

Marie-Virginie Speller

De la Terminale au Supérieur

MATHÉMATIQUES

Tout pour bien démarrer
ses études d'économie-gestion

DUNOD

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'équipe d'édition pour son soutien, son écoute et sa confiance.

Merci en particulier à Maxine et à Matthieu avec qui ce fut un plaisir de travailler.

Je remercie également tous les élèves que j'ai pu accompagner au cours de leurs études. Leurs doutes et leurs questionnements m'ont permis d'insister sur les points qui posent le plus de problèmes aux étudiants à la sortie du lycée.

J'espère que cet ouvrage répondra aux attentes des futurs étudiants en sciences économiques.

Bon travail et belle rentrée à tous !

Marie-Virginie SPELLER

© Dunod, 2019
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN : 978-2-10-080196-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Introduction : Bienvenue à l'université !	V
--	----------

Partie 1 Outils mathématiques

1. Calcul mental.....	2
2. Calculs impliquant différents opérateurs	7
3. Développement et factorisation – Identités remarquables – Binôme de Newton.....	12
4. Équations.....	14
5. Systèmes d'équations	19
6. Inéquations.....	23
7. Systèmes d'inéquations	28
8. Polynômes du second degré	31
Je m'entraîne	36

Partie 2 Les fonctions d'une seule variable

9. Ensemble de définition d'une fonction	42
10. Axe et centre de symétrie d'une fonction.....	44
11. Périodicité d'une fonction.....	46
12. Les limites	48
13. La continuité et la dérivabilité d'une fonction.....	52
14. Tableau des dérivées	55
15. Plan d'une étude de fonction et théorèmes importants.....	59
16. Les fonctions de référence	66
17. Les fonctions valeur absolue et partie entière	72
18. Les fonctions logarithme et exponentielle de base a	76
19. Les fonctions circulaires et circulaires réciproques	81
Je m'entraîne	93

Partie 3 Intégration

20. Les primitives	104
21. Les intégrales.....	108
22. Les équations différentielles.....	113
Je m'entraîne	118

Partie 4 Les suites

23. Les suites arithmétiques et géométriques.....	124
24. Le comportement d'une suite	128
25. Les suites récurrentes.....	132
Je m'entraîne	139

Partie 5 Les nombres complexes

26. Généralités sur les nombres complexes	146
27. Les nombres complexes et la géométrie	154
Je m'entraîne	161

Partie 6 Les Matrices

28. Vecteurs et rappels de géométrie.....	166
29. Les matrices	175
30. Les matrices carrées	179
Je m'entraîne	190

Partie 7 Probabilités et Statistiques

31. Les statistiques descriptives	198
32. Le dénombrement.....	204
33. Les probabilités conditionnelles	208
34. Les principales lois discrètes	212
35. Les principales lois continues.....	218
36. Récapitulatif lois discrètes et lois continues	223
Je m'entraîne	229

Introduction : Bienvenue à l'université !

Tout d'abord FÉLICITATIONS à vous qui êtes devenu bachelier ! Bravo !

Avant de consulter cet ouvrage nous vous invitons à lire ces quelques lignes en guise d'introduction car vous entrez dans un nouvel univers, la « fac » ! Comme vous pourrez le découvrir, l'université est bien différente du lycée.

À qui s'adresse ce livre ?

Cet ouvrage regroupe les notions de lycée à maîtriser parfaitement en mathématiques pour entrer en licence d'économie. Même s'il s'agit d'« économie », les mathématiques et les statistiques y sont très représentées et ont souvent un gros coefficient.

Ce livre est un « compagnon » qui vous aidera à appréhender les chapitres traités en TD et en amphithéâtre. Certaines pages anticipent le programme pour faciliter la compréhension des différents raisonnements et thèmes abordés.

Une nouvelle forme d'évaluation

Vous aviez l'habitude, au lycée, d'être évalué par des interrogations et des contrôles fréquents. À l'université, vous aurez seulement un à deux contrôles continus par semestre et par matière. Des partiels ont également lieu en milieu et en fin d'année scolaire. Vous devez donc travailler de manière régulière pour ne pas accumuler trop de retard et vous retrouver débordé la veille des partiels !

Quelle attitude adopter à l'université ?

• Travaillez régulièrement !

Avec la masse de nouvelles informations que vous allez devoir digérer au cours de la semaine, vous ne pouvez pas vous permettre de travailler par intermittence. Sinon vous serez vite perdu et accumulerez trop de retard.

Prenez l'habitude de lire vos notes prises au cours de la journée tous les soirs en rentrant chez vous. Notez les différents points que vous ne saisissez pas bien et n'hésitez pas à aller voir vos professeurs pour leur poser des questions.

• Entraidez-vous !

Prêtez vos cours aux absents, expliquez ce que vous avez bien compris à ceux qui ont des difficultés, travaillez avec vos camarades de TD, etc. Vous avancez, en effet, beaucoup

plus rapidement en expliquant aux autres et en leur posant des questions plutôt qu'en travaillant tout seul dans votre coin.

- **Sortez et faites-vous des amis !**

Ne faites pas que travailler avec les personnes de votre promotion, sortez, allez au cinéma, allez au théâtre, allez voir des expositions, pratiquez un sport, etc. Organisez-vous aussi des dîners de TD. Le but est de partager autre chose que la vie purement scolaire avec vos camarades.

- **Rassurez-vous !**

Il se peut que vous entendiez beaucoup de commentaires décourageants sur l'université : « il y a beaucoup d'échec », « c'est très difficile si tu n'as suivi telle ou telle filière », etc. De quoi vous miner le moral. Mais considérez les choses du bon côté :

- vous avez choisi cet enseignement et vous avez obtenu votre baccalauréat. C'est tout de même une très bonne nouvelle !
- vous allez travailler sur des thèmes qui vous plaisent *a priori* ;
- vous allez découvrir un nouvel univers très différent du lycée ;
- même si les deux premières années sont plutôt généralistes, vous pourrez choisir, au cours de vos études, des options qui correspondent davantage à vos goûts et préférences.

- La fin de l'année... premier bilan

- Vous êtes admis deuxième année ! BRAVO et bonne chance pour la suite !
- Vous n'êtes pas reçu en deuxième année. Deux solutions s'offrent à vous : redoubler ou changer de filière :
 - dans le cas d'un redoublement, vous bénéficiez d'une certaine avance sur le programme et disposez donc davantage de temps libre. Profitez-en pour perfectionner votre anglais, apprendre une autre langue étrangère, apprendre à jouer d'un instrument de musique, chercher un job étudiant, etc.
 - si vous souhaitez vous réorienter, demandez conseil à vos professeurs : certaines passerelles existent et une réorientation est possible. Consultez, si vous en ressentez le besoin, une conseillère d'orientation. Rendez-vous aussi aux portes ouvertes des écoles de commerce post-bac et des autres universités, etc. Certaines recrutent au niveau bac + 1.
- En aucun cas, cette non-admission en deuxième année ne constitue un échec. Vous avez découvert un autre monde que le lycée, rencontré de nouvelles personnes et avez acquis de nouvelles notions. Vous pourrez ainsi réussir brillamment dans d'autres filières.

« Rire souvent et beaucoup ; gagner le respect des gens intelligents et l'affection des enfants ; savoir qu'un être a respiré plus aisément parce que vous avez vécu. C'est cela réussir sa vie. »

Ralph Waldo Emerson

À ma famille de cœur

Partie



Outils mathématiques

1 Calcul mental

1. Je fais le point sur mes connaissances

a. Opérateurs utilisés dans le dénombrement

Factorielles

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800

ASTUCE : SIMPLIFICATION DE FACTORIELLES

$$n! = n \times (n-1)! \text{ ainsi } \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

Exemples

$$10! = 10 \times 9!$$

$$\frac{8!}{7!} = \frac{8 \times 7!}{7!} = 8$$

Combinaisons

La combinaison de k éléments parmi n est le nombre de manières de choisir simultanément k éléments parmi n . Pour $n \geq k$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Triangle de Pascal $\binom{n}{k}$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5
2	0	0	1	3	6	10
3	0	0	0	1	4	10
4	0	0	0	0	1	5
5	0	0	0	0	0	1

À RETENIR

$$\binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{1} = n ; \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ pour } n < k$$

Arrangements

L'arrangement de k éléments parmi n est le nombre de manières de choisir k éléments parmi n successivement et sans remise. Pour $n \geq k$:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k! \times \binom{n}{k}$$

b. Sommes

	Sommer $(n+1)$ fois la même constante a	Somme des $(n+1)$ premiers entiers	Somme des $(n+1)$ premiers entiers élevés au carré	Somme des $(n+1)$ premiers entiers élevés au cube
Type de somme	$\sum_{k=0}^n a = (n+1) \times a$	$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

ASTUCE : COMMENT OBTENIR LE NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME ?

Il suffit de soustraire l'indice du dernier terme à celui du premier et d'ajouter 1.

Ainsi pour une somme commençant à $k = p$ et finissant à $k = n$ (avec $n \geq p$), il y a $(n - p + 1)$ termes.

Exemple

Dans la somme $\sum_{k=5}^{12} k$, il y a $12 - 5 + 1 = 8$ termes.

2. Je mémorise les mots clés

Carré

Élever un nombre au carré revient à le multiplier par lui-même : $x^2 = x \times x$.

Chiffre

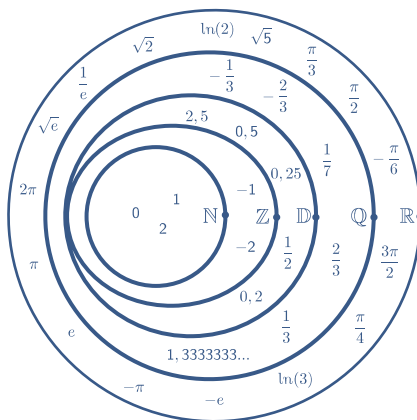
Un chiffre est un symbole permettant d'écrire des nombres. Il y a 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Cube

Élever un nombre au cube revient à le multiplier par lui-même à deux reprises :

$$x^3 = x \times x \times x.$$

Ensemble de nombres



Entiers naturels

Un entier naturel est un nombre positif permettant de dénombrer les objets ou choses. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots\}$.

Exemples

- 1 et 2 sont des entiers naturels.

Entiers relatifs

Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$.

Exemples

- 1 et 5 sont des entiers naturels.

Factorielle

La factorielle d'un entier naturel n est le produit des nombres entiers compris entre 0 et n . $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Nombre

Un nombre est formé de plusieurs chiffres. Il existe une infinité de nombres.

Nombres décimaux

Un nombre décimal a une écriture décimale finie. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples

- 0,5 et 1,25 sont des nombres décimaux.

Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre décimal ayant une écriture décimale périodique. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

- $\frac{1}{3}$ et 1,33333... sont des nombres rationnels.

Nombres réels

Un nombre réel est représenté par une partie entière et une série finie ou infinie de décimales. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemples

$\frac{1}{3}$; 1 ; 0,5 ; π ; $\sqrt{2}$ sont des réels.

REMARQUE

L'ensemble des nombres réels regroupe les nombres entiers (naturels et relatifs), les nombres décimaux et les nombres rationnels.

Puissance

Élever un nombre à une certaine puissance n revient à le multiplier par lui-même à $(n - 1)$ reprises.

3. Ai-je bien compris le cours ?

Question 1 : $\binom{5}{2} = ?$

- ☐ A. 1 ☐ B. 2 ☐ C. 5 ☐ D. 10

Question 2 : $\sum_{k=0}^{10} k = ?$

- ☐ A. 10 ☐ B. 11 ☐ C. 55 ☐ D. 110

Question 3 : $\sum_{k=0}^{10} k^3 = ?$

- ☐ A. 3 025 ☐ B. 2 025 ☐ C. 550 ☐ D. 110

Question 4 : $\sum_{k=0}^{10} 2^k = ?$

- ☐ A. 2 048 ☐ B. 2 047 ☐ C. 550 ☐ D. 11

Question 5 : $\sum_{k=3}^{10} 1 = ?$

- ☐ A. 7 ☐ B. 8 ☐ C. 9 ☐ D. 10

4. Je vérifie mes résultats

1. Réponse D. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{120}{2 \times 6} = \frac{120}{12} = 10.$

2. Réponse C. $\sum_{k=0}^{10} k = \frac{10(10+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = \frac{110}{2} = 55.$

REMARQUE

- Dans cette somme, il y a $10 - 0 + 1 = 11$ termes.

3. Réponse A. $\sum_{k=0}^{10} k^3 = \left(\frac{10(10+1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 = \left(\frac{110}{2} \right)^2 = 55^2 = 3\,025.$

REMARQUE

Pour calculer le carré de 55, vous pouvez utiliser l'astuce évoqué précédemment :

$55^2 = 3\,025$, en effet :

$$\left. \begin{array}{l} 5 \times (5 + 1) = 5 \times 6 = 30 \\ 5^2 = 25 \end{array} \right\} 55^2 = 3\,025.$$

4. Réponse B. $\sum_{k=0}^{10} 2^k = 2^0 \times \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = 1 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{1-2^{11}}{-1} = 2^{11} - 1 = 2\,048 - 1 = 2\,047.$

REMARQUE

- Dans cette somme, il y a $10 - 0 + 1 = 11$ termes.

ASTUCE

Apprenez bien vos puissances de 2 : $2^{10} = 1\,024$ donc

$$2^{11} = 2 \times 2^{10} = 2 \times 1\,024 = 2\,048$$

5. Réponse B. $\sum_{k=3}^{10} 1 = 1 + \dots + 1 = 1 \times 8 = 8.$

REMARQUE

Dans cette somme, il y a $10 - 3 + 1 = 8$ termes.

ASTUCE

Sommer n fois une même constante revient à la multiplier par n . Dans cette question la constante 1 est sommée 8 fois.