\right) = H \Longleftrightarrow f \text{ est surjective.}}$$

(−) Supposons f injective. Soit A et A' dans $\mathcal{P}(E)$.
Montrons que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ par double inclusion.

- ⋄ Soit $x \in A \cap A'$. Alors $x \in A$ donc $f(x) \in f(A)$ et de même $x \in A'$ donc $f(x) \in f(A')$. Ainsi $f(x) \in f(A) \cap f(A')$ donc $\boxed{f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').}$

$\diamond$ Soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Alors $y \in f(A)$, donc $\exists x \in A$, $y = f(x)$.
De même : $y \in f(A')$, donc $\exists x' \in A'$, $y = f(x')$. Donc $f(x) = f(x')$.
Par injectivité de f, $x = x' \in A \cap A'$. $\boxed{\text{Donc } f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A').}$

D'où, par double inclusion : $\boxed{f(A) \cap f(A') = f(A \cap A').}$

Réciproquement, supposons que pour toutes parties A et A' de E, on a : $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')$. Montrons alors que f est injective.
Soit a et a' deux éléments distincts de E. Considérons $A = \{a\}$ et $A' = \{a'\}$.
On a $f(A) = \{f(a)\}$ et $f(A') = \{f(a')\}$.
Comme $a \neq a'$, $A \cap A' = \emptyset$. Donc $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A') = \emptyset$.
Ainsi $f(a) \neq f(a')$. Par conséquent des éléments distincts de E ont des images distinctes par f. $\boxed{\text{Donc } f \text{ est injective.}}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A) \cap f(A') = f(A \cap A') \Longleftrightarrow f \text{ est injective.}}$$

$(-)$ Supposons que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.
$\diamond$ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. $E = A \cup (E \setminus A)$. On a $f(A) \cup f(E \setminus A) \subset f(E)$.
Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$. Si $x \in E \setminus A$ alors $f(x) \in f(E \setminus A)$.
Donc $f(x) \in f(A) \cup f(E \setminus A)$ d'où $f(E) \subset f(A) \cup f(E \setminus A)$. Ainsi :
$f(E) = f(A) \cup f(E \setminus A) = f(A) \cup (F \setminus f(A)) = F$. $\boxed{\text{Donc } f \text{ est surjective.}}$

$\diamond$ Soit x et x' deux éléments distincts de E. Alors $x' \in E \setminus \{x\}$.
Donc $f(x') \in f(E \setminus \{x\}) = F \setminus f(\{x\})$ d'où $f(x) \neq f(x')$.
Deux éléments distincts de E ont des images distinctes donc $\boxed{f \text{ est injective.}}$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est bijective.}}$$

Réciproquement, supposons que f est bijective.
f étant surjective, $f(E) = F$. Pour toute partie A de E on a : $E = A \cup (E \setminus A)$ et $f(E) = f(A) \cup f(E \setminus A)$ d'après ce qui précède. Donc $f(A) \cup f(E \setminus A) = F$.
D'autre part $f(A) \cup (F \setminus f(A)) = F$.
f étant injective et puisque $A \cap (E \setminus A) = \emptyset$ on a $f(A) \cap f(E \setminus A) = \emptyset$ d'après un résultat précédent. Donc $\boxed{f(E \setminus A) = F \setminus f(A).}$

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A) \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}}$$

[Réponse I.8] (**Injections, bijections**)

(*Relire la question : page* 32, *le cours :* [D I.26 p.24])
$(-)$ Soit $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2,\ (x, y) \longmapsto (2x + y, 5x + 3y)$.
Montrons que f est bijective.

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrons qu'il existe un unique antécédent à (a,b).
Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. $f(x,y) = (a,b)$ équivaut à : $(S) \left\{ \begin{array}{rl} 2x+y & = a \\ 5x+3y & = b \end{array} \right.$.
Par l'opération $L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$ on obtient :
$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x & = 3a-b \\ 5x+3y & = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x & = 3a-b \\ y & = -5a+2b \end{array} \right.$.
Donc (a,b) admet $(3a-b, -5a+2b)$ (qui est bien un élément de $\mathbb{Z}^2$) pour unique antécédent. Donc f est bijective et l'on a :

$$\boxed{f^{-1} : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2,\ (a,b) \longmapsto (3a-b, -5a+2b).}$$

$(-)$ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $g(x) = g(y)$. Alors $|g(x) - g(y)| = 0$.
Or $|g(x) - g(y)| \geq |x-y| \geq 0$ donc par encadrement $|x-y| = 0$ donc $x = y$.

$$\boxed{\text{Donc } g \text{ est injective.}}$$

[Réponse I.9] (**Injections, surjections, bijections**)

(*Relire la question : page* 32, *le cours :* [D I.26 p.24])
$(-)$ Supposons que $g \circ f$ est injective. Soit $(a,b) \in E^2$.
Si $f(a) = f(b)$ alors $(g \circ f(a)) = (g \circ f)(b)$. Puisque $g \circ f$ est injective, on en déduit : $a = b$. Donc f est injective.

$$\boxed{\text{Donc } g \circ f \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ injective.}}$$

$(-)$ Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$. Alors il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$ c'est-à-dire $z = g(f(x))$. En posant $y = f(x) \in F$ on a : $\forall z \in G,\ \exists y \in F,\ z = g(y)$. Donc g est surjective.

$$\boxed{\text{Donc } g \circ f \text{ surjective} \Longrightarrow g \text{ surjective.}}$$

$(-)$ Supposons que $g \circ f$ est surjective et g est injective.
D'après le deuxième point, $g \circ f$ étant surjective, g est surjective, donc g étant aussi injective elle est bijective. On a donc $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$. Donc f est la composée de deux surjections donc f est surjective.

$$\boxed{g \circ f \text{ surjective et } g \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ surjective.}}$$

$(-)$ Supposons que $g \circ f$ est injective et f est surjective.
$g \circ f$ étant injective, f est injective d'après le premier point donc f étant aussi surjective est bijective. On a donc $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$. Donc g est la composée de deux injections donc g est injective.

$$\boxed{g \circ f \text{ injective et } f \text{ surjective} \Longrightarrow g \text{ injective.}}$$

$(-)$ Supposons que $h \circ g \circ f$ et $f \circ h \circ g$ sont injectives et que $g \circ f \circ h$ est surjective.
$h \circ (g \circ f)$ est injective donc $g \circ f$ est injective d'après le premier point.
$(g \circ f) \circ h$ est surjective donc $g \circ f$ est surjective d'après le deuxième point donc $g \circ f$ est bijective.
$h \circ (g \circ f)$ est injective et $g \circ f$ est surjective donc h est injective d'après le quatrième point.
$(g \circ f) \circ h$ est surjective et $g \circ f$ est injective donc h est surjective d'après le troisième point. Donc h est bijective.
$(f \circ h) \circ g$ est injective donc g est injective d'après le premier point.
$g \circ (f \circ h)$ est surjective donc g est surjective d'après le deuxième point .
Donc g est bijective. Donc $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ est bijective.

$$\boxed{\text{Donc } f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives.}}$$

[Réponse I.10] (**Indicatrices et opérations ensemblistes**)

(*Relire la question : page* 32, *le cours :* [D I.21 p.23])
Soit A, B deux parties d'un ensemble E.
Les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont les fonctions de E vers $\{0,1\}$ définies par : $\mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $\mathbb{1}_A : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$(-)$ Si $x \in A \cap B$, alors d'une part $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$. D'autre part $x \in A$ donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $x \in B$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$. Ainsi $\mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x) = 1$.
Si $x \notin A \cap B$, alors d'une part $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$. D'autre part $x \notin A$ donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $x \notin B$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Ainsi $\mathbb{1}_A(x).\mathbb{1}_B(x) = 0$.
Donc : $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = (\mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B)(x)$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B.}$$

Si $x \in A$, $x \notin E \setminus A$ donc $(1 - \mathbb{1}_A)(x) = 0$ et si $x \in E \setminus A$, $x \notin A$, donc $(1 - \mathbb{1}_A)(x) = 1$. Donc $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_{E\setminus A}(x) = (1 - \mathbb{1}_A)(x)$.

$$\boxed{\text{D'où } \mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A.}$$

$(-)$ $\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{E\setminus(A\cup B)} = 1 - \mathbb{1}_{(E\setminus A)\cap(E\setminus B)} = 1 - \mathbb{1}_{E\setminus A}\mathbb{1}_{E\setminus B}$.
Donc $\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}.}$$

[Réponse I.11] (**Formule de différence symétrique**)

(*Relire la question : page* 32, *le cours :* [D I.21 p.23], [P I.16 p.21])
(−) $A = B \Longrightarrow A\Delta C = B\Delta C$ est évident.
(−) Montrons la condition nécessaire. Supposons que $A\Delta C = B\Delta C$ et montrons que $A = B$.
On a : $\mathbb{1}_{A\Delta C} = \mathbb{1}_{A\cup C} - \mathbb{1}_{A\cap C} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{A\cap C}$.
Donc $\mathbb{1}_{A\Delta C} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A\cap C} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_C)^2$. On en déduit que :
$A\Delta C = B\Delta C \Longleftrightarrow (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_C)^2 = (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)^2$.

$$\boxed{A\Delta C = B\Delta C \Longleftrightarrow |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_C| = |\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C|.}$$

Si $\omega \in A$, alors $|1 - \mathbb{1}_C(\omega)| = |\mathbb{1}_B(\omega) - \mathbb{1}_C(\omega)|$. Montrons que $\omega \in B$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$.
Alors $1 - \mathbb{1}_C(\omega) = \mathbb{1}_C(\omega)$ d'où $\mathbb{1}_C(\omega) = \dfrac{1}{2}$ ce qui est exclu. Donc $\omega \in B$.

$$\boxed{\text{Donc } \omega \in A \Longrightarrow \omega \in B.}$$

Par symétrie des rôles on a aussi $\omega \in B \Longrightarrow \omega \in A$.

$$\boxed{\text{Donc } A = B.}$$

[Réponse I.12] (**Petit théorème de Fermat**)

(*Relire la question : page* 33, *le cours :* [P I.8 p.19], [D I.32 p.25]
[P I.35 p.26], [D I.38 p.27] [P I.53 p.30])
Soit p un nombre premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$.
(−) D'après la formule du capitaine [Q I.15 p. 33], $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$.
Donc p divise $k\binom{p}{k}$. Or p et k sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss, on en déduit que : $\boxed{\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ p \text{ divise } \binom{p}{k}.}$
(−) Montrons par récurrence sur a que la propriété $H(a)$: « $a^p \equiv a\ \ [p]$ » est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}$.

◇ La propriété est vraie si $a = 0$ ou si $a = 1$.

◇ Soit a en entier quelconque. On suppose que $a^p \equiv a\ \ [p]$.
Alors, d'après la formule du binome [P II.10 p.50], on a :

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} a^k = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + a^p.$$

D'après le résultat précédent, $\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \binom{p}{k} \equiv 0\ \ [p]$.

Ainsi $(a+1)^p \equiv 1 + a^p \ [p]$ donc $(a+1)^p \equiv 1 + a \ [p]$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc la propriété $H(a+1)$ est vraie.
$\diamond$ Donc $\forall a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv a \ [p]$.

Donc p divise $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. D'après le lemme de Gauss, si p ne divise pas a, alors p divise $a^{p-1} - 1$.

$$\boxed{\text{Donc } a^{p-1} \equiv 1 \ [p].}$$

[Réponse I.13] (**Formule de Vandermonde**)

(*Relire la question : page* 33, *le cours :* [P I.48 p.29], [P I.53 p.30])
Considérons deux ensembles disjoints A et B de cardinaux respectifs n et m. Déterminons alors toutes les parties de $A \cup B$ formées de p éléments.
(−) Premier décompte. Il y en a $\binom{n+m}{p}$ car $\text{card}(A \cup B) = n + m$.
(−) Deuxième décompte.
Si $k \in [\![0, p]\!]$, le nombre de parties constituées de k éléments de A et de $p-k$ éléments de B est $\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$. Il y a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$ parties à p éléments de $A \cup B$.

Conclusion : ces deux décomptes étant égaux :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.}$$

☞ Si $p \geq \min(m, n)$, la formule est bien valable et certains termes de la somme sont nuls : si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

[Réponse I.14] (**Dénombrement de parties**)

(*Relire la question : page* 33, *le cours :* [D I.52 p.30], [P I.53 p.30])
Comptons les couples (X, Y) de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$ en les regroupant suivant le cardinal de Y :

$$\left\{ X \subset Y \;\middle|\; (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \right\} = \bigcup_{p=0}^{n} \bigcup_{\substack{Y \in \mathcal{P}(E) \\ \text{card}(Y) = p}} \left\{ X \subset Y \;\middle|\; (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \right\}.$$

On a ici une union d'ensembles deux à deux disjoints.

Donc $S = \operatorname{card}\left(\left\{ X \subset Y \;\middle|\; (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \right\}\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{P}(E) \\ \operatorname{card}(Y)=p}} \operatorname{card}\left(\mathcal{P}(Y)\right)$,

d'où $S = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{P}(E) \\ \operatorname{card}(Y)=p}} 2^{\operatorname{card}(Y)} = \sum_{p=0}^{n} \sum_{\substack{Y \in \mathcal{P}(E) \\ \operatorname{card}(Y)=p}} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = (2+1)^n$

d'après la formule du binôme [P II.10 p.50].

Le nombre de couples (X,Y) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$ est 3^n

[Réponse I.15] (**Deux formules classiques**)

(*Relire la question : page* 33, *le cours :* [P I.53 p.30])

(−) Formule des représentants : considérons une population de n individus. On réalise des équipes de p personnes et dans chaque équipe k individus sont désignés comme les représentants de l'équipe. Déterminons le nombres de possibilités de deux façons différentes.

◇ On choisit d'abord les k représentants : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités. Puis on ajoute à ces k représentants $p-k$ personnes que l'on choisit parmi les $n-k$ personnes restantes de façon à obtenir une équipe : il y a $\binom{n-k}{p-k}$ possibilités. Il y a donc $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ choix.

◇ On choisit d'abord les p personnes de l'équipe : il y a $\binom{n}{p}$ possibilités. Puis parmi ces p individus on détermine les k représentants : il y a $\binom{p}{k}$ possibilités. Il y a donc $\binom{p}{k}\binom{n}{p}$ choix.

D'où $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

(−) Formule du capitaine : dans la situation précédente, prenons $k=1$ et appelons « capitaine » l'unique représentant. Alors

si $p \in \mathbb{N}^*$: $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

[Réponse I.16] (**Suites croissantes**)

(*Relire la question : page* 33, *le cours :* [D I.52 p.30], [P I.53 p.30])

(−) Il suffit de sélectionner p entiers distincts dans $[\![1, n]\!]$ puis de les ordonner.

Il y a donc $\binom{n}{p}$ suites strictement croissantes.

(−) Pour constituer une suite croissante de p entiers pris dans $[\![1, n]\!]$, il suffit de choisir p entiers. Il y a alors une seule façon de les ordonner.
On peut coder ces choix dans un tableau où l'on note en dessous de chaque entier i de $[\![1, n]\!]$ une lettre « b » chaque fois que l'on choisit i.
Par exemple pour $n = 10$ et $p = 7$, si le choix des entiers est : $2, 2, 5, 6, 10, 10, 10$, alors on aura le codage :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	bb			b	b				bbb

.

On en déduit qu'il y aura autant de suites croissantes que de codages possibles de la deuxième ligne du tableau.
Or une deuxième ligne du tableau correspond à un mot de $n - 1 + p$ lettres contenant p lettres b et $n - 1$ lettres $|$.
Dans notre exemple, le mot associé est $|bb|||b|b||||bbb$.
Pour déterminer un tel mot, il suffit de déterminer la place des p lettres b parmi les $n + p - 1$ places possibles. Il y en a donc $\binom{n+p-1}{p}$.

Il y a $\binom{n+p-1}{p}$ suites croissantes de p entiers pris dans $[\![1, n]\!]$.

Chapitre II
Compléments de calculs

II.1 - Cours

II.1.1 - Sommes et produits finis

[Définition II.1] Sommes et produits : notations
Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes.
On note $\sum_{i\in I} a_i$ et $\prod_{i\in I} a_i$ respectivement la somme et le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$. Par convention, si $I=\emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$.
Dans le cas particulier où $n\in\mathbb{N}^*$ et $I=[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1+u_2+...+u_n \text{ et } \prod_{i=1}^{n} u_i = u_1\times u_2\times ...\times u_n.$$

Plus généralement, si $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $m\leq n$ et $I=[\![m,n]\!]$:

$$\sum_{i=m}^{n} u_i = u_m+u_{m+1}+...+u_n \text{ et } \prod_{i=m}^{n} u_i = u_m\times u_{m+1}\times ...\times u_n.$$

Si $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $m>n$: $\sum_{i=m}^{n} u_i = 0$ et $\prod_{i=m}^{n} u_i = 1$.
L'indice i est « muet » c'est-à-dire qu'on peut le remplacer par n'importe quelle lettre.

[Propriété II.2] Nombre de termes ou de facteurs
Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $m\leq n$ et $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.
Dans $\sum_{k=m}^{n} u_k$ le nombre de termes est $n-m+1$ et dans $\prod_{k=m}^{n} u_k$ le nombre de facteurs est aussi $n-m+1$.
On retient qu'il y a « différence des bornes $+1$ » termes ou facteurs.

[Propriété II.3] Règles de calcul
Soit I un ensemble fini à p éléments, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes, $a \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(−) $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i\,;\,\sum_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i.$

(−) $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_ib_i)=\left(\prod_{i\in I}a_i\right)\times\left(\prod_{i\in I}b_i\right)\,;\,\prod_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda^p\prod_{i\in I}a_i.$

(−) En particulier : $\displaystyle\sum_{i\in I}a=p\times a\,;\,\prod_{i\in I}a=a^p$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}i=p!.$

(−) **Regroupement de termes** : soit m et n deux entiers naturels avec $m<n$ et $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}u_i=\sum_{i=0}^{m}u_i+\sum_{i=m+1}^{n}u_i.$

[Définition II.4] Changement d'indice
Il peut être intéressant de modifier l'indexation d'une somme ou d'un produit pour se ramener à des expressions connues.
Si i est le nouvel indice et k l'ancien, on utilise une relation affine du type $i=ak+b$ avec $b\in\mathbb{Z}$ et $a\in\{-1,1\}$ pour ne pas modifier le nombre de termes ou de facteurs.
Exemple : soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $m\leq n$ et $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Si l'on pose $i=k-m$ dans $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}u_k$, cela permet de se ramener à $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-m}u_{i+m}$ qui est une somme indexée à partir de 0.

♥ *En dehors des sommes de référence données ci-dessous, transformer une somme à calculer en somme télescopique est presque la seule méthode de calcul possible.* [Q II.1 p. 58]

[Propriété II.5] Télescopage
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. Soit $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leq n$.

(−) Somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_p.$

(−) Produit télescopique : $\displaystyle\prod_{k=p}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{n+1}}{u_p}.$

♥ *Voir les exercices :* [Q II.1 p. 58], [Q II.8 p. 59], [Q II.12 p. 60]

[Propriété II.6] Sommes de référence
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ de raison $q \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $u_k = u_0 q^k$.

Alors si $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Plus généralement

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = u_{\text{premier indice}} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Si $q = 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$ et plus généralement $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_0$.

♥ *Voir les exercices :* [Q II.1 p. 58], [Q II.6 p. 59], [Q II.9 p. 59]

[Propriété II.7] Factorisation particulière
Soit a et b deux complexes et soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

♥ *Pour $n = 2$, on retrouve l'identité : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.*
♥ *Si n est un entier naturel **impair** on a :*

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{n-1-k} b^{n-1-k}.$$

[Définition II.8] Coefficients binomiaux
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit $p \in \mathbb{N}$.

On définit le **coefficient binomial** noté $\binom{n}{p}$ qui se lit p parmi n par :

$$\binom{n}{p} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{p!}.$$