100% ENTRAÎNEMENT

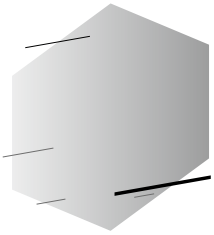
MATHS

PSI

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses



100% ENTRAÎNEMENT

Collection dirigée par Sylvain Rondy

MATHS

PSI

NOUVEAUX PROGRAMMES

Maxime Bailleul
François-Xavier Manoury
Stéphane Préteseille

ellipses

Retrouvez tous les ouvrages de la collection **100% ENTRAÎNEMENT** sur :
www.editions-ellipses.fr



Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Christophe Poulain en LaTeX.

ISBN 9782340-066618
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

La collection « 100% entraînement » est conçue pour les élèves des classes préparatoires scientifiques (préparant aux écoles d'ingénieur) et économiques (préparant aux écoles de commerce et de management). L'objectif de cette collection est de mettre l'accent sur l'acquisition d'expérience et d'autonomie, en proposant un grand nombre d'exercices de difficulté progressive, sans rappels de cours excepté dans les corrigés.

Cet ouvrage s'adresse aux élèves des classes préparatoires PSI qui souhaitent trouver un outil différent de celui proposé par les livres d'annales : en effet, chacun des 44 chapitres correspond à une partie du cours bien ciblée et tous les exercices du chapitre portent sur cette partie, ce qui procure un entraînement systématique sur chaque chapitre et permet de s'impliquer réellement dans la maîtrise des notions abordées.

Chaque chapitre est découpé en quatre parties de la façon suivante :

- **Maîtriser le cours.** Cette partie contient « Le Vrai/Faux du début » consistant en des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des exercices d'application directe du cours.
- **Maîtriser les méthodes fondamentales.** Cette partie propose des exercices un peu plus compliqués mais proches de méthodes fondamentales qu'il faut absolument connaître et maîtriser parfaitement.
- **Pour aller plus loin.** Cette partie contient des exercices plus élaborés, pour certains difficiles, nécessitant autonomie, faculté à prendre des décisions et esprit de synthèse. Elle se termine par « Le Vrai/Faux de la fin » qui oblige à une réelle réflexion et nécessite d'avoir un bon recul sur les notions abordées.
- **Solution des exercices.** Cette partie fournit les solutions des exercices, complètes et rédigées avec le plus grand soin, au sein desquelles sont disposées des bulles et des encadrés contenant des rappels de cours, des conseils de méthode, des astuces, ou encore des mises en garde contre les erreurs à éviter.

Les auteurs de cette collection ont compilé cet abondant vivier d'exercices afin que ce livre complète efficacement celui de première année.

Sylvain Rondy

Sommaire

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1. Compléments d'algèbre linéaire 1
2. Éléments propres 14
3. Polynôme caractéristique 23
4. Endomorphismes et matrices diagonalisables 31
5. Endomorphismes et matrices trigonalisables 47
6. Polynômes annulateurs et réduction 55

Espaces préhilbertiens réels

7. Produits scalaires 68
8. Orthogonalité 75
9. Projection orthogonale et distance 86
10. Matrices orthogonales 95

Endomorphismes d'un espace euclidien

11. Isométries vectorielles 101
12. Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques 113

Espaces vectoriels normés

13. Normes 124
14. Comparaison de normes 136
15. Topologie 147
16. Continuité d'une application 154

Suites et séries de fonctions

17. Compléments sur les séries numériques 164

18. Suites de fonctions : convergence simple et uniforme 177
19. Suites de fonctions : propriétés de la convergence uniforme 188
20. Séries de fonctions : modes de convergence 197
21. Séries de fonctions : propriétés de la convergence uniforme 206

Séries entières

22. Séries entières : rayon de convergence 223
23. Séries entières : propriétés de la somme 233
24. Séries entières : développement 245

Intégration sur un intervalle quelconque

25. Intégrales impropres 254
26. Intégrabilité 269
27. Intégration par parties, changement de variable 280
28. Théorème de convergence dominée 294
29. Intégration terme à terme 305
30. Intégrales à paramètres 319

Variables aléatoires discrètes

31. Dénombrabilité, familles sommables 335
32. Espaces probabilisés quelconques 342
33. Variables aléatoires réelles discrètes infinies 357
34. Lois discrètes infinies usuelles 374
35. Couples de variables aléatoires 390
36. Vecteurs aléatoires 411
37. Covariance 429
38. Inégalités probabilistes 440
39. Fonctions génératrices 454

Équations différentielles linéaires scalaires

40. Équations différentielles linéaires 470

Dérivabilité des fonctions vectorielles

41. Dérivabilité d'une fonction vectorielle 479

Fonctions de plusieurs variables

42. Dérivée suivant un vecteur, dérivée partielle..... 484
43. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$..... 490
44. Extrema..... 498

1 Compléments d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 1, 0)$, $y = (0, 1, 1)$ et $z = (1, 2, 1)$.

1. $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont en somme directe. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $\text{Vect}(x)$ et $\text{Vect}(y)$ sont supplémentaires dans E. ☐ Vrai ☐ Faux

3. $\text{Vect}(x)$,$\text{Vect}(y)$ et $\text{Vect}(z)$ sont en somme directe. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 –

Soit E un espace vectoriel de dimension 5 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ une base de E. On suppose que la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Que peut-on dire de $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$?

Exercice 4 –

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité fondamentale suivante :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

2. En déduire que deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –
Montrer que le sous-espace vectoriel des matrices symétriques $S_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 –

Soit $F = \{(x+y, y-2x, x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 –
Soit $n \geq 1$. On considère l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Que peut-on dire du noyau de la trace ?
2. Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(\text{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8 –
Soit $n \geq 3$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (X^2 + 1)P''(X)$$

1. Montrer que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la trace de φ.

Exercice 9 –
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On pose :

$$\forall k \in [\![1\,;\,3]\!],\ E_k = \text{Ker}(f - k\text{Id}_E)$$

Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Exercice 10 –
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$$

Pour aller plus loin

Exercice 11 –
Soit $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 12 –

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines est un supplémentaire du sous-espace vectoriel F de E défini par $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$.

Exercice 13 –

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F_1 = \{f \in E,\ f \text{ est constante}\}$$
$$F_2 = \{f \in E,\ \forall t \in [-1, 0],\ f(t) = 0\}$$
$$F_3 = \{f \in E,\ \forall t \in [0, 1],\ f(t) = 0\}$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 14 –

Considérons E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension alors ils ont un sous-espace supplémentaire en commun.

Exercice 15 – Le vrai/faux de la fin

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E ($p \geq 2$).

1. $\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. Si $\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) = n$ alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $\text{Vect}(x) \cap \text{Vect}(y) = \{(0, 0, 0)\}$. ☒ Vrai ☐ Faux

2. $\dim(\text{Vect}(x)) + \dim(\text{Vect}(y)) = 2 < \dim(E)$. ☐ Vrai ☒ Faux

3. $z = x + y$. ☐ Vrai ☒ Faux

Cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- On définit la *somme* de ces sous-espaces par :

$$\sum_{k=1}^{p} E_k = \left\{ \sum_{k=1}^{p} x_k,\ (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \right\}$$

  La somme de ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} E_k$ est *directe* si :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p,\ \sum_{k=1}^{p} x_k = 0_E \Longrightarrow \forall k \in \{1, \dots p\},\ x_k = 0_E$$

  Dans ce cas, la somme se note $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

- La somme $\sum_{k=1}^{p} E_k$ est directe si et seulement si tout élément x de $\sum_{k=1}^{p} E_k$ se décompose de manière *unique* sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

  où pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $x_k \in E_k$.

Exercice 2 –

Un calcul de déterminant par blocs montre que :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

donc $\det(A) = 1 \times 3 = 3$.

Cours

Soit A une matrice carrée de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où B et D sont des matrices carrées. Alors :

$$\det(A) = \det(B)\det(D)$$

Exercice 3 –

On remarque que M est une matrice triangulaire par blocs. Il est clair que :

$$\forall i \in [\![1\,;\,3]\!],\ u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$$

On en déduit que F est un sous-espace vectoriel stable par u.

Exercice 4 –

Cours

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. La matrice AB est carrée d'ordre n. On a :

Il est important de savoir déterminer l'expression d'un coefficient d'une matrice produit

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{k,i}b_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^{p} (BA)_{i,i} \\ &= \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = PAP^{-1}$. On a (en utilisant la question précédente avec les deux matrices PA et P^{-1}) :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}((PA)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n A) = \mathrm{Tr}(A)$$

À retenir

Ces deux points de cours sont très importants. Il faut savoir les redémontrer. Le deuxième permet de définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n : c'est la trace commune de toute matrice représentant cet endomorphisme dans une base de E.

Exercice 5 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (S, A) appartenant à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$. Par linéarité de la transposition, on a alors :

$$M^T = S^T + A^T = S - A$$

Ainsi :

$$M + M^T = 2S \ \text{ et } \ M - M^T = 2A$$

donc :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^T}{2}$$

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^T}{2}$$

Il est évident que $M = S + A$. On a :

Linéarité de la transposition

$$S^T = \frac{M^T + (M^T)^T}{2} = \frac{M^T + M}{2} = S$$

Ainsi, S est symétrique. De même, A est antisymétrique. Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et l'autre inclusion est vérifiée car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après l'analyse, toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique donc la somme est directe. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Méthode

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E par analyse-synthèse se fait en suivant la démarche suivante :

- Dans l'analyse, on suppose que tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x_F + x_G$ où x_F appartient à F et x_G appartient à G. En utilisant l'appartenance de ces deux vecteurs aux sous-espaces F et G, on obtient l'expression de x_F (ou de x_G) en fonction de x uniquement. L'égalité $x = x_F + x_G$ permet d'obtenir l'autre vecteur en fonction de x. Cette phase d'analyse montre l'*unicité* de la décomposition d'un vecteur de E comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G si *existence*.
- Dans la synthèse, on prouve effectivement l'existence d'une telle décomposition. On fixe x un vecteur de E et on définit x_F et x_G comme obtenus dans l'analyse. On montre alors que x_F appartient à F, x_G appartient à G et que $x_F + x_G = x$.

Exercice 6 –

G est un sous-espace vectoriel de dimension 1 car $(1, 1, 1)$ est non nul. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x + y, y - 2x, x),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, -2, 1) + y(1, 1, 0),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, -2, 1), (1, 1, 0)) \end{aligned}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 car $(1, -2, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre.

On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Montrons que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. L'inclusion $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$ est claire car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soit $X \in F \cap G$. Le vecteur X appartient à G donc il existe un réel a tel

que :

$$X = a(1, 1, 1)$$

Le vecteur X appartient à F donc il existe deux réels x et y tels que :

$$X = (x + y, y - 2x, x)$$

Ainsi, $x + y = a$, $y - 2x = a$ et $x = a$.

En utilisant que $x = a$, on obtient avec les deux premières égalités $y = 0$ et $y = 2x + a = 3a$. Alors $3a = 0$ donc $a = 0$ et finalement $X = (0, 0, 0)$. On en déduit $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$ et ainsi l'égalité. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \text{ et } F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

À retenir

Pas besoin d'analyse-synthèse si l'on souhaite juste prouver que deux sous-espaces vectoriels, d'un espace de dimension finie, sont supplémentaires.

Exercice 7 –

1. La trace est une forme linéaire non nulle (l'image de I_n par l'application trace vaut n qui est différent de 0) donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.

   Cours

   Le noyau d'une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension n est un hyperplan de celui-ci : c'est-à-dire, un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

2. On sait que I_n n'appartient pas au noyau de la trace donc par propriété d'un hyperplan, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Cours

   Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie et a un vecteur de E n'appartenant pas à H. Alors H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 8 –

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il est évident que $\varphi(P)$ est un polynôme à coefficients réels.

   Le degré P'' est inférieur ou égal à $n - 2$ donc par produit, on a :

   Le degré d'un produit de polynômes est égal à la somme des degrés de ces deux polynômes

   $$\deg(\varphi(P)) = \deg(X^2 + 1) + \deg(P''(X)) \leq 2 + n - 2 = n$$

   Ainsi, $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ donc φ est bien définie.

   Montrons que φ est linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par linéarité de la dérivation,

on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q) &= (X^2+1)(\lambda P+Q)'' \\ &= (X^2+1)(\lambda P''+Q'') \\ &= \lambda(X^2+1)P''+(X^2+1)Q'' \\ &= \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité. On en déduit que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il suffit de déterminer la trace d'une matrice de φ dans une base fixée de $\mathbb{R}_n[X]$. Utilisons la base canonique. On a $\varphi(1)=\varphi(X)=0$. Pour tout $k\in[\![2\,;\,n]\!]$, on a :

$$\varphi(X^k)=(X^2+1)(k(k-1)X^{k-2})=k(k-1)X^k+k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit alors que :

$$\mathrm{Tr}(\varphi)=0+0+\sum_{k=2}^{n}k(k-1)$$

Déterminons la valeur de cette somme par changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{2n-1}{3}+1\right) \\ &= \frac{(n-1)(n-1)}{2}\times\frac{2n+2}{3} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de la trace de φ.

Méthode

La trace d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie E est par définition, la trace de n'importe quelle matrice de f dans une base de E. Si aucune base n'est suggérée dans l'énoncé d'un exercice, il suffit bien souvent d'utiliser la base canonique de l'espace considéré.

Exercice 9 –

Soit $(x_1,x_2,x_3)\in E_1\times E_2\times E_3$ tel que :

$$x_1+x_2+x_3=0_E$$

On a alors :

$$f(x_1+x_2+x_3)=f(0_E)$$

On obtient :

f est une application linéaire

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 0_E$$

Or, pour $k \in [\![1\,;\,3]\!]$, x_k appartient à $\mathrm{Ker}(f - k\mathrm{Id}_E)$ donc $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = 2x_2$ et $f(x_3) = 3x_3$. On en déduit que :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0_E$$

On réitère le procédé précédent :

$$f(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = f(0_E)$$

puis par linéarité de f :

$$f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) = 0_E$$

et finalement :

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0_E$$

On souhaite alors résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0_E \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0_E \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 & = & 0_E \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ permettent d'obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0_E \\ x_2 + 2x_3 & = & 0_E \\ 3x_2 + 8x_3 & = & 0_E \end{array}\right.$$

On utilise maintenant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0_E \\ x_2 + 2x_3 & = & 0_E \\ 2x_3 & = & 0_E \end{array}\right.$$

En remontant les calculs, on obtient alors $x_3 = 0_E$ puis $x_2 = 0_E$ et finalement $x_1 = 0_E$. On en déduit que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Méthode

Pour résoudre un système linéaire, l'algorithme du pivot de Gauss doit être privilégié pour gagner en efficacité sauf si il y a des équations incomplètes permettant des substitutions efficaces.

Exercice 10 –

Par opération sur les colonnes $C_i \leftarrow C_i + C_{n+i}$ pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix}$$

puis par opérations sur les lignes $L_{i+n} \leftarrow L_{i+n} - L_i$ pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

par calcul du déterminant par blocs.

Exercice 11 –

Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

Utilisons les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(p,r) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Par hypothèse,

$$\mathrm{Tr}(AE_{p,r}) = \mathrm{Tr}(BE_{p,r})$$

Or, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$(AE_{p,r})_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(E_{p,r})_{k,i}$$

et $(E_{p,r})_{k,i}$ vaut 1 si et seulement si $(p,r) = (k,i)$ et vaut 0 sinon. Ainsi,

$$(AE_{p,r})_{i,i} = A_{i,p}\delta_{i,r}$$

où $\delta_{i,r}$ est le symbole de Kronecker. Ainsi,

$\delta_{i,r}$ = 1 si $i = r$ et 0 sinon

$$\mathrm{Tr}(AE_{p,r}) = \sum_{i=1}^{n}(AE_{p,r})_{i,i} = A_{r,p}$$

Le raisonnement est analogue pour $BE_{p,r}$ donc on en déduit que :

$$A_{r,p} = B_{r,p}$$

Ceci étant vrai pour tout $(p,r) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, on en déduit que $A = B$.

À retenir

Si on dispose d'une propriété vérifiée par toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tester celle-ci sur les matrices de la base canonique permet souvent d'obtenir des résultats plus simples.

Exercice 12 –

À retenir

On montre facilement que l'ensemble des fonctions affines est un sous-espace vectoriel de E à l'aide de la méthode des trois points ou en l'identifiant à $\mathbb{R}_1[X]$.

Notons A le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines et θ l'application nulle de E. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $E = A \oplus F$. Soit $f \in E$. Il existe alors $(g, h) \in A \times F$ tel que $f = g + h$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

La fonction g est affine donc il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x,

$$g(x) = ax + b$$

donc :

$$f(x) = ax + b + h(x)$$

La fonction h appartient à F donc $h(0) = h(1) = 0$ ce qui implique que :

$$f(0) = b$$

et

$$f(1) = a + b$$

Ainsi, $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$$

et $h = f - g$.

Synthèse. Soit $f \in E$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) \text{ et } h(x) = f(x) - g(x)$$

On a $f = g + h$. La fonction g appartient à A. On a : *g est clairement affine*

$$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - f(0) = 0$$

et

$$h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - (f(1) - f(0) + f(0)) = 0$$

Ainsi, h appartient à F.

Toute fonction de E s'écrit donc comme la somme d'une fonction de A et d'une fonction de F. L'analyse prouve que cette décomposition est unique. Ainsi, A et F sont supplémentaires dans E.

Exercice 13 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. Soit $f \in E$. Il existe donc $(f_1, f_2, f_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3$ tel que :

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

La fonction f_1 est constante donc il existe un réel c tel que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f_1(t) = c$. On a donc pour $t \in [-1, 1]$,

$$f(t) = c + f_2(t) + f_3(t)$$

Les fonctions f_2 et f_3 appartiennent à F_2 et F_3 donc :

$$f(0) = c + f_2(0) + f_3(0) = c$$

Sachant que f_2 appartient à F_2, on a pour tout $t \in [-1, 0[$:

$$f(t) = c + 0 + f_3(t) = f(0) + f_3(t)$$

donc

$$f_3(t) = f(t) - f(0)$$

De même, on obtient que pour tout $t \in]0, 1]$,

$$f_2(t) = f(t) - f(0)$$

Synthèse. Soit $f \in E$. Posons pour tout $t \in [-1, 1]$, $f_1(t) = f(0)$,

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ f(t) - f(0) & \text{si } t \in]0, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad f_3(t) = \begin{cases} f(t) - f(0) & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 0 & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

La fonction f_1 est constante sur $[-1, 1]$ donc appartient à F_1.

La fonction f_2 appartient bien à E car est continue sur $[-1, 0[$, sur $]0, 1]$ et sachant que f est continue en 0 :

Ne pas oublier de vérifier la continuité !

$$\lim_{t \to 0^-} f_2(t) = \lim_{t \to 0^+} f_2(t) = f_2(0) = 0$$

De plus pour tout $t \in [-1, 0]$, $f_2(t) = 0$. Ainsi, f_2 appartient à F_2. On prouve de même que f_3 appartient à F_3.

Pour tout $t \in [-1, 0[$,

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = f(0) + 0 + f(t) - f(0) = f(t)$$

On obtient le même résultat si $t \in]0, 1]$. Pour finir,

$$f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) = f(0) + 0 + 0 = f(0)$$

Ainsi, $f = f_1 + f_2 + f_3$.

Finalement, tout fonction de E s'écrit comme la somme de trois fonctions de F_1, F_2 et F_3. Cette décomposition est unique d'après l'analyse. Ainsi, $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Exercice 14 –

Notons n la dimension de E et r la dimension commune de F et G. Nous raisonnons par récurrence descendante.

- Si $r = n$, le résultat est évident : on peut choisir comme supplémentaire commun $H = \{0_E\}$.
- Soit r strictement plus petit que n et supposons la propriété vérifiée pour tous les couples de sous-espaces de dimension $r + 1$. Une propriété classique énonce que la réunion de deux sous-espaces vectoriels A et B de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$. Dans notre cas, la réunion de F et G ne peut donc être égale à E que si $F = G = E$ ce qui n'est pas le cas vu l'hypothèse sur les dimensions. Ainsi, il existe un vecteur non nul x de E tel que $x \notin F \cup G$. Comme x n'appartient, ni à F, ni à G, les sous-espaces $\tilde{F} = F \oplus \text{Vect}(x)$

et $\tilde{G} = G \oplus \text{Vect}(x)$ sont de dimensions $r+1$ et ont donc par hypothèse de récurrence un supplémentaire en commun que l'on note $\tilde{H}$. Ainsi :

$$F \oplus \text{Vect}(x) \oplus \tilde{H} = G \oplus \text{Vect}(x) \oplus \tilde{H} = E$$

Le sous-espace $H = \text{Vect}(x) \oplus \tilde{H}$ est alors un supplémentaire commun à F et G.

On a donc bien démontré le résultat par récurrence descendante sur r.

À retenir

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 15 –

1. Vrai. C'est une propriété de cours.
2. Faux. Il suffit de penser à un contre-exemple où $F_1 = \cdots = F_p$ avec $p = n$.

2 Éléments propres

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E, $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Si $u(x) = \lambda x$ alors x est un vecteur propre de u. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si $u(x) = \lambda x$ et $\lambda \neq 0$ alors x est un vecteur propre de u. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si x est non nul et appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ alors x est un vecteur propre de u. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ D(f) = f'$$

Justifier que tout réel λ est valeur propre pour D et donner un vecteur propre associé.

Exercice 3 –

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent.

1. Montrer que l'image de u est stable par v.
2. Montrer que le noyau de u est stable par v.
3. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 4 –

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à une constante $c \in \mathbb{R}$. Montrer que c est valeur propre de A et déterminer un vecteur propre associé.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 5 –

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par $u(P(X)) = XP(X)$ pour $P \in E$. Déterminer les (éventuelles) valeurs propres de u en raisonnant par analyse-synthèse.

Exercice 6 –
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que 0 est dans le spectre de f^n. Montrer que 0 est aussi dans le spectre de f.

Exercice 7 –
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel a, on considère l'application $f_a : x \mapsto \cos(ax)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une famille libre de E.

Pour aller plus loin

Exercice 8 –
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = XP'$$

Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 9 –
Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On définit T qui à $f \in E$, associe $T(f) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0,\ T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de T.
3. T est-il injectif?
4. T est-il surjectif?

Exercice 10 – Le vrai/faux de la fin
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. 2 est valeur propre de A. ☐ Vrai ☐ Faux
2. 0 est valeur propre de A. ☐ Vrai ☐ Faux
3. 1, 2, 3 et 4 sont valeurs propres de A. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. Si $u(x) = \lambda x$ alors x est un vecteur propre de u.	☐ Vrai	☒ Faux
2. Si $u(x) = \lambda x$ et $\lambda \neq 0$ alors x est un vecteur propre de u.	☐ Vrai	☒ Faux
3. Si x est non nul et appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ alors x est un vecteur propre de u.	☒ Vrai	☐ Faux

🎓 Cours

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé *valeur propre* de u s'il existe un vecteur x de E, *non nul*, tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un vecteur x de E est appelé *vecteur propre* de u s'il est *non nul* et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Soit λ une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ, le sous-espace vectoriel noté $E_\lambda(u)$ défini par $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Les vecteurs *non nuls* de $E_\lambda(u)$ sont les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ.

Exercice 2 –

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons f l'élément de E défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Alors f est une fonction non nulle et il est clair que $D(f) = \lambda f$ donc f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ.

Exercice 3 –

1. Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v, c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathrm{Im}(u),\ v(y) \in \mathrm{Im}(u)$$

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} v(y) &= v(u(x)) \\ &= v \circ u(x) \\ &= u \circ v(x) \ \text{ car } u \circ v = v \circ u \\ &= u(v(x)) \end{aligned}$$

avec $v(x) \in E$. Ainsi, $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$. On a donc montré le résultat souhaité.

Cours

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est *stable* par u si $u(F) \subset F$ ou autrement dit si :

$$\forall x \in F,\ u(x) \in F$$

2. Montrons que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(u),\ v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors :

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= u \circ v(x) \\ &= v \circ u(x) \quad \text{car } u \circ v = v \circ u \\ &= v(u(x)) \\ &= v(0_E) \qquad \text{car } x \in \mathrm{Ker}(u) \\ &= 0_E \qquad\quad \text{car } v \in \mathscr{L}(E) \end{aligned}$$

Ainsi, $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. On a bien montré le résultat souhaité.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $E_\lambda(u)$ est stable par v. Par hypothèse, u commute avec v. De plus, Id_E commute aussi avec v donc $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec v. D'après la question précédente, on en déduit que $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v.

À retenir

Les trois propriétés précédentes sont importantes, il est important de savoir les citer et les prouver.

Exercice 4 –

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors X est un vecteur non nul et par hypothèse, on a :

Ne pas oublier de dire que X est non nul

$$AX = \begin{pmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix} = cX$$

Ainsi, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre c.

Cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *non nul* tel que $AX = \lambda X$.
- Un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre* de A s'il est *non nul* et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.
- Le *spectre* de A est l'ensemble de ses valeurs propres.
- Le *sous-espace propre* associé à la valeur propre de A, que l'on notera $E_\lambda(A)$, est défini par :

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda \text{I}_n)$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les éléments non nuls sont les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.

Exercice 5 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons l'existence d'un scalaire λ, valeur propre de u. Par définition, il existe un vecteur P non nul tel que $u(P(X)) = \lambda P(X)$ et donc par définition de u, $XP(X) = \lambda P(X)$ ou encore :

$$(X - \lambda)P(X) = 0$$

Or $(X - \lambda)$ est un polynôme non nul donc $P(X) = 0$ ce qui est absurde. $\mathbb{K}[X]$ est intègre

Synthèse. Le raisonnement précédent montre que l'endomorphisme u n'admet pas de valeur propre.

Méthode

Dans le cas où l'on étudie un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie, il est fréquent d'utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.

Exercice 6 –

Supposons que 0 est dans le spectre de f^n. Alors le noyau de f^n n'est pas réduit au vecteur nul donc f^n n'est pas injective donc n'est pas bijective donc son déterminant est nul. Or :

$$\det(f^n) = \det(f)^n$$

On en déduit que $\det(f)$ est nul donc f n'est pas bijective et ainsi f n'est pas injective (l'espace vectoriel est de dimension finie) et 0 est valeur propre de f.

À retenir

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Le scalaire 0 est valeur propre de u.
- $\text{Ker}(u) \neq \{0_E\}$.
- L'application u n'est pas injective.

Exercice 7 –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrons que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une famille libre de E. Posons $\mathscr{D}$ l'endomorphisme de E défini par $\mathscr{D}(f) = f''$. On a pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathscr{D}(f_{a_i}) = -a_i^2 f_{a_i}$ et ainsi f_{a_i} (qui n'est pas la fonction nulle) est un vecteur propre de $\mathscr{D}$ associée à la valeur propre $-a_i^2$. Les réels positifs $a_1, \dots, a_n$ étant distincts, et la fonction $x \mapsto -x^2$ étant injective sur $\mathbb{R}_+$, les réels $-a_1^2, \dots, -a_n^2$ sont aussi distincts donc la famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme u de E et est donc une famille libre de E.

Cours

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme u de E est une famille libre de E.

Exercice 8 –

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de φ. Il existe donc un polynôme non nul de E tel que $\varphi(P) = \lambda P$ ou encore $XP' = \lambda P$. On a donc pour tout réel x :

$$xP'(x) = \lambda P(x)$$

En particulier, P est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre suivante :

$$y' - \frac{\lambda}{x} y = 0$$

dont les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto K\mathrm{e}^{\lambda \ln(x)} = Kx^\lambda$$

où $K \in \mathbb{R}$. Si λ n'est pas un entier naturel, toutes les dérivées successives de $x \mapsto x^\lambda$ sont non nulles car pour tout entier $n \geq 0$, la dérivée n-ième de $x \mapsto x^\lambda$ a pour expression :

$$\lambda(\lambda - 1) \times \cdots (\lambda - n + 1) x^{\lambda - n}$$

ce qui est impossible car P est un polynôme donc à partir d'un certain rang, toutes ses dérivées sont nulles. Si λ est un entier naturel que l'on renomme n, on en déduit que :

$$\forall x > 0,\ P(x) = Kx^n$$

où $K \in \mathbb{R}$ donc $P = KX^n$.

Deux polynômes coïncidant en une infinité de valeurs sont égaux

Synthèse. On a $\varphi(1) = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\varphi(X^n) = X(X^n)' = X(nX^{n-1}) = nX^n$$

Pour tout entier $n \geq 0$, X^n est non nul et on en déduit que c'est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre n.

D'après l'analyse-synthèse, on sait que le spectre de φ est $\mathbb{N}$ et que pour tout entier $n \geq 0$,

$$E_n(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^n)$$

Exercice 9 –

1. Soit $f \in E$. Montrons que $T(f)$ appartient à E. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ (qui existe car f est continue sur cet intervalle). Pour tout $x > 0$, on a :

$$T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

On en déduit que $T(f)$ est $\mathscr{C}^1$ (donc en particulier continue) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$ donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(0)$$

et ainsi :

$$\lim_{x \to 0} T(f)(x) = T(f)(0)$$

On en déduit que $T(f)$ est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\forall f \in E,\ T(f) \in E$$

À retenir

Toute fonction continue sur un intervalle, et à valeurs réelles, admet une primitive sur celui-ci.

Montrons la linéarité de T. Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x > 0$, on a par linéarité de l'intégrale :

$$T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

On a de plus :

Ne pas oublier de vérifier l'égalité en 0

$$T(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0)$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

donc :

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$$

T est donc un endomorphisme de E.

2. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T et f un vecteur propre associé. Pour tout réel $x > 0$, on a $T(f)(x) = \lambda f(x)$ donc en notant F l'unique primitive de f s'annulant en 0 :

$$\frac{F(x)}{x} = \lambda f(x)$$

Si $\lambda = 0$, on en déduit que F est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $F' = f$ aussi. Par continuité en 0 on en déduit que f est la fonction nulle ce qui est impossible car f est un vecteur propre. Ainsi, $\lambda \neq 0$ et on a pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lambda x f(x) = \lambda x F'(x)$$

donc :

$$F'(x) = \frac{1}{\lambda x} F(x)$$

On reconnait alors une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène dont le coefficient est une fonction continue. Il existe alors un réel C tel que :

$$\forall x > 0,\ F(x) = C\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{\lambda}} = Cx^{\frac{1}{\lambda}}$$

Or $F' = f$ donc pour tout $x > 0$:

$$f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ alors f admet une limite infinie (C est non nul car f est un vecteur propre) en 0 ce qui est impossible car f appartient à E. Ainsi,

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$$

ce qui implique que $\lambda \in]0, 1]$. Remarquons que $T(f)(0) = \lambda f(0)$ donc $f(0) = \lambda f(0)$. Si $\lambda = 1$, alors f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f est constante sur $\mathbb{R}_+$. Si λ est différent de 1 alors $f(0) = 0$ et on a bien :

$$\lim_{x \to 0} Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = 0 = f(0)$$

car $\lambda \in]0, 1[$.

Synthèse. On vérifie facilement que tout réel $\lambda \in]0, 1]$ est valeur propre de T car :

$$f_\lambda : x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

est une fonction non nulle de E et vérifiant $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$. D'après l'analyse, on a de plus :

$$E_\lambda(T) \subset \mathrm{Vect}(f_\lambda)$$

ce qui nous donne finalement l'égalité :

$$E_\lambda(T) = \mathrm{Vect}(f_\lambda)$$

Tout autre réel n'est pas valeur propre de T d'après l'analyse.

3. 0 n'est pas valeur propre de T donc T est injective.

4. T n'est pas surjective car pour tout $f \in E$, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe des fonctions de E non dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ ($x \mapsto |x - 1|$ par exemple).

Exercice 10 –

1. Vrai. On a :

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible car sa première colonne est l'opposée de la deuxième. On en déduit que 2 est valeur propre de A.

2. Faux. Le déterminant de A vaut 4 (qui est différent de 0) donc A est inversible et 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Faux. La matrice A appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc admet au maximum 3 valeurs propres réelles.

À retenir

- Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres.

3 Polynôme caractéristique

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et χ_A son polynôme caractéristique.

1. χ_A est un polynôme unitaire de degré n. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le coefficient de χ_A associé au monôme X^{n-1} est $\mathrm{Tr}(A)$. ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\chi_A(0) = \det(A)$. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Montrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique. Que dire de la réciproque ?

Exercice 3 –

Soit $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = XP'(X) - P''(X)$$

Déterminer le polynôme caractéristique de φ.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 4 –

Déterminer les polynômes caractéristiques des matrices suivantes et en déduire leur spectre.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Déterminer χ_A.

Exercice 6 –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Étudier la parité de χ_A.

Pour aller plus loin

Exercice 7 –

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

et note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Montrer que pour $n > 2$, $P_n(X) = XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$.
3. En déduire que pour tout entier naturel non nul n,

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Exercice 8 –

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le but de l'exercice est de montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat quand A est inversible.
2. En déduire le résultat dans le cas général.
   On pourra utiliser, pour $x \in \mathbb{K}$ fixé, les applications $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ et $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définies par :

$$f(t) = \det((A - t\mathrm{I}_n)B - x\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad g(t) = \det(B(A - t\mathrm{I}_n) - x\mathrm{I}_n)$$

Exercice 9 – Le vrai/faux de la fin

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A admet au moins une valeur propre réelle si n est pair. ☐ Vrai ☐ Faux
2. A admet au moins une valeur propre réelle si n est impair. ☐ Vrai ☐ Faux
3. A peut admettre une unique valeur propre complexe non réelle. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. χ_A est un polynôme unitaire de degré n.	☒ Vrai	☐ Faux
2. Le coefficient de χ_A associé au monôme X^{n-1} est $\mathrm{Tr}(A)$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. $\chi_A(0) = \det(A)$.	☐ Vrai	☒ Faux

Cours

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\chi_A(X) = \det(X\mathrm{I}_n - A)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire, de degré n et son expression est de la forme :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Exercice 2 –

Soit A, B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On a pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det(x\mathrm{I}_n - A)\\ &= \det(xPP^{-1} - PBP^{-1})\\ &= \det(P(x\mathrm{I}_n - B)P^{-1})\\ &= \det(P)\det(x\mathrm{I}_n - B)\det(P^{-1})\\ &= \det(x\mathrm{I}_n - B)\end{aligned}$$

car $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$. Ainsi $\chi_A = \chi_B$.

La réciproque est fausse. Considérons :

$$A = \mathrm{I}_2 \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B étant triangulaires, et ayant pour coefficients diagonaux uniquement le scalaire 1, on a clairement :

$$\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X-1)^2$$

Or la seule matrice semblable à I_2 est I_2 car :

$$\forall P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}),\ P\mathrm{I}_2P^{-1} = \mathrm{I}_2$$

Ainsi, A et B ne sont pas semblables.

À retenir

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ le polynôme caractéristique commun à toute matrice représentant u dans une base de E. On le note χ_u. Cette définition a un sens d'après le résultat qui vient d'être prouvé.

Exercice 3 –

Soit $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X$ et :

$$\forall k \in [\![2\,;\, n]\!],\ \varphi(X^k) = X(kX^{k-1}) - k(k-1)X^{k-2} = kX^k - k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & n-2 & 0 & -n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Notons M cette matrice. Cette matrice étant triangulaire, on en déduit que :

$$\chi_M(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - k)$$

Or M est la matrice de φ dans une base de E donc :

$$\chi_\varphi(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - k)$$

Méthode

On peut choisir n'importe quelle base dans le raisonnement précédent. Sans indication donnée dans l'énoncé, la base canonique semble être un choix judicieux.

Exercice 4 –

- Pour tout réel x :

$$\chi_A(x) = \det(x\mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1 = (x-3)(x-1)$$

  Ainsi, $\chi_A(X) = (X-3)(X-1)$ et le spectre de A est $\{1, 3\}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ -1 & x+2 & -1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

On utilise l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$:

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ x+1 & x+2 & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

puis l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x+3 & -2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

On développe alors suivant la première colonne :

$$\chi_B(x) = (x+1)[(x+3)x+2] = (x+1)(x^2+3x+2) = (x+1)^2(x+2)$$

Ainsi, $\chi_B(X) = (X+1)^2(X+2)$ et le spectre de B est $\{-2,-1\}$.

Méthode

Il est important d'utiliser les opérations élémentaires licites sur les lignes et colonnes pour faire « apparaitre » des 0 et réussir à factoriser le polynôme.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -5 & 5 \\ 5 & x+7 & -5 \\ 5 & 5 & x-3 \end{vmatrix}$$

On utilise l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & 0 \\ 5 & x+7 & -5 \\ 5 & 5 & x-3 \end{vmatrix}$$

puis l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$:

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 5 & x+2 & -5 \\ 5 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

On développe ensuite suivant la première ligne :

$$\chi_C(x) = (x+2)[(x+2)(x-3)+0\times 5] = (x+2)^2(x-3)$$

Ainsi, $\chi_C(X) = (X+2)^2(X-3)$ et le spectre de C est $\{-2,3\}$.

À retenir

S'il semble difficile d'utiliser les opérations élémentaires pour factoriser le polynôme, il ne faut pas hésiter à développer suivant n'importe quelle ligne ou colonne. Il suffit ensuite de déterminer une racine évidente α puis d'éffectuer une division euclidienne du polynôme caractéristique par $X-\alpha$.

Exercice 5 –

La matrice A est de rang 1 donc son noyau est de dimension $n-1$. Ainsi, 0 est valeur propre de A avec une multiplicité (en tant que racine de χ_A) supérieure ou égale à $n-1$. Or, χ_A est unitaire et de degré n donc il existe un scalaire λ tel que :

$$\chi_A(X) = X^{n-1}(X-\lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$$

On sait que le coefficient de χ_A associé au monôme X^{n-1} est $-\mathrm{Tr}(A)$ donc $\lambda = \mathrm{Tr}(A)$. Finalement,

$$\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$$

À retenir

Ce raisonnement est très classique !

Exercice 6 –

Soit $x \in \mathbb{R}$. Sachant que le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa tranposée, on a :

$$\chi_A(-x) = \det(-x\mathrm{I}_n - A) = \det((-x\mathrm{I}_n - A)^T)$$

Par linéarité de la tranposée, et sachant que A est antisymétrique, on en déduit que :

$$\chi_A(-x) = \det(-x\mathrm{I}_n^T - A^T) = \det(-x\mathrm{I}_n + A)$$

donc :

Multilinéarité du déterminant

$$\chi_A(-x) = \det((-1)(x\mathrm{I}_n - A) = (-1)^n \det(x\mathrm{I}_n - A) = (-1)^n \chi_A(x)$$

Ainsi, si n est pair, χ_A est une fonction polynomiale paire et si n est impair, χ_A est impaire.

Exercice 7 –

1. Par simple calcul, on obtient, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2 - 1$ et $P_3(X) = X^3 - 2X$.
2. On a :

$$P_n(X) = \det(X\mathrm{I}_n - A_n) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant selon la première colonne et on obtient :

$$P_n(X) = XP_{n-1}(X) - (-1)\Delta_2$$

où :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne, il apparait que $\Delta_2 = -P_{n-2}(X)$. Finalement,

$$P_n(X) = XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$$

3. On sait que $P_1(0) = 0$, $P_2(0) = -1$ et pour tout entier $n \geq 3$, $P_n(0) = -P_{n-2}(0)$.
On en déduit par une récurrence immédiate que si n est impair, $P_n(0) = 0$ et que si n est pair,

$$P_n(0) = (-1)^{n/2}$$

Or pour $n \geq 1$:

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$

$$P_n(0) = \chi_{A_n}(0) = (-1)^n \det(A_n)$$

En utilisant cela, on en déduit que :

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Méthode

On peut aussi remarquer que $(P_{2n}(0))_{n\geq 1}$ et $(P_{2n+1}(0))_{n\geq 0}$ sont géométriques de raison -1.

Exercice 8 –

1. Pour tout scalaire x,

$$\begin{aligned}
\chi_{AB}(x) &= \det(AB - x\mathrm{I}_n) \\
&= \det(ABAA^{-1} - xAA^{-1}) \\
&= \det(A(BA - x\mathrm{I}_n)A^{-1}) \\
&= \det(A)\det(BA - x\mathrm{I}_n)\det(A^{-1}) \\
&= \det(A)\det(BA - x\mathrm{I}_n)\frac{1}{\det(A)} \\
&= \det(BA - x\mathrm{I}_n) \\
&= \chi_{BA}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Méthode

On peut aussi remarquer que :

$$AB = A(BA)A^{-1}$$

Ainsi, AB et BA sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique.

2. Soit $x \in \mathbb{K}$ fixé. La matrice A a un nombre fini de valeurs propres donc pour une infinité de scalaire t, $A - t\mathrm{I}_n$ est inversible et donc d'après la question précédente :

$$f(t) = g(t)$$

Or, les applications f et g sont polynomiales par multilinéarité du déterminant. Elles coïncident en une infinité de scalaires donc sont égales.

En particulier, $f(0) = g(0)$ donc :

$$\det(AB - x\mathrm{I}_n) = \det(BA - x\mathrm{I}_n)$$

Ceci est vrai pour tout scalaire x. On en déduit que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 9 –

1. Faux. Le polynôme caractéristique peut ne pas avoir de racines réelles. Par exemple, si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\chi_A(X) = X^2 + 1$ et ce polynôme n'admet pas de racines réelles.

2. Vrai. Dans ce cas, χ_A est une fonction polynomiale (donc continue) à coefficients réels de degré impair donc admet une racine réelle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

3. Faux. La matrice A est à coefficients réels donc χ_A appartient à $\mathbb{R}[X]$. Dans ce cas, si z est une racine complexe de χ_A alors $\overline{z}$ aussi.

À retenir

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\overline{\lambda}$ aussi.

4 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul. Pour un scalaire λ, $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Maîtriser le cours

Exercice 1 – Le vrai/faux du début

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. $E_1(p) = F$. ☐ Vrai ☐ Faux

2. $E_1(s) = G$. ☐ Vrai ☐ Faux

3. p est diagonalisable. ☐ Vrai ☐ Faux

4. s est diagonalisable. ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 2 –

Sans aucun calcul, justifier que la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Maîtriser les méthodes fondamentales

Exercice 3 –

Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 –

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 5 –

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 6 –

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A en fonction de a.

Exercice 7 –

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\Phi \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall P \in E,\ \Phi(P) = P - (X+1)P'$$

Justifier que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres et sous-espaces propres.

Exercice 8 –

On pose pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$:

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante sur $]-1, 1[$:

$$y' = \left(\frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)}\right) y$$

3. En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de φ.

Exercice 9 –

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A.
2. Déterminer alors le commutant de A, noté $\mathscr{C}(A)$, et défini par :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

Exercice 10 –
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Soit R une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si une matrice S de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est telle que $S^2 = R$ alors elle commute avec R.
2. Diagonaliser A.
3. Déterminer $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ B^2 = A\}$.

Pour aller plus loin

Exercice 11 –
Soit A et B deux matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B sont semblables

Exercice 12 –
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? A est-elle inversible ? Donner les éléments propres de A.
2. On définit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.
   B est-elle diagonalisable ? Donner les éléments propres de B.

Exercice 13 –
Déterminer les matrices diagonalisables de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 –
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

Exercice 15 – Le vrai/faux de la fin
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Une somme de matrices diagonalisables est diagonalisable. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Les puissances d'une matrice diagonalisable sont diagonalisables. ☐ Vrai ☐ Faux
3. Si A est diagonalisable, $A + \lambda \mathrm{I}_n$ aussi. ☐ Vrai ☐ Faux

Solution des exercices

Exercice 1 –

1. $E_1(p) = F$.	☒ Vrai	☐ Faux
2. $E_1(s) = G$.	☐ Vrai	☒ Faux
3. p est diagonalisable.	☒ Vrai	☐ Faux
4. s est diagonalisable.	☒ Vrai	☐ Faux

À retenir

- $E = F \oplus G = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E_1(p) \oplus E_0(p)$, donc p est diagonalisable.
- $E = F \oplus G = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$, donc s est diagonalisable.

Exercice 2 –

La matrice A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. On en déduit que A admet 3 valeurs propres distinctes et est carrée d'ordre 3 : elle est donc diagonalisable.

Cours

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable (et chacune des valeurs propres est simple).

Exercice 3 –

Notons A cette matrice. On a :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on a alors :

$$\chi_A(X) = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1)$$

On a :

$$A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice. Cette matrice est de rang 2 car $C_1 = -C_2 \neq \tilde{0}$ et C_2 et C_3 sont non colinéaires. Ainsi $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3)$ est de dimension 1 d'après le théorème du rang. Sachant que $C_1 = -C_2$, on en déduit que le vecteur non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_1(A)$.

On a :

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice. Cette matrice est de rang 1 car C_2 est nulle et que $C_1 = -C_3 \neq \tilde{0}$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3)$ est de dimension 2 d'après le théorème du rang. Sachant que $C_1 = -C_3$ et $C_2 = \tilde{0}$, on en déduit que les vecteurs non colinéaires $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $E_2(A)$.

Ainsi,

$$\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$$

On en déduit que A est diagonalisable. La concaténation des bases précédentes est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et d'après la formule de changement de base, on a $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$$

et par la méthode usuelle pour inverser une matrice :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

🎓 Cours

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *diagonalisable* si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si il existe $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est diagonalisable.
- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$.
- χ_A est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $m(\lambda) = \dim(E_\lambda(A))$.

Exercice 4 –

On a :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -a \\ -b & X \end{vmatrix} = X^2 - ab$$

- Si $ab < 0$ alors $-ab > 0$ donc χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et A n'est pas diagonalisable.
- Si $ab > 0$ alors :

  $$\chi_A(X) = (X - \sqrt{ab})(X + \sqrt{ab})$$

  donc A est carrée d'ordre deux et admet deux valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

- Si $ab = 0$, la seule valeur propre de A est 0 donc A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à la matrice nulle ou encore si et seulement si elle est la matrice nulle. Ainsi, sous l'hypothèse $ab = 0$, A est diagonalisable si et seulement si a et b sont nuls.

On en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $ab > 0$ ou $a = 0$ et $b = 0$.

À retenir

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La seule matrice semblable à $\lambda \mathrm{I}_n$ est $\lambda \mathrm{I}_n$.

Exercice 5 –

La matrice A est de rang 1 donc son noyau est de dimension $n-1$. Ainsi, 0 est valeur propre de A avec une multiplicité (en tant que racine de χ_A) supérieure ou égale à $n-1$. Or, χ_A est unitaire et de degré n donc il existe un scalaire λ tel que :

$$\chi_A(X) = X^{n-1}(X-\lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$$

Or on sait que le coefficient de X^{n-1} est égal à $-\mathrm{Tr}(A)$ donc :

$$\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$$

- Si la trace de A est non nulle alors $\mathrm{Tr}(A)$ est une valeur propre simple non nulle et la dimension du sous-espace propre associé vaut 1. Ainsi,

$$\dim(E_0(A)) + \dim(E_{\mathrm{Tr}(A)}(A)) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$$

  La matrice A est donc diagonalisable.
- Montrons que si A est diagonalisable alors la trace de A est non nulle. Par contraposée, supposons que la trace de A est nulle. Alors $\chi_A(X) = X^n$. La seule valeur propre de A est 0. La dimension de $E_0(A)$ est $n-1$ et la multiplicité de 0 en tant que racine de χ_A est n donc A n'est pas diagonalisable.

Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si la trace de A est non nulle.

À retenir

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout scalaire λ, on a :

$$m(\lambda) \geq \dim(E_\lambda(A))$$

Exercice 6 –

1. On a :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -a & -a \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

L'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ permet d'obtenir :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & 2-X \\ 1 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

On utilise alors l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$:

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 2 & X-1 & 0 \\ 1 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

On développe alors par rapport à la colonne 3 :

$$\chi_A(X) = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -a \\ 2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)[(X-1)^2 + 2a]$$

2. Distinguons plusieurs cas.

- Si $a > 0$, le polynôme χ_A n'est pas scindé ($(X-1)^2 + 2a$ n'a pas de racine réelle) donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, $(X-1)^2 + 2a$ a deux racines distinctes et 2 est racine de ce polynôme uniquement si $a = -\frac{1}{2}$. Ainsi, si a est différent de $-\frac{1}{2}$, A admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.
  Si $a = -\frac{1}{2}$, on a :
  $$\chi_A(X) = X(X-2)^2$$
  On a :
  $$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  Cette matrice est de rang 2 (C_1 non colinéaire à C_2 et $C_2 = C_3$) donc d'après le théorème du rang, $E_2(A)$ est de dimension 1 qui est strictement plus petit que la multiplicité de 2 comme racine de χ_A. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.
- Supposons que $a = 0$. On a :
  $$\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2$$
  On sait que 2 est valeur propre simple de A donc A est diagonalisable si et seulement si la dimension de $E_1(A)$ vaut 2. On a :
  $$A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  Cette matrice est clairement de rang 1 donc d'après le théorème du rang la dimension de $E_1(A)$ vaut 2 et ainsi A est diagonalisable.

Finalement, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si $a \in]-\infty, 0] \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

Exercice 7 –

Pour tout entier $k \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$\Phi(X^k) = X^k - (X+1)k(X^{k-1}) = (1-k)X^k - kX^{k-1}$$

et $\Phi(1) = 1$. Ainsi, la matrice de Φ dans la base canonique est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $1, 0, -1, \ldots, -n+1$ qui sont $n+1$ réels deux à deux distincts et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ vaut $n+1$. Ainsi, Φ est diagonalisable. De plus, chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1 et on remarque que :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!],\ \Phi((X+1)^k) = (1-k)(X+1)^k$$

et sachant que $(X+1)^k$ est non nul, on en déduit que :

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!],\ E_{1-k}(\Phi) = \text{Vect}((X+1)^k)$$

Cours

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est *diagonalisable* si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable.
- Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
- $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$.
- χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$.

Les valeurs propres sont alors les coefficients diagonaux de toute matrice diagonale représentant u dans une base de vecteurs propres.

Exercice 8 –

1. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que :

$$P(X) = aX^4 + Q(X)$$

Alors :

$$\varphi(P) = (X^2-1)(4aX^3 + Q'(X)) - (4X+1)(aX^4 + Q(X))$$

donc :

$$\varphi(P) = -4aX^3 + (X^2-1)Q'(X) - aX^4 - (4X+1)Q(X)$$

Or le degré de Q est inférieur ou égal à 3 donc le degré de Q' est inférieur ou égal à 2 ce qui implique que $(X^2-1)Q'(X)$ et $(4X+1)Q(X)$ ont un degré inférieur ou égal à 4 (par produit). Par somme, on en déduit que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$.

Montrons la linéarité de φ. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : Linéarité de la dérivation

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)'(X) - (4X+1)(\lambda P+Q)(X)\\ &= (X^2-1)(\lambda P'(X)+Q'(X)) - (4X+1)(\lambda P(X)+Q(X))\\ &= \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi, φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation proposée est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient continu sur $]-1,1[$ et homogène. La fonction :

$$x \mapsto \frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)}$$

admet pour primitive sur $]-1,1[$:

$$x \mapsto \frac{5+\lambda}{2}\ln(|x-1|) + \frac{3-\lambda}{2}\ln(|x+1|)$$

ou encore :

$$x \mapsto \frac{5+\lambda}{2}\ln(1-x) + \frac{3-\lambda}{2}\ln(x+1)$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathrm{Vect}(f)$ où $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \exp\left(\frac{5+\lambda}{2}\ln(1-x) + \frac{3-\lambda}{2}\ln(x+1)\right)$$

ou encore :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = (1-x)^{(5+\lambda)/2}(x+1)^{(3-\lambda)/2}$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Un polynôme P appartient à $E_\lambda(\varphi)$ si et seulement si :

$$\varphi(P) = \lambda P$$

ce qui est équivalent à :

$$(X^2-1)P'(X) - (4X+1)P(X) = \lambda P(X)$$

ou encore :

$$(X^2-1)P'(X) = (4X+1+\lambda)P(X)$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils coïncident sur $]-1,1[$ (une infinité de valeurs) donc l'égalité précédente est équivalente à :

$$\forall x \in]-1,1[,\ P'(x) = \frac{4x+1+\lambda}{(x-1)(x+1)}P(x)$$

Remarquons maintenant que : On tente de se ramener à la question précédente

$$\begin{aligned}\frac{5+\lambda}{2}\times\frac{1}{X-1} + \frac{3-\lambda}{2}\times\frac{1}{X+1} &= \frac{(5+\lambda)(X+1)+(3-\lambda)(X-1)}{2(X-1)(X+1)}\\ &= \frac{(5+\lambda+3-\lambda)X+5+\lambda-3+\lambda}{2(X-1)(X+1)}\\ &= \frac{8X+2+2\lambda}{2(X-1)(X+1)}\\ &= \frac{4X+1+\lambda}{(X-1)(X+1)}\end{aligned}$$

Ainsi, P appartient à $E_\lambda(\varphi)$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-1,1[,\ P'(x) = \left(\frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)}\right) P(x)$$

ce qui est équivalent à :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[,\ P(x) = C(1-x)^{(5+\lambda)/2}(x+1)^{(3-\lambda)/2}$$

L'application φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 5 donc admet au plus 5 valeurs propres. Si on trouve 5 valeurs réelles de λ pour lesquelles :

$$x \mapsto (1-x)^{(5+\lambda)/2}(x+1)^{(3-\lambda)/2}$$

est une application polynomiale non nulle de degré inférieur ou égal à 4 alors on aura trouvé 5 valeurs propres pour φ donc toutes ses valeurs propres. De plus, dans ce cas, chaque sous-espace propre sera de dimension 1 (valeur propre simple) donc le polynôme obtenu formera une base de ce sous-espace. Il est clair que les valeurs $3, 1, -1, -3$ et -5 conviennent, ce qui nous donne donc les éléments propres de φ.

Exercice 9 –

1. Par simple calcul, on a :

$$\chi_A(X) = (X-1)^2(X-5)$$

On utilise la méthode usuelle pour obtenir les éléments propres de A.

- Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ forment une base de $E_1(A)$.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_5(A)$.

La formule de changement de base implique que $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \operatorname{diag}(1,1,5)$$

et la méthode usuelle pour inverser une matrice donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}(A) &\iff AM = MA \\ &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D) \end{aligned}$$

Déterminons alors $\mathscr{C}(D)$. Pour toute matrice :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

On a :

$$ND = \begin{pmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{pmatrix} \text{ et } DN = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{pmatrix}$$

On en déduit que N appartient à $\mathscr{C}(D)$ si et seulement si $c = f = g = h = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(D) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ &= \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3}) \end{aligned}$$

Pour tout $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}(A) &\iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D) \\ &\iff P^{-1}MP \in \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3}) \\ &\iff \exists (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5,\ P^{-1}MP = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2} + eE_{3,3} \end{aligned}$$

Ainsi, M commute avec A si et seulement si :

$$\exists (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5,\ M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{2,1}P^{-1} + dPE_{2,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1}$$

On en déduit que :

$$\mathscr{C}(A) = \text{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{2,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$$

La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est libre (sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$) donc par injectivité de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PMP^{-1}$, la famille :

$$(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{2,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$$

est libre ce qui implique que $\mathscr{C}(A)$ est de dimension 5.

À retenir

Pour déterminer le commutant d'une matrice diagonalisable A, on peut suivre la démarche suivante :

- On diagonalise la matrice : A est semblable à une matrice diagonale D.
- On détermine le commutant de D (ce qui est simple car D a de nombreux coefficients nuls).
- On détermine le commutant de A à l'aide de la formule de changement de base.