BCPST 1

MATHS

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



avec copies
& corrigés commentés

Ayoub Hajlaoui

ellipses

BCPST1

MATHS

1 DEVOIR CORRIGÉ PAR SEMAINE



Ayoub HAJLAOUI
Lauréat de l'agrégation externe de mathématiques
Docteur en mathématiques appliquées
Colleur en BCPST2 et en MPSI

ellipses

Conception graphique couverture : Nathalie FOULLOY

ISBN 9782340-118508

Dépôt légal : août 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Remerciements

Je tiens ici à remercier vivement les éditions Ellipses, en particulier Mme Thaïs LOISEL dont la confiance et le suivi bienveillant ont permis la réalisation de cet ouvrage.
Je remercie aussi chaleureusement M. Ahmed LASMAR pour ses conseils toujours avisés et son aimable relecture.
Mes pensées pleines de gratitude vont enfin à une lignée d'enseignants illustres, qui m'ont inspiré dans la voie du partage mathématique. À Mme Françoise MALRIC, qui m'a fait découvrir l'élégance dans l'art subtil de la démonstration. À M. Nicolas CHOQUET, qui m'a fait comprendre qu'avant tout, les mathématiques sont joie de l'esprit. À M. Jean-Claude JACQUENS, qui m'a fait saisir l'importance de canaliser cette joie par la rigueur et le travail soutenu. Enfin et surtout, à ma première professeure de mathématiques, Mme Samia HAJLAOUI, ma chère mère, et son intransigeance quant à la bonne tenue de mes divisions avec reste.

Sommaire

Introduction et conseils 7

Thèmes abordés par devoir 10

Devoirs

- Devoir 1 14
- Devoir 2 15
- Devoir 3 17
- Devoir 4 19
- Devoir 5 21
- Devoir 6 23
- Devoir 7 24
- Devoir 8 25
- Devoir 9 27
- Devoir 10 28
- Devoir 11 31
- Devoir 12 33
- Devoir 13 35
- Devoir 14 37
- Devoir 15 39
- Devoir 16 41
- Devoir 17 44
- Devoir 18 46
- Devoir 19 48
- Devoir 20 50
- Devoir 21 52
- Devoir 22 54
- Devoir 23 56
- Devoir 24 58
- Devoir 25 61
- Devoir 26 63
- Devoir 27 65
- Devoir 28 67
- Devoir 29 69
- Devoir 30 71

Corrigés

- Corrigé du devoir 1 74
- Corrigé du devoir 2 83
- Corrigé du devoir 3 92
- Corrigé du devoir 4 103
- Corrigé du devoir 5 115
- Corrigé du devoir 6 126
- Corrigé du devoir 7 134
- Corrigé du devoir 8 143
- Corrigé du devoir 9 156
- Corrigé du devoir 10 164
- Corrigé du devoir 11 178
- Corrigé du devoir 12 186
- Corrigé du devoir 13 194
- Corrigé du devoir 14 203
- Corrigé du devoir 15 210
- Corrigé du devoir 16 216
- Corrigé du devoir 17 227
- Corrigé du devoir 18 234
- Corrigé du devoir 19 241
- Corrigé du devoir 20 249
- Corrigé du devoir 21 258
- Corrigé du devoir 22 266

- Corrigé du devoir 23 275
- Corrigé du devoir 24 285
- Corrigé du devoir 25 292
- Corrigé du devoir 26 299
- Corrigé du devoir 27 308
- Corrigé du devoir 28 315
- Corrigé du devoir 29 321
- Corrigé du devoir 30 328

Introduction et conseils

Cet ouvrage est destiné aux étudiants des classes préparatoires de première année en BCPST. Il est composé de trente devoirs de mathématiques corrigés, sous forme de problèmes ou de successions d'exercices, couvrant les notions au programme de la filière depuis septembre 2021. Les corrigés de ces devoirs, particulièrement détaillés, sont enrichis de points méthode, de rappels de cours, de conseils pratiques, de remarques élargissant le champ de la résolution, indiquant des erreurs fréquentes à éviter ou insistant sur la rigueur requise en matière de rédaction.

Ces sujets corrigés pourront servir d'entraînement aux devoirs sur table rythmant la première année et contribueront, sur le plus long terme, à préparer les étudiants aux écrits qui les attendent à l'issue de la deuxième année : ceux des concours d'Agro-Véto, de l'Ecole Normale Supérieure, et de G2E. Les énoncés présentés dans cet ouvrage se focalisent sur le versant mathématique de la matière, même si quelques questions d'informatique sont présentées dans les devoirs, à des occasions jugées adéquates.

La BCPST est une filière particulièrement polyvalente, notamment de par sa grande variété de matières scientifiques. Elle requiert donc une mobilisation sur plusieurs fronts, qui présente aussi bien un défi organisationnel que l'occasion pour l'étudiant de puiser, dans les matières et notions qui lui plaisent le plus, le courage d'affronter les difficultés qu'il peut rencontrer dans les autres.

Un effort soutenu, un travail régulier et de longue haleine, accordant à chaque matière le temps qui lui revient de plein droit, sont la clé de la réussite. Une constance qui ne se laisse pas perturber par les aléas des premiers résultats. Loin de vous décourager, telle épreuve mal négociée fera naître l'opportunité de passer en revue vos points faibles pour les consolider. Tel succès vous galvanisera et vous fera redoubler d'efforts. Gardez à l'esprit que le travail fourni ne se matérialise pas immédiatement en résultat sensible, que l'amélioration et le perfectionnement s'observent à moyen et long terme. Patience, donc, sur cette voie du labeur assidu, suivant son cours sans se laisser distraire outre mesure par les bornes kilométriques du chemin, par les quantifieurs de progression que sont les notes.

Accordez aussi à votre corps et à votre esprit le repos qui leur reviennent de plein droit après l'effort : si venir à bout des questions difficiles requiert de s'y être sérieusement préparé en amont, cela nécessite aussi de se trouver dans de bonnes conditions le jour de l'épreuve, pour déceler telle ou telle astuce. En ce sens, on n'insistera jamais assez quant à l'importance d'un sommeil suffisant, de qualité et, dans la mesure du possible, à heures relativement fixes.

Même s'il est indéniable que vous passerez par des moments particulièrement épuisants, une organisation soignée vous permettra de concilier une hygiène de vie globalement saine et un emploi du temps chargé. Ce temps, matière première stratégique, ne le perdez pas non plus à culpabiliser de n'avoir trouvé votre organisation optimale, à supposer qu'elle existe. Il est bon de faire preuve d'ambition lorsque l'on programme son planning de devoirs ou de révisions ; il l'est tout autant de lui prévoir un minimum de souplesse, et donc de sous-optimalité assumée, en cas d'imprévu : une matière qui demande ponctuellement de vous y consacrer plus que le temps que vous lui aviez alloué a priori, une colle à rattraper à un moment peu arrangeant, un soir où vous êtes malade, tout simplement... Votre planning ne doit pas s'écrouler, tel un château de cartes, à la moindre variation. La polyvalence de votre formation appelle votre adaptabilité.

En ce qui concerne plus précisément les mathématiques, un apprentissage sérieux du cours et un entraînement régulier sur les exercices vus en classe vont de pair. Ne négligez pas la constitution d'un bagage théorique solide au détriment de l'efficacité pratique. L'importance de cette dernière est indiscutable : il faudra vous y exercer régulièrement pour prendre et garder la main sur votre matière, sans la décorréler du cours dont elle puise sa source. Par sa prise de hauteur dans l'abstraction, le cours permet d'appréhender les situations pratiques de manière générale, dépassant ce mimétisme qui vous fait reproduire des bribes de résolutions d'exercices-types sans trop les comprendre. L'entraînement sur ces exercices-types reste évidemment incontournable.

Tout au long de l'année scolaire, la difficulté ne vous semblera pas nécessairement croissante au cours du temps. En fonction du choix de vos enseignants, vous pourrez être amenés à débuter l'année par des chapitres de logique, quelque peu déstabilisants pour bon nombre d'élèves, mais indispensables dans votre boîte à outils. Le cas échéant, vous retrouverez, un peu plus tard, des notions auxquelles vous êtes plus accoutumés au sortir de la Terminale. Il y a des chapitres que vous apprécierez. Il y a des chapitres que vous apprécierez moins. De même que pour la variété des matières, puisez en les chapitres qui vous plaisent le plus le courage d'affronter ceux qui vous semblent rébarbatifs, en prenant soin de remarquer les passerelles qui les lient, l'importance que revêtent les uns pour établir les résultats des autres. En particulier, lorsqu'interviennent des notions nouvelles pour vous, soyez particulièrement attentifs à la nature des objets mis en jeu dans les définitions et les théorèmes : cela vous évitera par exemple de qualifier tel ou tel objet avec des adjectifs inappropriés.

Bien que cet ouvrage s'efforce de suivre une progression globalement linéaire s'appuyant sur le programme officiel, l'ordre entre certains chapitres peut différer d'une classe à l'autre. Un tableau récapitulatif des notions mises en jeu vous

indique les chapitres intervenant dans chaque devoir. Les thèmes abordés sont mentionnés en début de chaque sujet, et des mots-clés en dessinent les contours à la fin de l'énoncé. Ces mots-clés ne rentrent pas non plus dans le détail des formules ou théorèmes nécessaires pour venir à bout du problème, à moins qu'ils ne soient clairement cités dans celui-ci, et ce afin de ne pas gâcher l'effet de surprise.

Un temps de résolution accompagne chaque énoncé présenté, pour vous permettre d'évaluer votre efficacité en temps limité et vous habituer aux conditions des épreuves. Il est donné à titre purement indicatif, et ne vous interdit nullement de vous attarder un peu plus sur quelques sujets de votre choix. La sensation de blocage que vous éprouverez devant certains énoncés sera l'occasion de réfléchir aux stratégies à adopter pour gagner honnêtement des points dans les devoirs les plus difficiles. En fin de correction, des remarques générales sur le sujet viennent appuyer votre réflexion en ce sens.

Enfin, nous voulons que cet ouvrage soit votre allié, et non une source d'écueil. Il n'a vocation à remplacer ni votre cours ni les travaux dirigés (TD) vus en classe ni vos devoirs maison, qui restent prioritaires. Il ne vous dispense pas non plus des entraînements notamment purement calculatoires de certains exercices de TD ou de feuilles de calcul. Entraînements parfois moins amusants, mais tout aussi importants dans votre apprentissage mathématique.

Cela étant dit, nous vous souhaitons au moins autant de plaisir, en vous servant de cet ouvrage, que celui que l'auteur a pris à le rédiger. Bon courage !

Thèmes abordés par devoir

Devoir n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Logique et raisonnement*	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x		x	
Nombres réels			x	x	x	x	x		x		x	x	x	x	
Trigonométrie					x		x	x			x	x	x		
Complexes						x	x	x	x		x				
Méthodes de calcul ($\sum$, $\prod$...)				x	x			x		x	x				
Vocabulaire des applications									x	x		x	x		
Dénombrement										x					
Suites usuelles					x			x			x				
Fonctions				x								x	x		
Dérivées, primitives, intégrales													x	x	
Equations différentielles														x	
Systèmes linéaires															x
Matrices															
Géométrie															
Statistiques															
Polynômes															
Suites réelles, limites				x	x										
Limites, continuité des fonctions															
Dérivation des fonctions															
Intégration															
DL et étude locale															
Fonctions à deux variables															
Espaces vectoriels															
Applications linéaires															
Probabilités															
Variables aléatoires															

Ces thèmes reprennent, à peu de choses près, le découpage du programme officiel.

*Bien entendu, tous les sujets entraînent votre logique et votre raisonnement. Les croix cochées sur cette ligne vous indiquent les sujets faisant explicitement appel aux notions de ce chapitre : raisonnement par l'absurde, implications, contraposition, ensembles, récurrence...

Devoir n°	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Logique & raisonnement	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x
Nombres réels					x	x	x	x	x						
Trigonométrie								x		x					
Complexes											x				
Méthodes de calcul ($\sum$, $\prod$...)					x		x	x						x	x
Vocabulaire des applications									x			x			
Dénombrement															x
Suites usuelles													x		x
Fonctions					x		x		x	x				x	x
Dérivées, primitives, intégrales					x		x	x	x	x				x	
Equations différentielles	x									x					
Systèmes linéaires	x	x									x	x			
Matrices	x	x	x	x							x	x	x		
Géométrie		x													
Statistiques			x												
Polynômes				x			x	x					x		
Suites réelles, limites					x	x	x	x	x					x	x
Limites, continuité des fonctions						x	x	x	x					x	
Dérivation des fonctions							x	x	x					x	
Intégration								x							
DL et étude locale									x			x			x
Fonctions à deux variables										x					
Espaces vectoriels											x	x			
Applications linéaires												x			x
Probabilités													x	x	
Variables aléatoires														x	

DEVOIRS

Devoir 1

Raisonnements en tous genres

Thèmes abordés : Logique et raisonnement, manipulation d'implications et d'équivalences pour vous entraîner à jongler entre différentes assertions.
Temps de résolution : 1 h 30 min

Exercice 1 : Parité, divisibilité, irrationalité

1. Soient P et Q deux assertions mathématiques. Montrer que les assertions $[P \iff Q]$ et $[\text{non}(P) \iff \text{non}(Q)]$ sont équivalentes.
2. Soient p et q deux entiers relatifs. Montrer l'équivalence suivante :
$$pq \text{ est pair} \iff [p \text{ est pair ou } q \text{ est pair}].$$
3. Soit p un entier relatif. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'implication suivante est vraie : p^n est pair $\implies p$ est pair.
4. Soit n un entier naturel impair. Montrer que si n est la somme de deux carrés d'entiers relatifs, alors $n-1$ est un multiple de 4.
5. Déterminer l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $a^2 + b^2 = 2027$.
6. Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 2 : Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x-y) = f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. Soit $f \in \mathscr{F}$. Montrer que : $[\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0] \implies [\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0]$.
2. Soit $f \in \mathscr{F}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
   a) Déterminer $f(0)$ et montrer que f est paire $\big(\text{i.e. : } \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\big)$.
   b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \in \{-1;1\}$.
   c) Montrer enfin : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$.
3. Conclure.

Mots-clés

Implications, connecteurs logiques, quantificateurs, ensembles.

Devoir 2

Tous ensembles

Thèmes abordés : Logique et raisonnement, opérations et relations entre ensembles, différence symétrique.
Temps de résolution : 1 h 15 min

Énoncé :

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x - 2xy - x^2 = 0 \\ y - 2xy - y^2 = 0 \end{cases}$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, et soient $2p$ ensembles non vides A_1, A_2,...,A_p, B_1,..., B_p. Montrer l'équivalence : $A_1 \times ... \times A_p \subset B_1 \times ... \times B_p \iff \forall k \in [\![1\,;p]\!],\ A_k \subset B_k$.
   $[\![1\,;p]\!]$ *désigne l'ensemble des entiers compris au sens large entre* 1 *et* p.
3. Soit E un ensemble, et soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit $\left(A_{i,j}\right)_{1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q}$ une famille de sous-ensembles de E.
   a) Montrer que : $\bigcup_{i=1}^{p} \left(\bigcap_{j=1}^{q} A_{i,j} \right) \subset \bigcap_{j=1}^{q} \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_{i,j} \right)$.
   b) Montrer que l'inclusion réciproque n'est pas vraie en général.
   On pourra choisir un ensemble E *et des valeurs de* p *et* q *arrangeants.*

Exercice 2 : Différence symétrique

Soit E un ensemble. Pour toute partie (ou sous-ensemble) A de E, on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. On rappelle, pour toutes parties A et B de E : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Pour toutes parties A et B de E, on note : $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, puis exprimer $\overline{A \,\Delta\, B}$ en fonction de $A \cap B$ et de $\overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrer que $(A \,\Delta\, B) \cap C = (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$, puis faire un dessin représentant cette partie.
3. Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrer que : $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$.
   On pourra éventuellement utiliser une table de vérité.

4. [Informatique] Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. On dispose d'une fonction Python `appartientA`, qui prend en argument un élément x de E, et renvoie `True` s'il appartient à A, et `False` sinon. On dispose également d'une fonction `appartientB`, qui prend en argument un élément x de E, et renvoie `True` si x appartient à B, et `False` sinon. Ecrire une fonction Python `appartientDelta` qui prend en argument un élément x de E et renvoie `True` si $x \in A \Delta B$ et `False` sinon.

Mots-clés

Ensembles, inclusion, union, intersection, p-uplets.

Devoir 3

Récif et récurrences

Thèmes abordés : Logique et raisonnement, récurrence, nombres réels. Un sujet balayant notamment tous les types de récurrence au programme.
Temps de résolution : 1 h 45 min

Exercice 1 :

1. On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante : $A = \left\{ \frac{x}{n} + (-1)^n,\ x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   a) A admet-elle une borne supérieure ? une borne inférieure ? Si oui, la (les) calculer.
   b) A admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\left|2x^2 - 7x + 5\right| \leq x^2 + 5$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_n u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}}$. Conjecturer l'expression générale de u_n, puis démontrer cette conjecture par récurrence double.

Exercice 2 :

1. Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. *On rappelle que* $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
2. Trois serpents de mer ont trouvé refuge dans un récif corallien de l'océan Pacifique. On étudie l'évolution de leur population mois après mois. Pour tout entier naturel n, on note s_n leur nombre au début du mois n (le premier mois est le mois 0). Ainsi, $s_0 = 3$. On considère que leur population triple chaque mois, et qu'à la fin de chaque mois n, n d'entre eux sont dévorés par une population grandissante de requins-zèbres. Montrer que, dans ce récif, les serpents de mer ne sont pas menacés d'extinction.
3. Dans ce même récif, le nombre de requins-zèbres en début de chaque mois n est noté r_n. Cette population de requins-zèbres est en fait constituée uniquement de femelles qui se reproduisent en pondant par parthénogenèse, sans accouplement avec un mâle, et donnent naissance à des femelles. On considère, dans cette modélisation, qu'aucune des femelles ne meurt,

et que chaque femelle reste toujours en mesure de pondre. Nous savons $r_0 = 2$ et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ r_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} r_k$.

a) Démontrer par récurrence forte que pour tout entier naturel non nul n, la propriété $P(n)$: « $r_n = 2^n$ » est vraie.

b) Même question mais avec une récurrence simple.

c) Proposer une interprétation simple de l'égalité $r_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} r_k$.

4. On dispose d'une tablette de chocolat rectangulaire : un rectangle constitué de m petits carrés de chocolat identiques, délimités par des rainures horizontales et verticales. On veut casser complètement cette tablette, afin d'obtenir m carrés de chocolat séparés. On peut casser une tablette en deux rectangles plus petits le long d'une rainure (ligne ou colonne), ce qui constitue une étape. Montrer par récurrence forte que, pour tout entier naturel non nul m, la propriété $P(m)$: « il faut exactement $m-1$ étapes pour casser complètement une tablette à m petits carrés » est vraie.

5. [Serpent de terre] En début de chaque mois n, Remus va pêcher sur le récif mentionné précédemment. Il apporte avec lui une tablette de chocolat à $(n+5)^2$ petits carrés, pour nourrir les requins-zèbres (en l'absence d'écriteau le lui interdisant dans cette partie de l'océan Pacifique). Chaque requin-zèbre se contente d'un petit carré de chocolat. Ecrire un script Python qui, sans utiliser de logarithme, affiche le numéro du premier mois pour lequel Remus n'aura plus assez de chocolat pour tous les requins-zèbres. *On admet qu'un tel mois existe bien. Cela vient du fait que :*
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{(n+5)^2} = +\infty$.

Si nous pouvons assurer au lecteur que les requins-zèbres consomment occasionnellement des serpents de mer, nous comptons sur une bonne dose de suspension d'incrédulité de sa part en ce qui concerne le chocolat, ainsi que le réalisme biologique de cette parthénogenèse plus qu'approximative.

Mots-clés

Récurrence simple, récurrence double, récurrence forte, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum, valeur absolue.

Bouquet d'inégalités exponentielles

Thèmes abordés : Logique et raisonnement, étude de fonctions, manipulation de sommes et produits, valeur absolue. Ce problème vous fait démontrer plusieurs inégalités où intervennent notamment la valeur absolue et la fonction exponentielle. L'aisance et la rigueur dans la manipulation des inégalités sont des indispensables dans la boîte à outils de l'étudiant en BCPST : nombre de théorèmes de première et de deuxième année permettent d'en exhiber, ou s'appuient en hypothèse sur des inégalités préalablement établies.

Temps de résolution : 2 h 30 min

Énoncé :

Questions préliminaires :

1. Montrer que pour tout réel x : $e^x \geq x+1$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^x + 1$ est positive sur $\mathbb{R}$, et que la fonction $g : x \mapsto e^{-x} - e^x + 2x$ est positive sur $]-\infty\,;\,0]$.
3. a) Montrer que pour tous réels a et b : $|a+b| \leq |a| + |b|$.
   b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\,(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.
4. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, pour tous réels a et b :
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \quad .$$

Problème :

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que : $\forall\,(x_1, ..., x_n) \in\ [-1\,;\,+\infty[^n,\ \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.
   b) Montrer que : $\forall\,(x_1, ..., x_n) \in\ \mathbb{R}^n, \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right) - 1\right| \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right) - 1$.
6. Le but de cette question est d'établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - x - 1 \leq x^2 e^{|x|}$.
   a) Démontrer cette inégalité pour tout réel $x \geq 0$.
   b) Justifier que pour tout $x \leq 0$: $e^{-x} + x - 1 \leq x^2 e^{|x|}$.

c) En déduire que pour tout $x \leq 0$: $e^x - x - 1 \leq x^2 e^{|x|}$, puis conclure.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient a et b deux réels. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
   Montrer que : $|a^n - b^n| \leq nM^{n-1}|a - b|$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \frac{x^2}{n} e^{|x|}$.

   b) Étudier l'existence et la valeur éventuelle de : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Mots-clés

Etude de fonction, inégalités, valeur absolue, sommes, produits, raisonnement, fonction exponentielle.

Produit et somme trigonométriques

Thèmes abordés : Logique et raisonnement, trigonométrie, étude de fonctions, manipulation de sommes et produits, suites. Ce problème vous fait manipuler, entre autres, les formules de trigonométrie à l'occasion d'un calcul de produit puis de somme.

Temps de résolution : 2 h

Énoncé :

Les parties I et II sont indépendantes.

Questions préliminaires :

1. En partant de la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, montrer que pour tout réel x, $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence : $\sin(x) \neq 0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \neq 0$.
3. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Partie I : autour d'un produit trigonométrique

On note $\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de π. Autrement dit, $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note : $p_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ p_n(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $\left(p_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
6. Soit $x \in \pi\mathbb{Z}$. On veut montrer que $\left(|p_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on veut déterminer sa limite.
   a) Traiter le cas $x = 0$. Dans la suite de la question, on supposera : $x \neq 0$.

b) Justifier que l'ensemble $A = \left\{n \in \mathbb{N},\ \frac{x}{2^n} \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}\right\}$ admet un minimum.

Ce minimum sera noté N par la suite, et on notera : $y = \frac{x}{2^N}$.

c) Montrer que : $\forall n \geq N,\ |p_n(x)| = \left|p_{n-N}(y)\right|$.

d) Conclure dans le cas $x \neq 0$. Le résultat sera donné en fonction de y.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \left[0\ ;\frac{\pi}{4}\right[$, $\tan(2x) \geq 2^{n+1}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

On pourra s'intéresser aux variations de p_n sur $\left]0\ ;\frac{\pi}{4}\right[$.

Partie II : autour d'une somme trigonométrique

8. Montrer que pour tout réel x, $\cos^4(x) = \frac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-4)^k \cos^4\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Mots-clés

Trigonométrie, sommes, produits, raisonnement, limites.

La partie entière vient dans C

Thèmes abordés : Nombres réels, complexes, logique et raisonnement. Retour sur des propriétés plus ou moins classiques de la partie entière, suivi d'une incartade sur $\mathbb{C}$.

Temps de résolution : 1 h 30 min

Énoncé :

Partie I :

1. Montrer que pour tout réel x et pour tout entier relatif k : $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
2. Soit x un nombre réel. Montrer que : $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
3. Soient x et y deux nombres réels. Montrer que si $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$, alors $|x-y| < 1$. Qu'en est-il de la réciproque ?
4. Justifier que pour tous réels x et y, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$.
5. Justifier que pour tous réels positifs x et y, $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$.
6. Montrer que pour tout réel positif x, $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. *On pourra commencer par établir une inégalité simple.*

Partie II

On note $E_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction qui à tout nombre complexe $z = a + ib \ \ (a,b \in \mathbb{R})$ associe le nombre complexe $E_1(z) = \lfloor a \rfloor + i \lfloor b \rfloor$.

7. Pour quels nombres complexes z a-t-on $E_1(\overline{z}) = \overline{E_1(z)}$?
8. Soit $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \left]1\,;+\infty\right[\times \mathbb{R}$. Montrer que si $E_1(z\overline{z}) = E_1(z)E_1(\overline{z})$, alors $\lfloor a^2 \rfloor = \lfloor a \rfloor^2$ et $b \in \mathbb{Z}$.
9. Soient deux nombres complexes z et z' tels que $E_1(z) = E_1(z')$. Montrer que : $|z-z'| < \sqrt{2}$, et en donner une interprétation géométrique.
10. Soit $z = a+ib$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer que : $|E_1(z)| < E_1(|z|) + 1$.

Mots-clés

Nombres réels, partie entière, valeur absolue, racine carrée, nombres complexes, module, conjugué.

Devoir 7

(In)équations et calculs de cosinus

Thèmes abordés : Trigonométrie, nombres complexes, nombres réels. Mobilisation de formules trigonométriques et de méthodes complexes pour des calculs de cosinus.

Temps de résolution : 1 h 40 min

Énoncé :

Exercice 1 : (In)équations trigonométriques

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\sin^3(x)\cos(x)+\sin(x)\cos(3x)=\dfrac{1}{8}$.
   On pourra utiliser les formules d'Euler.
2. Résoudre dans $[0\,;\pi]$: $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)\geq\sqrt{2}$.
3. Justifier que pour tout réel x, $\dfrac{4x}{4x^2+1}\in[-1\,;1]$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin\left(2\arccos\left(\dfrac{4x}{4x^2+1}\right)\right)=\dfrac{x}{(4x^2+1)^2}$.

Exercice 2 : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

1. Rappeler la valeur de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, et en déduire que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Soient les nombres complexes $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$, et $z_3=z_1z_2$.

2. Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. En utilisant z_3, montrer que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
4. Justifier que les valeurs obtenues en questions 1 et 3 sont bien les mêmes.
5. Montrer à l'aide des formules d'Euler que pour tout réel x, $\cos(4x)=8\cos^4(x)-8\cos^2(x)+1$.
6. Montrer que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ est solution de l'équation $16x^4-16x^2+1=0$, et en déduire une nouvelle fois la valeur de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Mots-clés

Trigonométrie, nombres complexes, forme exponentielle, formules d'Euler.

Sommes trigonométriques et complexes

Thèmes abordés : Méthodes de calcul, manipulation de sommes, lien entre trigonométrie et nombres complexes.
Temps de résolution : 2 h 15 min

Énoncé :

Les parties I, II et III sont indépendantes, mais l'indication de l'énoncé en question 5 peut servir dans d'autres parties.

Questions préliminaires :

1. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ k \in [\![1,\ n+1]\!],\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.
   C'est la formule du triangle de Pascal.
2. Démontrer la formule du binôme de Newton :
   $$\forall\ a, b \in \mathbb{C},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
3. À l'aide des formules d'Euler, montrer que pour tous réels α et β :
   $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.
   C'est l'inégalité triangulaire généralisée.

Partie I : (Co)sinus et binomiaux

Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on pose : $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

5. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$.
   On pourra s'intéresser à une quantité dont $B_n(x)$ est la partie imaginaire.
6. Calculer $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{50}\right)$.

7. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(kx) = 2^{n-1} \times n\cos^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) .$$

Partie II : Sommes de (carrés de) (co)sinus de multiples de x

Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on pose :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx),\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx),\ U_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx) \text{ et } V_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx).$$

8. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, les sommes $C_n(x)$ et $S_n(x)$.
   En fin de calcul, on ne veut que des nombres réels, et on ne veut plus de $\sum$.
9. Exprimer $U_n(x)$ et $V_n(x)$ en fonction de C_n et de x.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire $U_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.
10. Retrouver $U_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ d'une autre manière.
11. [Informatique] Ecrire une fonction Python `somme` qui prend en arguments un entier naturel n et un réel x, et qui renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\cos^3(kx)$.
    La fonction cos est disponible dans la bibliothèque numpy.

Partie III : Et si l'on tirait un peu sin et cos de leurs sommes...

Soient α et β deux réels tels que : $0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

12. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq |\text{Re}(z)|$ et $|z| \geq |\text{Im}(z)|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(r_1, r_2..., r_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, et soit $(\theta_1, \theta_2..., \theta_n) \in [\alpha\ ;\beta]^n$. Enfin, soient n nombres complexes $z_1, z_2, ..., z_n$ définis par : $\forall k \in [\![1,\ n]\!]$, $z_k = r_k e^{i\theta_k}$.

13. Est-il exact d'affirmer : « pour tout $k \in [\![1,\ n]\!]$, un argument de z_k appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;\beta]$ » ?
14. Pour tous réels a, et b, on note $\max(a,b)$ le plus grand de ces deux réels.
    Dans le cas $a = b$, on a tout simplement : $max(a,b) = a = b$.
    Montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\max\big(\sin(\alpha),\cos(\beta)\big)\sum_{k=1}^{n}|z_k| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|z_k| .$$

Mots-clés

Sommes, trigonométrie, complexes, inégalité triangulaire, coefficients binomiaux, formules d'Euler, binôme de Newton.

Vocabulaire des applications

Thèmes abordés : Vocabulaire des applications, réels, complexes.
Temps de résolution : 1 h 30 min

Énoncé :

Exercice 1 : Un peu dans $\mathbb{C}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$.
2. Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$ est surjective. Est-elle bijective ?
3. Soit l'application $P : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 + z + 1 \end{array}$. P est-elle injective ? surjective ?
4. On admet qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bijective. Montrer qu'il existe une application $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ bijective.

Exercice 2 : Un peu dans $\mathbb{R}$

1. Soit l'application $f : \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{3}\right\} \longrightarrow F$ définie par $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x+7}$. On admet que f est bijective. Déterminer F ainsi que la bijection réciproque de f.
2. Soit $g : \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\}$ définie par $g(x) = \dfrac{3x+4}{x-3}$.
   a) Justifier que cela définit bien une application.
   b) Déterminer $g \circ g$. En déduire que g est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.
3. Soit l'application $h : \begin{array}{ccc} [1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{array}$.
   Montrer que h est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Mots-clés

Applications, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, applications injectives, surjectives, bijectives, composées.

Devoir 10

Combinatoire et dérangements

Thèmes abordés : Vocabulaire des applications, dénombrement, méthodes de calcul.
Temps de résolution : 3 h

Énoncé :

Questions préliminaires :

1. Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k < n$. Sans recours aux factorielles, montrer que : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. *On pourra considérer un ensemble E de cardinal $n+1$ et un élément x fixé de cet ensemble.*
2. Montrer que pour tous entiers naturels j, k et n tels que $j \leq k \leq n$, on a :
$$\binom{n}{k} \times \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \times \binom{n-j}{k-j}.$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} (-1)^j \times (k-j)! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (-1)^{n-j} \times j! \ .$$
On pourra transformer la double somme de gauche, en commençant par effectuer un changement d'indice dans la somme intérieure $\sum_{j=0}^{k} \ldots$

Partie I : Dénombrement d'applications

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient E et F deux ensembles tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.

4. Déterminer, en fonction de n et p, le nombre d'applications $f : E \longrightarrow F$.
5. Même question avec le nombre d'applications $f : E \longrightarrow F$ injectives.
6. Même question avec le nombre d'applications $f : E \longrightarrow F$ bijectives.
7. Dans cette question, on suppose que $n \geq 2$ et $p \geq 2$. Soit b un élément de F.
   a) Déterminer le nombre d'applications $f : E \longrightarrow F$ pour lesquelles b admet exactement deux antécédents.

b) Déterminer le nombre d'applications $f : E \longrightarrow F$ telles que $b \in f(E)$.

8. Déterminer le nombre de fonctions indicatrices définies sur E.

Les applications $f : E \longrightarrow E$ bijectives sont appelées permutations de E.

Partie II : Dérangements

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout ensemble E de cardinal n, il y a $n!$ permutations de E (terme défini en fin de partie I). Pour toute permutation f de E, et pour tout élément x de E, on dit que x est un point fixe de F si et seulement si $f(x) = x$. **Un dérangement de E est une permutation de E qui n'admet aucun point fixe.** On admet que le nombre de dérangements d'un ensemble fini ne dépend que du cardinal de cet ensemble. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut noter d_n le nombre de dérangements d'un ensemble de cardinal n. Par convention, $d_0 = 1$.

Dans la suite, on pourra librement utiliser le résultat suivant, auquel on se référera comme « propriété du raccourci » :

Soit $n \geq 2$, et E un ensemble de cardinal n. Soient a et b deux éléments fixés de E, avec $a \neq b$. Pour tout dérangement f de E tel que $f(a) = b$ et $f(b) \neq a$, notons f^* le dérangement de $E \backslash \{b\}$ tel que $f^*(a) = f(b)$ et : $\forall\ x \in E \backslash \{a, b\},\ f^*(x) = f(x)$. En notant D l'ensemble des dérangements de E, D' l'ensemble des dérangements de $E \backslash \{b\}$, et D_1 l'ensemble suivant : $D_1 = \{f \in D,\ f(a) = b \text{ et } f(b) \neq a\}$, on admet que l'application $r : \begin{array}{ccc} D_1 & \longrightarrow & D' \\ f & \longmapsto & f^* \end{array}$ est bijective.

9. Déterminer d_1, d_2, et d_3.

10. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra partitionner les permutations de E (de cardinal n) selon leur nombre de points fixes.*

11. Une permutation d'un ensemble E de cardinal n peut-elle posséder exactement $n - 1$ points fixes ?

12. Démontrer par récurrence forte que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: « $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ » est vraie.

13. Pour $n \geq 2$, considérons un ensemble E de cardinal $n + 1$, et un élément b fixé de cet ensemble.

a) Montrer que le nombre de dérangements f de E vérifiant la condition $f(b) = f^{-1}(b)$ est égal à nd_{n-1}.

b) Montrer que le nombre de dérangements f de E vérifiant la condition $f(b) \neq f^{-1}(b)$ est égal à nd_n.

14. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

15. Redémontrer alors le résultat de Q12 par récurrence double.

16. [Informatique] Un enseignant d'une classe de 25 élèves veut que ces derniers se corrigent eux-mêmes leurs copies du dernier devoir. Chaque élève doit corriger une et une seule copie d'un autre élève (donc pas la sienne), sans que cela ne se fasse nécessairement par binômes (le nombre impair d'élèves ne le permettant pas de toute façon). Le script suivant est censé renvoyer le nombre de répartitions possibles, mais il est erroné. Expliquer l'erreur et la corriger : *Le symbole # précède des commentaires.*

```
d_passé = 1                                    #valeur de d_0
d_présent = 0                                  #valeur de d_1
for k in range(1, 25) : #le premier k est 1, et le dernier 24
   d_présent = k*(d_présent + d_passé)
   d_passé = d_présent
print(d_présent)
```

Mots-clés

Dénombrement, coefficients binomiaux, sommes, cardinaux, applications, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image directe, applications injectives, surjectives, bijectives.

Lapins, abeilles, et suites usuelles

Thèmes abordés : Suites usuelles sous toutes les coutures, prétextes animaliers à l'appui.
Temps de résolution : 2 h

Exercice 1 :

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, u_0, a et b.
2. Soit la suite w définie par $w_0 = 1$ et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{3}{w_n^3}$.
   On admet que (w_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$. Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.

Exercice 2 : Les lapins de Fibonacci

Dans son *Liber Abaci*, le mathématicien médiéval Léonard de Pise, dit Fibonacci, pose la question suivante : à partir d'une paire (couple mâle/femelle) initiale de lapins, combien de paires de lapins peuvent être produites en un an si chaque mois, chaque paire engendre une autre paire qui, à partir du deuxième mois*, devient productive à son tour ?
*c'est-à-dire à partir du mois suivant son mois de naissance
On admet que chaque lapin ne se reproduit qu'avec l'autre lapin de sa paire.
Pour tout entier naturel n, on note F_n le nombre total de paires qui ont été produites jusqu'au mois n compris. Ainsi, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ (considérant que la paire initiale est productive à partir du mois 1).

1. Justifier qu'un tel modèle donne la relation : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_{n+2} = (-1)^{n+1}$.
3. Montrer sans raisonner par récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
4. Déterminer l'expression générale de F_n en fonction de n.
5. Fibonacci remarque qu'en réalité : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = 4F_{n+1} - 4F_n$. Déterminer la nouvelle expression générale de F_n, et répondre à la question de Fibonacci dans ce nouveau modèle.

Exercice 3 :

Une colonie d'abeilles, dont la population est supposée constante, dispose de trois ruches A, B, et C. Au jour 0, toute la population de la colonie se situe dans la ruche A. Pour chaque entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les proportions de la population totale qui se situent respectivement dans les ruches A, B, et C le jour n. Ainsi, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

Pour tout entier naturel n, $\frac{3}{4}$ des abeilles présentes dans la ruche A le jour n y restent le jour $n+1$, et le quart restant rejoint la ruche B. La moitié des abeilles présentes dans la ruche B le jour n y reste le jour $n+1$, tandis qu'un quart rejoint la ruche A, et le quart restant rejoint la ruche C. Enfin, les abeilles ne quittent jamais la ruche C.

À long terme, on souhaite que la colonie migre vers la ruche C.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Que dire de la suite $(a_n + b_n + c_n)$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n. *On pourra s'intéresser à a_{n+2}, et on pourra poser $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ par commodité.*
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = \frac{5}{8}(\alpha^n + \beta^n) + \frac{\sqrt{5}}{8}(\beta^n - \alpha^n)$ et $4\alpha^{n+2} - 5\alpha^{n+1} + \frac{5}{4}\alpha^n = 4\beta^{n+2} - 5\beta^{n+1} + \frac{5}{4}\beta^n = 0$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\sqrt{5}}$.
5. Que dire de la migration souhaitée ?

Exercice 4 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 6u_{n+1} + 4u_n$. On introduit également la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ d_n = u_{n+1} - u_n$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} d_k$ en fonction de u_n.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de C_n et S_n.

Mots-clés

Suites réelles, méthodes de calcul, nombres complexes, raisonnement.