

Aluizio de Freitas Carvalho Filho

**MÉTODO DE VOLUMES FINITOS
APLICADO À CONDUÇÃO DE CALOR
Uma abordagem com Python**

2ª Edição
- Revista e Ampliada -

São Luís
Edição do Autor
2021

A utilização comercial de qualquer parte desta publicação é terminantemente proibida. A utilização de qualquer parte deste livro para fins de publicações científica deve realizar o reconhecimento ou menção autoral da presente publicação.

Freitas-Carvalho, A. F.;

Método de Volumes Finitos Aplicado à Condução de Calor:
uma abordagem com Python / Aluizio de Freitas Carvalho Filho.

– 2ª edição. São Luís: Edição do autor, 2021.

272 p.

ISBN 978-65-00-22317-0

1. Condução de calor. Transferência de calor 2. Matemática
computacional. Análise numérica. I. Título.

CDD: 519.4

CDU: 536.2

Em caso de dúvidas, sugestões e outros assuntos, fale com o autor pelo email:
python4science@gmail.com

MÉTODO DE VOLUMES FINITOS APLICADO À CONDUÇÃO DE CALOR

Uma abordagem com Python

*Com problemas práticos resolvidos detalhadamente
e exercícios propostos com solução e código computacional*

Aluizio de Freitas Carvalho Filho

Mestre em Engenharia de Materiais pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão

Bacharel em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual do Maranhão

Licenciado em Formação Pedagógica – Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul

2^a Edição
2021

“Although this may seem a paradox, all exact science is dominated by the idea of approximation.”

Bertrand Russell (1872-1970)

DEDICATÓRIA

Dedico à minha família, aos meus preciosos pais Aluizio e Sandra, meus tão queridos irmãos Dionatan e Anívia, e a minha amada esposa Marta. E, ao Criador de Tudo.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Jorge Passinho, que foi o primeiro professor a me convidar para um estudo científico, por todos os ensinamentos, incentivo e amizade ao longo desses anos.

Ao meu grande amigo Ivaldo Guimarães, de longos anos de amizade, que com proeminente erudição e sensatez me encorajou e aconselhou várias vezes.

Agradeço ao professor e estimado amigo Paulo Sérgio pelo incentivo em manter os estudos e continuar aprimorando os conhecimentos na área de métodos numéricos. E pela amizade da qual tenho sempre boas lembranças.

Ao professor André Santana pelo apoio e divulgação da edição anterior do livro e pela amizade.

Aos amigos e colegas que ajudaram na divulgação da primeira edição.

Agradeço aos leitores que compraram a primeira edição, os que entraram em contato, os que deram sugestões e todos aqueles que recomendaram o livro permitindo que a obra fosse conhecida por mais pessoas.

APRESENTAÇÃO

Sinto-me honrando e satisfeito em apresentar a segunda edição do livro MÉTODO DE VOLUMES FINITOS APLICADO À CONDUÇÃO DE CALOR: Uma abordagem com Python. Nesta edição revista e ampliada, o livro chega ao leitor com uma aparência muito mais elegante e agradável.

A presente obra, como eu já havia dito na edição anterior, foi competentemente escrita pelo engenheiro mecânico e poeta Aluizio de Freitas Carvalho Filho que conheci anos atrás quando fui ministrar um curso de férias, da disciplina de transferência de calor. Tive o privilégio de orientá-lo no seu trabalho de conclusão de curso e me orgulho em tê-lo tido como aluno. O respeito, a amizade e admiração se tornaram cada vez mais sólidas ao longo dos anos nos quais realizamos além de muitos experimentos científicos, jogamos várias partidas de xadrez, tivemos incontáveis conversas e tomamos muitas xícaras de café. Bom, vamos voltar à descrição do livro.

A facilidade ao acesso de computadores por essa geração e com a disponibilidade gratuita de linguagens de alto nível, permitiu mudar a forma de resolver os problemas de engenharia, fazendo uso das simulações. Nesse caminho, o autor aborda problemas de transferência de calor por condução empregando simulações utilizando uma linguagem bastante utilizada nos meios acadêmicos que é o Python. Contudo, em cada solução dos problemas apresentados há uma modelagem matemática bem detalhada baseada nas leis de conservação.

O livro foi escrito obedecendo uma sequência para facilitar a leitura e o aprendizado dos assuntos a serem estudados e conta com 10 capítulos assim distribuídos:

Capítulo 1: é uma introdução, nesse capítulo encontramos o porquê utilizar o Método de Volumes Finitos (MVF), comparando-o com o Método de Diferenças Finitas (MDF) e Método de Elementos Finitos (MEF), fazendo uma contextualização da aplicação de métodos computacionais para resolver problemas de engenharia. O autor também descreve o que levou a escolher a linguagem Python para ser utilizada nas simulações desse livro.

Capítulo 2: aborda os princípios físicos que são sempre utilizados na modelagem desses problemas térmicos, que são as leis da conservação, e as equações empregadas.

Capítulo 3: trabalha com a equação da difusão do calor bidimensional em regime permanente. Contém também as técnicas básicas de discretização de equações diferenciais por volumes finitos.

Capítulo 4: inicia apresentando os tipos de configuração de volumes para análise das fronteiras e, as condições de contorno utilizadas nesses casos. Também são apresentadas as situações que podem ocorrer nas fronteiras e os tipos de volumes discretos que podem ser utilizados nas bordas do domínio analisado. Aqui são resolvidos os primeiros problemas de transferência de calor com detalhamento dos procedimentos para solucioná-los.

Capítulo 5: apresenta os modos e as estratégias de programação a partir do caso mais simples, condução de calor unidimensional, a fim de preparar melhor o leitor para as soluções em duas dimensões, que requer uma análise mais complexa, com todos os algoritmos bem detalhados e as soluções gráficas para facilitar o entendimento.

Capítulo 6: resolve-se problemas em coordenadas polares, dado que é muito comum nos problemas de transferência de calor por condução nos depararmos com geometrias curvas, com isso é mais conveniente trabalhar com coordenadas polares, que permite uma abordagem simplificada e um melhor tratamento matemático da geometria.

Capítulo 7: descreve as equações parabólicas para tratar do caso geral da transferência de calor por condução em regime transiente e a partir dela deduzir as equações para utilizar os métodos explícitos, implícitos e Crank-Nicolson.

Capítulo 8: familiariza o leitor às condições de contorno em regime transiente.

Capítulo 9: faz uma abordagem concisa da difusão em malhas não ortogonais e malhas não-estruturadas para que o leitor possa ter uma noção básica do processo de discretização em geometrias complexas.

Capítulo 10: há uma abordagem diferenciada do método para solucionar outros problemas em engenharia como difusão atômica na cementação de aços e o problema da radiação solar sobre superfícies envolvendo modelos climáticos. E, todos os problemas estão com soluções em códigos em Python comentados.

Acredito que foram abordados todos os tópicos relevantes da condução de calor em sólidos.

Ao final de cada capítulo o leitor encontrará uma lista de exercícios propostos sobre os temas abordados, que o permitirá exercitar o que foi estudado, e as referências de cada capítulo para um futuro aprofundamento sobre o tema. E, no apêndice há um conjunto completo de algoritmos dos problemas propostos descrito no livro.

Com todos esses requisitos com os quais o livro foi escrito, estou convicto que ele será de grande ajuda no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de transferência de calor, como também muito útil no ensino de modelagem e simulação da física que descreve esses fenômenos. Recomendo o estudo e o ensino dos textos que compõe esse livro, não só para os estudantes de engenharia e de física, mas também para engenheiros e físicos que são apaixonados pelo assunto. Deixo aqui meus parabéns ao engenheiro Aluizio de Freitas, com toda transferência de calor que a amizade precisa para aquecer.

Prof. Me. Jorge de Jesus Passinho e Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: *Introdução*

1.1 Por que o Método de Volumes Finitos?	17
1.2 A Linguagem Python.....	19
1.3 Tipos de Malha.....	20
1.4 Classificação das Equações Diferenciais Parciais	23
1.4.1 Equações Elípticas	24
1.4.2 Equações Parabólicas	24
1.4.3 Equações Hiperbólicas	24

CAPÍTULO 2: *A Equação Geral da Conservação*

2.1 Equação da Conservação.....	27
2.2 Outras Equações da Conservação.....	30
2.2.1 Equação da Conservação da Energia Térmica	31
2.2.2 Equação da Conservação da Massa	31
2.2.3 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento	32
2.2.4 Equação de Transporte de Massa de uma Espécie Química	33

CAPÍTULO 3: *Condução 2D em Regime Permanente*

3.1 A Equação da Difusão do Calor	35
3.2 Discretização da Equação.....	36

CAPÍTULO 4: *Condições de Contorno*

4.1 Condições de Contorno e Tipos de Fronteiras.....	41
4.2 Pontos Sobre a Fronteira	42
4.2.1 Condição de Dirichlet – Temperatura Fixada	42
4.2.2 Condição de Neumann – Fluxo Definido	43
4.2.3 Condição Mista – Convecção na Fronteira.....	45
4.3 Balanço nos Volumes de Fronteira.....	50
4.3.1 Condição de Dirichlet – Temperatura Fixada	51
4.3.2 Condição de Neumann – Fluxo Definido	53
4.3.3 Condição Mista – Convecção na Fronteira.....	54
4.4 Volumes Fictícios.....	58
4.4.1 Condição de Dirichlet – Temperatura Fixada	59

4.4.2	Condição de Neumann – Fluxo Definido	60
4.4.3	Condição Mista – Convecção na Fronteira.....	61
4.5	Discussão Sobre os Métodos de Aproximação para os Contornos	64
4.6	Múltiplas Condições nas Fronteiras	65

CAPÍTULO 5: *Introdução à Programação: Geração de Malha e Solução*

5.1	Introdução	73
5.2	Condução Unidimensional.....	73
5.3	Condução Bidimensional.....	82
5.3.1	Programação para PSF e BVF	83
5.3.2	Programação para VF	92

CAPÍTULO 6: *Difusão em Regime Permanente em Coordenadas Polares*

6.1	Introdução	101
-----	------------------	-----

CAPÍTULO 7: *Difusão Unidimensional em Regime Transiente*

7.1	Introdução	125
7.2	Método Explícito	132
7.3	Método Implícito	133
7.4	Método Crank-Nicolson	134
7.5	Discretização em Duas e Três Dimensões.....	135

CAPÍTULO 8: *Condições de Contorno em Regime Transiente*

8.1	Introdução à Fronteira.....	141
8.2	Pontos sob a Fronteira.....	141
8.2.1	Temperatura Prescrita.....	142
8.2.2	Fluxo Prescrito	142
8.2.2.1	Método Explícito.....	143
8.2.2.2	Método Implícito.....	144
8.2.3	Convecção na Fronteira	144
8.2.3.1	Método Explícito.....	145
8.2.3.2	Método Implícito.....	145
8.3	Balço nos Volumes da Fronteira	146
8.3.1	Temperatura Prescrita.....	147
8.3.1.1	Método Explícito.....	147

8.3.1.2 Método Implícito.....	148
8.3.2 Fluxo Prescrito	149
8.3.2.1 Método Explícito.....	149
8.3.2.2 Método Implícito.....	150
8.3.3 Convecção.....	150
8.3.3.1 Método Explícito.....	151
8.3.3.2 Método Implícito.....	152
8.4 Volumes Fictícios.....	153
8.4.1 Temperatura Prescrita	153
8.4.2 Fluxo Prescrito	153
8.4.3 Convecção.....	154

CAPÍTULO 9: *Malhas Não Ortogonais e Malhas Não-Estruturadas*

9.1 Introdução	165
9.2 O Volume Infinitesimal.....	165
9.3 O Fluxo Através da Face Compartilhada	166
9.4 Análise dos Gradientes.....	170
9.5 Determinação do Gradiente Secundário	171
9.6 Malha por Triangulação de Delaunay	173
9.7 Malhas de Voronoi.....	175

CAPÍTULO 10: *Tópicos Especiais*

10.1 Introdução.....	181
10.2 Difusão de Massa	181
10.3 Transferência por Radiação.....	186
10.3.1 Coeficiente Combinado de Transferência de Calor.....	186
10.3.2 Método Implícito com o Coeficiente Equivalente.....	187
10.4 Modelos Climáticos e Condições de Contorno Variáveis.....	192
10.4.1 Modelo da Temperatura Horária	193
10.4.2 Transferência por Radiação Solar e Atmosférica.....	195
10.5 Aplicando e Ampliando o Conhecimento.....	203

APÊNDICE	205
-----------------------	-----

Código 01: Exercício proposto 5.1	207
---	-----

Código 02: Exercício proposto 5.2.....	209
Código 03: Exercício proposto 5.3.....	211
Código 04: Exercício proposto 5.4.....	214
Código 05: Exercício proposto 5.6.....	216
Código 06: Problema prático 4.2.....	221
Código 07: Exercício proposto 6.1.....	226
Código 08: Exercício proposto 6.2.....	228
Código 09: Problema prático 8.1 – solução analítica.....	230
Código 10: Problema prático 8.1 – função zeta_n	231
Código 11: Exercício proposto 8.1 – regime transiente bidimensional..	232
Código 12: Algoritmo da malha não-estruturada	235
Código 13: Problema prático 10.1 – solução analítica	248
Código 14: Problema prático 10.3 – modelo da temperatura ambiente	249
Código 15: Problema prático 10.3 – modelo da radiação solar	250
Código 16: Problema prático 10.3 – função HourPlotAxis	251
Código 17: Função MCV para gerar malhas centroidais	252
Código 18: Função MCV_suporte que auxilia a Função MCV	257
Respostas dos Exercícios Propostos.....	263

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Por que o Método de Volumes Finitos?

Nas ciências exatas, nos deparamos com uma série de problemas físicos e matemáticos para os quais desejamos encontrar uma solução. E, é claro que o ideal seria sempre buscar uma solução exata. Contudo, muito em razão das dificuldades matemáticas, é frequente não existirem soluções exatas para as equações matemáticas que modelam muitos problemas.

Desta forma, como alternativa aos métodos analíticos, surgiram os métodos numéricos a fim de resolver equações que governam um dado fenômeno físico, tornando-as matematicamente mais simples. Esse processo se dá transformando o domínio contínuo do problema em um domínio discreto, onde uma equação diferencial de difícil solução é transformada em um sistema linear cujas equações podem ser facilmente resolvidas. Assim, teremos como solução do problema um conjunto finito de valores que se assentam sobre pontos específicos de uma região na qual chamamos de malha. À vista disso, é melhor encontrar a solução de um problema em um conjunto de pontos de interesse que buscar uma solução que abrange os infinitos pontos do domínio, mas que talvez nunca seja obtida. Além do mais, é possível escolher uma malha que contenha todos os pontos na qual se tenha interesse em conhecer o valor da propriedade estudada (temperatura, pressão, velocidade, concentração...).

Qualquer que seja o método numérico utilizado, sempre haverá um desvio entre a solução analítica e a solução numérica, isso se deve ao erro envolvido na solução numérica. O erro numérico pode ser devido ao erro de truncamento, ao erro de arredondamento e a uma composição dos dois.

O erro de truncamento é inerente a qualquer método numérico e está associado ao processo de formulação matemática do método para encontrar a solução através

da discretização das equações diferenciais quando os termos das derivadas são substituídos por termos de diferenças. Geralmente, este tipo de erro é minimizado com o refinamento da malha.

Já o erro de arredondamento é causado na utilização de computadores, uma vez que são utilizados números com algarismos significativos limitados, ou seja, as casas decimais (dígitos) sofrem arredondamentos já que a máquina não armazena ou trabalha com um número de infinitas casas. A capacidade de trabalhar com mais casas decimais (precisão) durante operações matemáticas pode ser alterada até certos valores, exigindo mais do processamento da máquina.

Um ponto fundamental acerca do erro encontrado em qualquer método é poder mensurá-lo. Para isso, pode ser feito uma análise de erro a fim de estimar o valor do erro absoluto e a propagação do mesmo. Em muitos casos, o erro encontrado em uma simulação computacional é tão pequeno que a precisão é de várias casas decimais após a vírgula.

Algumas aplicações de métodos numéricos ocorrem em situações em que experimentos reais não são adequados seja por conta de custos elevados, dificuldades de controlar as condições de contorno, dificuldades com instrumentos etc. Por exemplo, suponhamos que se deseje conhecer a temperatura da ferramenta de corte, utilizada num processo de usinagem, nas proximidades de sua aresta de corte. As dificuldades de realizar a medida numa região tão pequena e de difícil acesso faz com que os erros instrumentais de uma medida direta empregando algum equipamento possa ser maior que o erro número esperado para a simulação do processo.

Em engenharia, a simulação computacional é muito aplicada na fase de projeto, em especial quando elevado recurso financeiro e tempo de construção são necessários, quando erros devem ser minimizados, controlados ou, até mesmo, inexistentes. Na indústria, é muito aplicada em processos de otimização, quando se efetua o estudo da alteração de determinados parâmetros de algum processo a fim de melhorar o rendimento ou eficiência de um equipamento ou ciclo industrial sem a necessidade de comprometer a operação da fábrica com testes ou comprometer a segurança de operação.

Tudo isso que foi dito, é válido para qualquer método numérico, mas porque escolher o método de volumes finitos? Em primeiro lugar se deve ao fato deste

satisfazer os princípios da conservação em todos os níveis, global e discreto, diferente dos métodos de elementos finitos (MEF) e diferenças finitas (MDF) que podem não apresentar conformidade com este princípio no nível discreto, já que diferente do método de volumes finitos eles, nas suas formulações, não fazem emprego do conceito de volume de controle (VC).

A utilização da ideia de um volume de controle elementar faz com que o MVF tenha uma outra vantagem sobre o MEF e MDF que é a fácil interpretação dos conceitos físicos que estão associados à sua formulação matemática.

Quando falamos do MEF e MDF podemos dizer que eles possuem características diferentes pelas quais são escolhidos por engenheiros e matemáticos durante suas aplicações. Para não estender muito a nossa introdução, podemos dizer que o MVF é uma técnica que reúne, além do que já foi dito, benefícios de ambos os métodos: é adequado para solucionar problemas não lineares e habilitado à utilização de malhas para geometrias complexas.

1.2 A Linguagem Python

A linguagem Python reuni uma série de vantagens pelas quais foi escolhida para ser utilizada na implementação dos algoritmos de MVF. Além de ser uma linguagem de fácil aprendizado e utilização, Python é um software livre (Open Source)¹. E, embora seja gratuito, não deixa a desejar mesmo quando comparado com renomados softwares comerciais. É uma linguagem amplamente utilizada nas melhores universidades do mundo, e ganha espaço a cada dia tanto no meio acadêmico quanto empresarial.

As suas aplicações são incontáveis, vão desde ciência de dados, programação orientada a objetos, desenvolvimentos de games, softwares, sites etc. É claro que nosso foco está na computação científica (computational science) que consiste em criar modelos matemáticos associados a métodos numéricos para solucionar problemas científicos e de engenharia fazendo uso de computadores e técnicas de simulação.

¹ Pode ser baixado no site <https://www.python.org>

Para este livro, foi utilizado a versão Python 3.6 juntamente com o software Anaconda² que reúne um pacote completo com as principais bibliotecas da linguagem Python: NumPy, SciPy, Matplotlib, Tkinter entre outras. Além disso, há uma IDE (ambiente de desenvolvimento integrado)³ chamada Spyder que é um ambiente de trabalho, com vários recursos, excelente para produção e execução de algoritmos em Python, inclusive tem uma interface gráfica muito parecida com a do MATLAB.

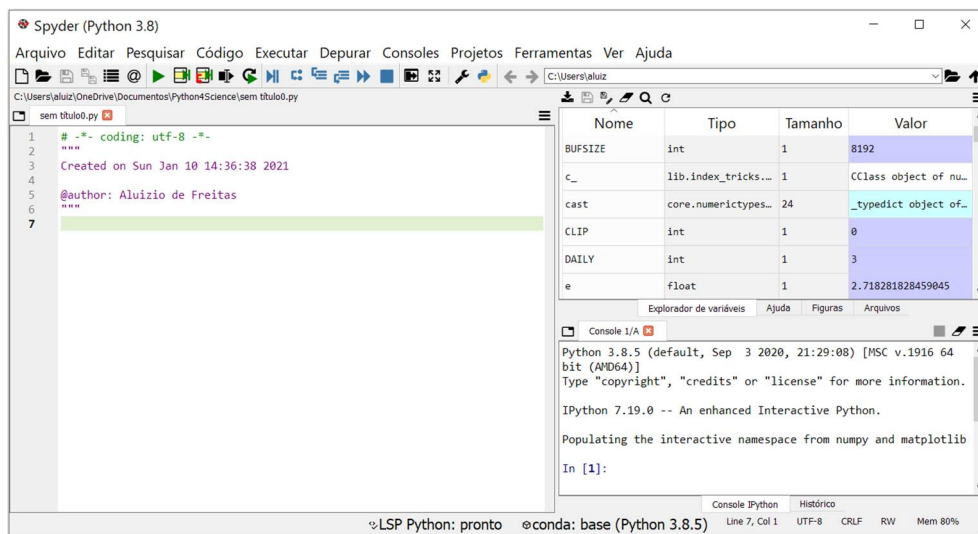


Figura 1.1 – Spyder IDE

Vale ressaltar que o foco deste livro é ensinar o método de volumes finitos para resolver problemas de condução de calor utilizando Python. Então, ainda que o leitor não programe em Python é conveniente que tenha noção de programação ou que já domine alguma linguagem. O ideal seria que dominasse ao menos os princípios mais básicos de Python. Na internet existe muitos livros bons e cursos gratuitos.

1.3 Tipos de Malha

Ao lidarmos com métodos numéricos, a ideia de discretização (dividir em elementos menores) não vale apenas em termos matemáticos, mas também em questões geométricas, principalmente em soluções de problemas físicos ou de

² Pode ser baixado no site <https://anaconda.org>

³ Em inglês *Integrated Development Environment*.

engenharia, onde a geométrica em questão é dividida, transformando-se em um conjunto finito de elementos que chamamos de malha.

Existem as mais variadas configurações para a malha de um mesmo problema, assim como os métodos para a construção das mesmas. O estudo da geometria e o tipo de problema é que definirá a forma mais adequada. Do ponto de vista de construção, as malhas podem ser divididas inicialmente como se mostra a seguir.

$$Malhas \rightarrow \begin{cases} \textit{Ortogonal} & \rightarrow \textit{Estruturada} \\ \textit{Não Ortogonal} & \rightarrow \begin{cases} \textit{Estruturada} \\ \textit{Não Estruturada} \end{cases} \end{cases}$$

Nas malhas ortogonais as linhas das mesmas se intersectam em ângulos de 90° , contrário das não ortogonais. Quando falamos de malhas ortogonais, muitos se limitam a pensar unicamente em coordenadas cartesianas, contudo é possível construí-las em outras coordenadas como a polar e a cilíndrica.

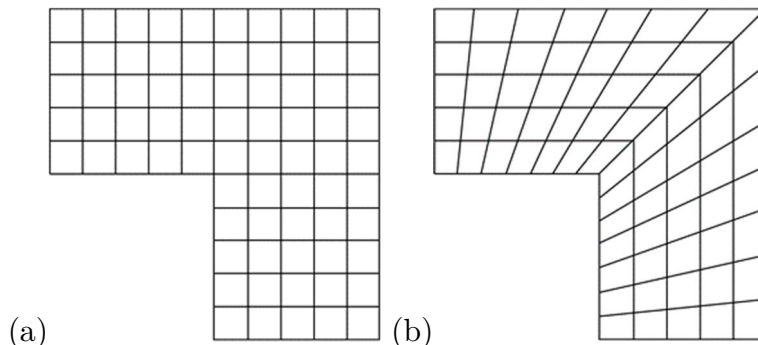


Figura 1.2 – (a) Malha ortogonal cartesiana. (b) Malha não ortogonal.

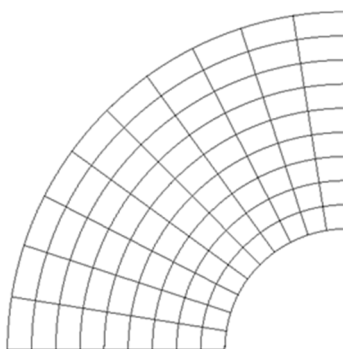


Figura 1.3 – Malha ortogonal em coordenada polar.

Outra divisão importante é a definição de estruturadas e não estruturadas. Quando os elementos de uma malha, excetuando os das fronteiras, apresentam o mesmo número de vizinhos, dizemos se tratar de uma configuração estruturada. Deste modo os volumes finitos estão ordenados de modo que sua numeração pode ser facilmente realizada, propiciando uma vantagem na implementação de uma rotina computacional.

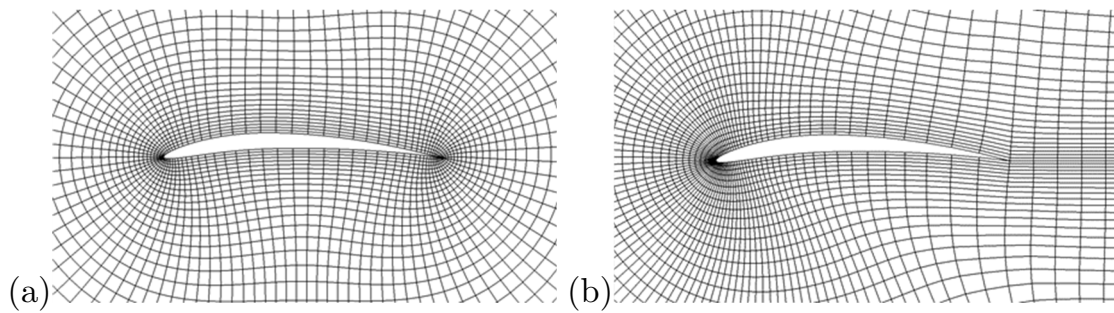


Figura 1.4 – Malha estruturada do NACA 6406 (a) tipo-O (b) tipo-C.

Já nas malhas não estruturadas, as células não têm restrições no número de vizinhos e nem na forma de suas células que são arranjadas com aparência aleatória, não apresentando um nível de organização fácil para a numeração dos volumes durante o processo computacional. A forma irregular dessas malhas permite que sejam capazes de se adaptar a qualquer forma geométrica por mais complexa que seja. É possível combinar em uma mesma estrutura elementos de formas distintas, por exemplo triângulos e quadriláteros para o caso 2D, são as chamadas malhas híbridas [8].

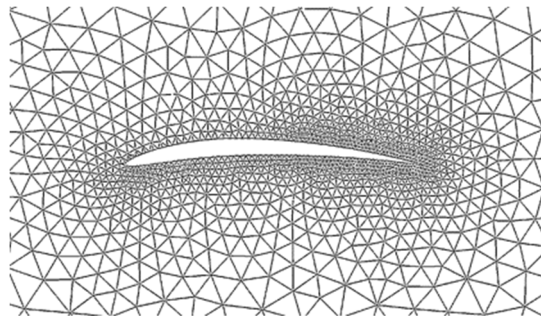


Figura 1.5 – Malha não estruturada do NACA 6406.

O assunto acerca das malhas é muito vasto e foge da temática principal deste livro. Então recomendamos ao leitor buscar livros mais específicos deste tema caso deseje aprofundar o conhecimento.

1.4 Classificação das Equações Diferenciais Parciais

Uma equação diferencial parcial (EDP) pode ser classificada em elíptica, parabólica e hiperbólica. Tomando como base a EDP genérica de segunda ordem e de duas variáveis como a equação (1.1), onde os coeficientes A , B , C , D , E , F e G são constantes ou função x e y apenas, sendo que as variáveis x e y não necessariamente representam variáveis espaciais.

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi = G \quad (1.1)$$

Vemos que esta pode ser categorizada segundo um discriminante ($B^2 - 4AC$) análogo ao de uma equação de segundo grau [3], tal que

$$B^2 - 4AC = \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \textit{Elíptica} \\ = 0 & \Rightarrow \textit{Parabólica} \\ > 0 & \Rightarrow \textit{Hiperbólica} \end{cases}$$

Nem todas as EDP são compatíveis com esta classificação, contudo, muitas das equações de relevâncias no mundo da ciência e engenharia satisfazem essa classificação. As equações elípticas, parabólicas e hiperbólicas descrevem fenômenos distintos e, conseqüentemente, apresentam comportamento com características peculiares. Desta forma, a classificação se deve ao intuito de facilitar a abordagem de problemas que exibem características análogas [1]. E, os métodos matemáticos que funcionam para uma categoria de equação podem não ser aplicáveis aos demais [2].

1.4.1 Equações Elípticas

São típicas aos problemas em que não há dependência com o tempo, que estão em estado de equilíbrio. Mas também podem aparecer em problemas com fenômenos em equilíbrio local e em situações na qual o equilíbrio ocorre muito rápido quando comparado com a escala de tempo na qual se modelou o problema [1].

Um exemplo desse tipo de equação ocorre fazendo os coeficientes $A = C = 1$ e $B = 0$, dando origem a equação de Laplace (1.2) que rege o comportamento dos escoamentos potenciais, na qual o escoamento do fluido é incompressível, invíscido e irrotacionais [2], [4].

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

1.4.2 Equações Parabólicas

O exemplo clássico deste tipo de problema é a equação da difusão de calor em regime transiente (1.3), onde temos $A = 1$ e $B = C = 0$ ⁴. Assim, a solução evolui ao longo da dimensão temporal, de modo que o valor de ϕ em um ponto do domínio espacial em certo instante, afetará o valor de ϕ no futuro. Isso remete a ideia de marcha.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

1.4.3 Equações Hiperbólicas

Estas equações ocorrem tipicamente na modelagem de problemas de propagação de uma perturbação como ocorrem em fenômenos ondulatórios (ondas sonoras, eletromagnéticas, de choque, gravitacionais...) e, também, em problemas

⁴ Onde $D = F = G = 0$ e $E = -1/\alpha$. Sendo y a dimensão temporal, substituída por t .

de advecção e convecção [7]. A equação da onda (1.4) pode ser obtida fazendo $A = 1$, $B = 0$ e $C = -1/c^2$, onde c é a velocidade de propagação da onda no meio.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Em um problema estacionário, aqueles com equação elíptica, a solução depende apenas das condições de fronteira, enquanto nos problemas transientes, cujas equações são parabólicas e hiperbólicas, necessitam além das condições de contorno de alguma condição inicial. Problemas de valor inicial (PVI) se devem a necessidade de se especificar um valor inicial à variável dependente no tempo inicial ($t = 0$) a fim de se obter uma única solução [2], [5], [6]. Assim, a solução evolui, marcha, a partir de tal valor inicial, e segundo as condições de fronteira que modelam o problema, de modo a obter o novo valor da variável dependente a cada passo no tempo.

Referências do Capítulo

- [1] LEVEQUE, Randall J.; Finite Diference Methods for Diferential Equations. 2005. p. 143-148.
- [2] FORTUNA, Armando de Oliveira. Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000. p. 49-69. ISBN 85-314-0526-2
- [3] UGAIL, Hassan. Partial Differential Equations for Geometric Design. United Kingdom: Springer, 2011. p. 25-26. ISBN 978-0-85729-783-9
- [4] YOUNG, Eutiquio C.; Partial Differential Equations: An introduction. Boston: Allyn & Bacon, 1972. p. 60-63.
- [5] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8^a ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006. p. 119. ISBN 85-216-1499-3
- [6] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais. 3^a ed. Vol. 1. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. p. 142-152. ISBN 85-346-1291-9
- [7] LEVEQUE, Randall J.; Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. p. 201. ISBN 978-0-898716-29-0
- [8] VERSTEEG, H.K.; MALALASEKERA, W.; An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. Second Edition. Harlow, United Kingdom: Pearson Education Ltd., 2007. p. 304-312. ISBN 0-978-0-13-127498-3.

CAPÍTULO 2

A Equação Geral da Conservação

2.1 Equação da Conservação

Os mais variados problemas físicos embora sejam regidos por fenômenos diferentes, como o escoamento do ar através das hélices de um avião ou a transferência de calor em reatores nucleares, de modo geral, todos, sem exceções, obedecem às leis de conservação. A equação aqui deduzida se trata de uma equação geral para todos os casos, tratada a partir da análise diferencial.

Suponhamos um volume de controle (VC) infinitesimal fixo que define uma região fechada no espaço, admitindo que este possua forma hexaédrica de faces paralelas com as dimensões $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ como mostrado na figura 2.1. Agora, seja ϕ uma grandeza qualquer (energia, quantidade de movimento etc.) por unidade de massa, ou seja, uma grandeza específica. A variação (acúmulo ou diminuição) de ϕ ao longo do tempo no volume de controle é igual ao fluxo líquido de entrada de ϕ no VC mais a geração líquida de ϕ interna ao VC [1-2].

$$\text{Variação de } \phi \text{ ao longo do tempo } \Delta t = \text{Fluxo líquido de entrada de } \phi \text{ no VC} + \text{Geração líquida de } \phi \text{ internamente ao VC} \quad (2.1)$$

A variação de ϕ ao longo do tempo t é dado por

$$(\rho\phi\Delta V)|_{t+\Delta t} - (\rho\phi\Delta V)|_t \quad (2.2)$$

Onde, ρ é a densidade do material que admitiremos como fluido e ΔV é o volume do VC que é definido por $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.