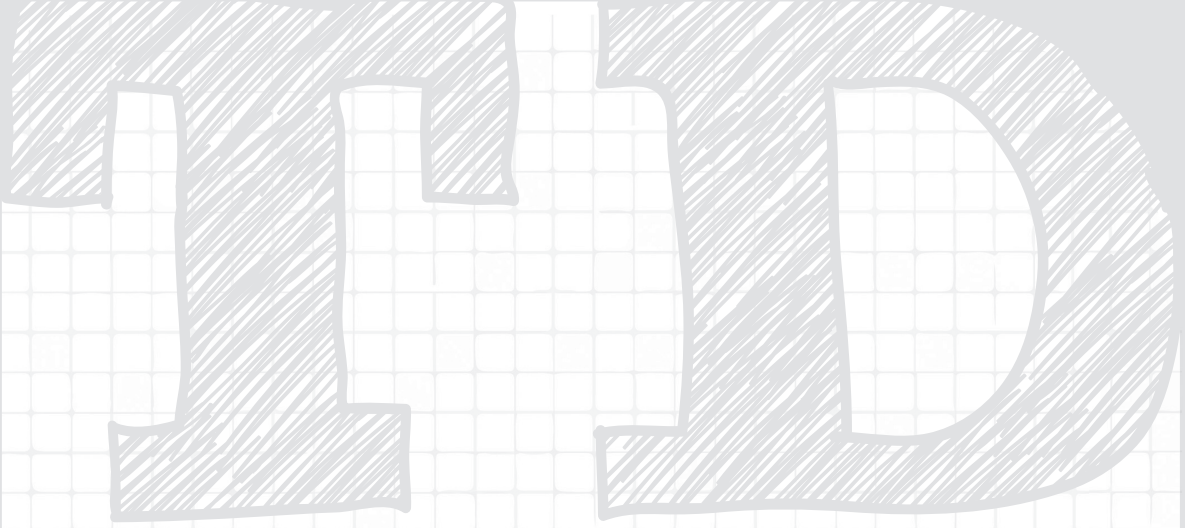




JEAN-PIERRE LECOUTRE

NAÏLA HAHEK

PHILIPPE PILIBOSSIAN

ALGÈBRE

 **QCM et exercices corrigés**

 **9 sujets d'examen corrigés**

 **Rappels de cours**

5^e ÉDITION

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076779-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TD Sommaire

Avant-propos	V
TD ① Théorie des ensembles	1
L'essentiel	1
QCM	4
Réflexion	4
Entraînement	5
Solutions	13
TD ② Analyse combinatoire	25
L'essentiel	25
QCM	27
Réflexion	27
Entraînement	28
Solutions	32
TD ③ Espace vectoriel réel	39
L'essentiel	39
QCM	45
Réflexion	45
Entraînement	46
Solutions	53
TD ④ Applications linéaires	73
L'essentiel	73
QCM	76
Réflexion	76
Entraînement	77
Solutions	81
TD ⑤ Déterminants	91
L'essentiel	91
QCM	94
Réflexion	94
Entraînement	95
Solutions	98

TD ⑥	Matrices	107
	L'essentiel	107
	QCM	115
	Réflexion	115
	Entraînement	116
	Solutions	125
TD ⑦	Systèmes d'équations linéaires	151
	L'essentiel	151
	QCM	153
	Réflexion	153
	Entraînement	154
	Solutions	157
TD ⑧	Formes quadratiques	169
	L'essentiel	169
	QCM	173
	Réflexion	173
	Entraînement	173
	Solutions	176
TD ⑨	Séries numériques et séries entières	185
	L'essentiel	185
	QCM	193
	Réflexion	193
	Entraînement	194
	Solutions	198
TD ⑩	Équations différentielles	215
	L'essentiel	215
	QCM	220
	Réflexion	220
	Entraînement	221
	Solutions	223
TD ⑪	Sujets d'examen corrigés	235
	Sujets d'examen	235
	Correction	248
	Index	279

Avant-propos

Pour vous familiariser avec l'usage de l'outil mathématique, indispensable à toute formalisation en économie, nous proposons une série d'exercices, regroupés en deux volumes : *Analyse* et *Algèbre*. Cet ouvrage, s'adresse aux étudiants de Licence d'économie et gestion ou d'AES.

Chacun des dix premiers chapitres (les 9 et 10 étant des compléments d'analyse) présente la même structure. Au début, les principales notions de cours et les résultats importants sont rappelés de façon succincte dans « L'essentiel du cours ». Un bref texte introductif indique les points essentiels qui vont être abordés et présentés dans le chapitre. Il ne s'agit pas d'un résumé de cours, mais seulement d'un avant-propos où on essaie d'expliquer, dans un langage peu formalisé, le fondement et l'utilité des notions définies ensuite de façon plus formelle.

Un certain nombre d'affirmations constituent le paragraphe « Q.C.M ». La réponse en vrai-faux permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien compris les principaux points de cours. Il doit exercer sa vigilance face à des affirmations, parfois simples, mais qui peuvent contenir un piège.

Les questions de « Réflexion » qui sont proposées ensuite ont essentiellement pour but de mettre l'accent sur certaines notions un peu délicates du cours. Il faut être attentif aux commentaires qui figurent dans la solution de l'exercice, en fin de chapitre.

Les exercices d'« Entraînement » permettent, enfin, à l'étudiant de tester sa capacité à passer de la théorie à la pratique. Ils suivent l'ordre de progression du cours et sont précédés d'un titre indiquant la principale notion à laquelle ils se rapportent. Une rubrique « Analyse de l'énoncé et conseils » précise la démarche à suivre et les résultats de cours à utiliser pour résoudre l'exercice proposé.

Les solutions très détaillées sont regroupées en fin de chapitre, très souvent assorties de commentaires. Certaines solutions se concluent par un énoncé d'exercice identique (« Vous avez compris ? ») et seule réponse figure aussitôt après.

Dans le dernier chapitre, les textes récents des examens de 2^e année de Licence d'économie et gestion de l'université Paris II Panthéon-Assas permettent de retrouver les principaux points abordés dans les chapitres précédents. L'étudiant peut ainsi évaluer le niveau de difficulté de ce qui peut être demandé à une épreuve d'examen. Les corrigés sont regroupés après les énoncés.

TD¹ Théorie des ensembles



On trouvera dans ce chapitre la définition et les principales propriétés d'une *fonction*, ou *application*, définie comme une relation binaire particulière entre deux ensembles. On définira donc au préalable la notion de relation binaire et on présentera ensuite quelques relations particulières, comme les relations d'*équivalence*, de préordre et d'ordre. Comme relations fonctionnelles particulières, nous étudierons les *injections*, les *surjections* et les *bijections*. Nous verrons également dans quelles conditions on peut effectuer la *composition* d'applications ou définir une *application réciproque*.

1 ● Ensembles

1.1 ● Définitions

- On appelle *différence* de deux parties A et B d'un ensemble E l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ; cet ensemble est noté $A - B$.
- On appelle *différence symétrique* de deux parties A et B d'un ensemble E l'ensemble des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B , sans appartenir simultanément à A et à B ; cet ensemble est noté $A \Delta B$. Il peut s'écrire :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

- On appelle *partition* d'un ensemble E toute famille de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion forme l'ensemble E .
- On appelle *produit cartésien* (ou ensemble produit) de deux ensembles E et F , l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$; cet ensemble est noté $E \times F$.

2 ● Relations

2.1 ● Relation binaire

Soit G une partie du produit cartésien $E \times F$ et (x, y) un couple de $E \times F$. On dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y si $(x, y) \in G$. Cette *relation binaire* entre les éléments x et y est notée $x\mathcal{R}y$. L'ensemble G est appelé le *graphe*, E l'ensemble de *départ* et F l'ensemble d'*arrivée* de cette relation.

Dans le cas particulier où $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire dans E . Elle peut alors posséder certaines des propriétés suivantes.

Elle est *réflexive* si pour tout x dans E on a $x\mathcal{R}x$.

Elle est *symétrique* si pour tous x et y dans E : $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.

Elle est *antisymétrique* si pour tous x et y dans E : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \implies x = y$.

Elle est *transitive* si pour tous x, y et z dans E : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.

2.2 ● Définitions

- On appelle *relation d'équivalence* une relation binaire dans E qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Pour tout élément a de E , on appelle *classe d'équivalence* de a , modulo $\mathcal{R}$, le sous-ensemble de E défini par :

$$Cl(a) = \{x \in E \mid x\mathcal{R}a\}$$

On appelle *ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, noté $E / \mathcal{R}$.

- On appelle *relation de préordre* une relation binaire dans E qui est à la fois réflexive et transitive.
- On appelle *relation d'ordre* une relation binaire dans E qui est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Elle est dite d'*ordre total* si deux éléments quelconques x et y de E sont comparables par cette relation, c'est-à-dire si on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans le cas contraire, l'ordre est dit *partiel*.

3 ● Applications

3.1 ● Définitions

- Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F . Cette relation est dite *fonctionnelle* en y si, pour tout élément x dans E , il existe un élément et un seul dans F tel que $x\mathcal{R}y$ soit vraie. Le graphe d'une telle relation est appelé le *graphe fonctionnel* dans $E \times F$.

- On appelle *fonction* (ou *application*) la relation qui associe à tout élément x de E l'élément unique y de F avec lequel il est en relation fonctionnelle. Une fonction est déterminée par le triplet (E, F, G) constitué respectivement de ses ensembles de départ et d'arrivée et de son graphe fonctionnel. On dit que la fonction f est définie dans E et à valeurs dans F , ou que f est une application de E dans F . On utilise les notations suivantes :

$$f: E \longrightarrow F \quad \text{ou} \quad f: x \longmapsto f(x)$$

- On appelle *image* d'un sous-ensemble A de E par f le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$$

- On appelle *image réciproque* d'un sous-ensemble B de F par f le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

- Une application f de E dans F est *injective*, ou est une *injection*, si deux éléments distincts x_1 et x_2 de E ont toujours des images distinctes dans F :

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ou, de façon équivalente, si chaque élément de F est l'image d'au plus un élément de E :

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

- Une application f de E dans F est *surjective*, ou est une *surjection*, si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément x de E , c'est-à-dire qu'il existe au moins un x tel que $y = f(x)$. Cette propriété se traduit également par $f(E) = F$.
- Une application f qui est à la fois injective et surjective est *bijjective*, ou est une *bijection*. Pour tout élément y de F il existe alors un et un seul élément x de E tel que $y = f(x)$.
- Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et g une application de F dans un ensemble G . L'application *composée* de f et g , notée $g \circ f$, est l'application de E dans G qui à tout élément x de E fait correspondre l'élément $g[f(x)]$ de G .
- Si f est une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F , la relation fonctionnelle en y est aussi une relation fonctionnelle en x . Cette dernière définit alors une bijection de F dans E , appelée application *réciproque*, ou *inverse*, de f , notée $f^{-1} : y \in F, x = f^{-1}(y) \iff y = f(x), x \in E$



	Vrai	Faux
1. L'ensemble $A \cap B$ est le plus grand ensemble contenu à la fois dans les ensembles A et B .	☐	☐
2. Si A et B sont deux ensembles d'une même famille $\mathcal{E}$, alors $A \cup B$ appartient aussi à la famille $\mathcal{E}$.	☐	☐
3. La relation d'inclusion au sens large entre parties d'un même ensemble est une relation d'ordre.	☐	☐
4. Si A et B sont deux parties d'un même ensemble E , les relations $A \subset B$ et $B^c \subset A^c$ sont équivalentes, A^c étant le complémentaire de A dans E .	☐	☐
5. Deux classes d'équivalence qui ont un élément commun sont confondues.	☐	☐
6. Si f est une application d'un ensemble fini dans lui-même, les propriétés suivantes sont équivalentes : f est injective $\iff f$ est surjective $\iff f$ est bijective	☐	☐
7. L'application inverse de $x \mapsto x$ est l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$.	☐	☐
8. L'application réciproque de la bijection $g \circ f$ est l'application $g^{-1} \circ f^{-1}$.	☐	☐



9. Montrer qu'il n'y a pas associativité entre les lois de réunion et d'intersection en comparant les ensembles :

$$X = (A \cap B) \cup C \text{ et } Y = A \cap (B \cup C)$$

10. Montrer que la différence entre ensembles n'est pas associative, en comparant les ensembles :

$$X = (A - B) - C \text{ et } Y = A - (B - C).$$

11. Déterminer les ensembles : $F = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(E)} A$ et $G = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(E)} A$

où E est un ensemble quelconque.

12. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux sous-ensembles quelconques de E . Montrer que :

$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \text{ si } f \text{ est injective, alors } f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

13. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux sous-ensembles quelconques de F . Montrer que :

$$A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$$

14. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A et B deux sous-ensembles quelconques respectivement de E et de F . Montrer que :

$$A \subset f^{-1}[f(A)] \quad \text{si } f \text{ est injective, alors } A \supset f^{-1}[f(A)]$$

$$B \supset f[f^{-1}(B)] \quad \text{si } f \text{ est surjective, alors } B \subset f[f^{-1}(B)]$$



Opérations sur les ensembles

15. Soit A , B et C des parties d'un ensemble E . Déterminer les ensembles suivants :

$$X = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \quad Z = (A^c \cap B^c) \cap (A \cap B)^c$$

$$Y = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \quad U = [A \cap (B \cap C)] \cap [(B \cap C) \cup C^c]$$

$$V = (A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup [(A^c \cup B) \cup (A \cap C)]^c$$

$$W = (A \cup C) \cap [(A \cup B \cup C)^c \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)] \cap [C \cup (B \cap C)]$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On utilise la distributivité des opérations de réunion et d'intersection ainsi que les lois de Morgan pour simplifier l'écriture des ensembles proposés.

16. Si A est l'ensemble des entiers multiples de 5 et B l'ensemble des entiers pairs, déterminer la différence $A - B$ de ces deux ensembles.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'appliquer la définition de la différence de deux ensembles.

17. Si A , B et C sont trois parties non disjointes deux à deux d'un ensemble E , on demande de construire la partition de cet ensemble en *atomes*, c'est-à-dire en sous-ensembles qui ne peuvent plus être décomposés à leur tour.

Analyse de l'énoncé et conseils. Dans le cas de deux sous-ensembles A et B seulement, on peut voir aisément sur une représentation graphique d'Euler que les atomes qui constituent la partition de E sont les sous-ensembles $A \cap B$, $A - B = A \cap B^c$, $B - A = B \cap A^c$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Avec trois sous-ensembles, les atomes seront obtenus par les intersections des différents sous-ensembles ou de leur complémentaire.

18. Si A , B et C sont des parties d'un ensemble E , exprimer $A \Delta B \Delta C$ en fonction des atomes définis dans l'exercice précédent.

Analyse de l'énoncé et conseils. On utilisera d'abord la définition de la différence symétrique $A \Delta B$ à l'aide de $A \cup B$ et $A \cap B$ pour exprimer son complémentaire $(A \Delta B)^c$. On écrit ensuite l'ensemble demandé sous la forme de la différence symétrique $(A \Delta B) \Delta C$.

19. Si A et B sont des parties quelconques d'un ensemble E , démontrer les équivalences suivantes :

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff B^c \subset A^c$$

Analyse de l'énoncé et conseils. L'égalité de deux ensembles s'obtient par une double inclusion de ces ensembles.

20. Soit A , B et C trois ensembles tels que :

$$A \cap B \subset A \cap C \quad \text{et} \quad A \cup B \subset A \cup C$$

Déterminer la relation qui existe entre les ensembles B et C .

Analyse de l'énoncé et conseils. La double inclusion rend plausible l'hypothèse à démontrer $B \subset C$.

Famille d'ensembles

21. Si I est un ensemble fini d'indices, $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble quelconque E et B un sous-ensemble de E , démontrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i^c &= \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c & \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B &= \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B) \\ \bigcap_{i \in I} A_i^c &= \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c & \bigcap_{i \in I} A_i &\subset A_i \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \\ \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B &= \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \end{aligned}$$

Si $\{B_i\}_{i \in I}$ est une famille de parties de E telle que pour tout indice i de I on ait : $A_i \cup B_i = E$, démontrer que :

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = E$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Les quatre premières propriétés se démontrent par récurrence en considérant par exemple que $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et en supposant la propriété vraie pour $J = \{1, 2, \dots, n-1\}$. La cinquième est évidente et la dernière s'établit en prouvant que E est inclus dans l'une des deux unions où les ensembles A_i et B_i jouent un rôle symétrique.

Partition

22. On considère les sous-ensembles suivants de $X = \{a, b, c, d, e, f\}$:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b\}, B = \{a, b, c\}, C = \{a, b, c, d\}, D = \{f\}, E = \{b, e\}, \\ F &= \{e, f\}, G = \{b\} \end{aligned}$$

Déterminer toutes les familles constituées à partir de ces sous-ensembles et qui forment une partition de X .

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de savoir ce qu'est une partition pour repérer aisément les familles qui constituent des partitions de X .

23. Préciser si la famille $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constitue une partition de E dans chacun des cas ci-après.

- | | |
|---|---|
| a) $A_n = \{n, n+2\}$ et $E = \mathbb{N}$. | d) $A_n = [n, n+1[$ et $E = [0, +\infty[$. |
| b) $A_n = \{n, n+1\}$ et $E = \mathbb{N}$. | e) $A_n = [n+1, n+2[$ et $E =]0, +\infty[$. |
| c) $A_n = \{2n, 2n+1\}$ et $E = \mathbb{N}$. | f) $A_n =]-n, n[$ et $E = \mathbb{R}$. |

Analyse de l'énoncé et conseils. Là encore, à partir de la définition d'une partition il est facile de répondre à la question.

Cardinal

24. Si A et B sont deux ensembles finis, exprimer le cardinal de leur différence symétrique $A \Delta B$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Le résultat s'obtient aisément en écrivant cette différence symétrique sous la forme d'une différence de deux ensembles.

25. Soit A_1, A_2 et A_3 trois ensembles finis et notons $n_i = \text{card } A_i, n_{ij} = \text{card } (A_i \cap A_j)$ pour i et j différents variant de 1 à 3, $n_{123} = \text{card } (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Dans le cas où $n_1 = 10, n_2 = 15, n_3 = 20, n_{12} = 8$ et $n_{23} = 9$ indiquer les valeurs possibles de $\text{card } (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

Analyse de l'énoncé et conseils. On exprime $\text{card } (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ en fonction des autres cardinaux et on utilise les contraintes vérifiées par les cardinaux inconnus pour obtenir un encadrement de sa valeur.

Produit cartésien

26. On lance un dé à six faces qui comportent deux fois chacun des chiffres 1, 2 et 3. On lance le dé une seconde fois si le résultat du premier jet est impair. Montrer que l'ensemble des résultats de deux lancers est un produit cartésien que l'on déterminera. Montrer ensuite que si on se restreint aux lancers pour lesquels la somme des deux résultats obtenus est paire, l'ensemble est un carré cartésien.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de considérer l'ensemble des résultats possibles pour chaque lancer et de tenir compte de la restriction dans le second cas.

Graphe d'une relation binaire

27. Soit $E = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont des ensembles dont les positions respectives sont précisées dans le diagramme d'Euler de la figure 1.1, page ci-contre. Construire le graphe de la relation binaire définie sur E par :

$$X \mathcal{R} Y \iff X \cap Y \neq \emptyset$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On représente les éléments de E sur un axe horizontal et un axe vertical et par un point les couples (X, Y) qui sont dans la relation $\mathcal{R}$.