

Matemática para Concursos

“Os números governam o mundo.”

Platão

APRESENTAÇÃO

“Matemática Para Concursos” trata dos principais temas matemáticos explorados nos diversos concursos públicos de nível secundário. Aborda os conceitos essenciais de aritmética e álgebra, incluindo noções de Matemática Financeira e Estatística Descritiva.

O texto compõe-se de um resumo teórico dos principais tópicos, acompanhado de vários exemplos e problemas propostos, todos com resposta ao final do texto, sendo que muitos deles apresentam soluções completas.

Desejo verdadeiramente ao leitor que este trabalho contribua em muito para seu progresso profissional, habilitando-o a resolver com precisão as diversas questões matemáticas propostas nos concursos públicos.

Finalmente, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste texto, aí incluídos todos os meus professores (da escola primária à universidade).

O Autor

Críticas e sugestões:

www.clubedeautores.com.br

Índice

Seção 1 – Teoria dos Conjuntos.....	9
Seção 2 – Propriedades dos Números Naturais.....	16
Seção 3 – Expressões Numéricas e Algébricas.....	27
Seção 4 – Equações e Sistemas de Equações.....	39
Seção 5 – Progressões Aritméticas e Geométricas.....	49
Seção 6 – Proporcionalidade.....	58
Seção 7 – Matemática Financeira (I).....	74
Seção 8 – Matemática Financeira (II).....	83
Seção 9 – Estatística Descritiva	92
Seção 10 – Coletânea de Problemas	110
Apêndice: Logaritmos.....	133
Respostas as Problemas Propostos.....	136
Referências.....	160

Seção 1

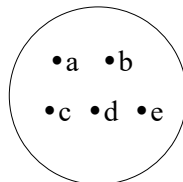
Teoria dos Conjuntos

- Um *conjunto* é uma coleção de elementos (objetos, pessoas, números, etc.) e será indicado por uma letra maiúscula do alfabeto.
- O *conjunto vazio*, indicado $\emptyset$, não possui elementos.
- Os conjuntos podem ser *finitos* ou *infinitos*, de acordo com o seu número de elementos.
- A pertinência de um elemento x a um conjunto A será indicada por $x \in A$, e a não pertinência será indicada $x \notin A$.
- Os conjuntos podem ser representados de três formas:

- (i) por *extensão* – os elementos do conjunto são listados entre chaves e separados por vírgula. Por exemplo, o conjunto dos dias da semana pode ser representado por: {segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado, domingo}.

Essa forma de representação pode ser usada também para conjuntos infinitos, enumerando-se alguns elementos e representando os demais com três pontos.

- (ii) por *compreensão* – os elementos do conjunto são identificados por uma propriedade que os caracteriza. Por exemplo, o conjunto das vogais poderia ser especificado por $A = \{ x / x \text{ é vogal} \}$, que se lê: ' A é o conjunto dos x tal que x é vogal'.
- (iii) por *Diagramas de Venn* – os elementos do conjunto são representados no interior de uma figura circular, chamada de Diagrama de Venn:



- Um conjunto A é dito *subconjunto* de um conjunto B , notação $A \subset B$, quando é vazio ou é formado de elementos pertencentes a B .

Exemplos:

(i) $A = \{1, 3, 5\}$ é subconjunto de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(ii) Se A representa o conjunto de todos os brasileiros e B representa o conjunto de todos os paulistas, então $B \subset A$.

- Dois conjuntos A e B são iguais se vale: $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, se todos os elementos de A pertencem a B e todos os elementos de B pertencem a A .

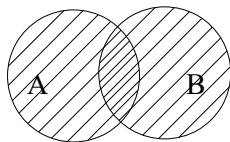
Exemplo: o conjunto $A = \{0, 1, 4, 2, 3, 1, 4, 5\}$ e o conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ são iguais.

- Chama-se *conjunto universo* U ao conjunto que contém todos os conjuntos sob consideração. Assim, por exemplo, se está se considerando os alunos de determinado curso em um colégio, o conjunto universo é constituído de todos os alunos do colégio.

- Chama-se *conjunto das partes* de um conjunto A ao conjunto de todos os subconjuntos de A , incluindo o conjunto vazio e o próprio conjunto A . Indica-se tal conjunto por $P(A)$. Assim, pode-se escrever $P(A) = \{X / X \subset A\}$, que se lê: 'o conjunto das partes de A é o conjunto formado dos conjuntos X tal que X está contido em A '.

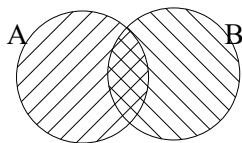
- Operações com conjuntos: sobre os conjuntos A e B , podem ser definidas as seguintes operações:

- *União* ($A \cup B$): é o conjunto formado dos elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos A ou B ;



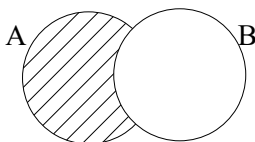
Toda a região hachurada representa $A \cup B$.

- *Intersecção* ($A \cap B$): é o conjunto formado dos elementos comuns a A e B .



A região quadriculada representa $A \cap B$.

- *Diferença* ($A \setminus B$): é o conjunto dos elementos que estão em A mas não em B .



A região hachurada representa $A \setminus B$.

Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, então:

- (i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- (ii) $A \cap B = \{3\}$;
- (iii) $A \setminus B = \{1, 2\}$.

- Se a intersecção entre dois conjuntos é vazia, os conjuntos são chamados de *conjuntos disjuntos*. Observe que, se dois conjuntos A e B são disjuntos, sendo $n(A \cup B)$ o número de elementos do conjunto $A \cup B$, então tem-se $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, ou seja, o número de elementos do conjunto resultante da união de dois conjuntos disjuntos é igual à soma do número de elementos de cada um desses conjuntos.

- Para quaisquer conjuntos A e B , valem as seguintes propriedades:

Idempotente: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

Elemento Neutro: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$;

Comutativa: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Não é necessário que $B \subset A$ para formar a diferença $A \setminus B$, mas, se $B \subset A$, diz-se que a diferença $A \setminus B$ é o *conjunto complementar* de B em relação a A . Se U é algum conjunto universo, então o conjunto $U \setminus A$ diz-se simplesmente o *conjunto complementar* de A , indicado por A^C .

- Observe que, quando $A \cap B = \emptyset$, tem-se $A \setminus B = A$. Além disso, em qualquer caso, tem-se: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ e $A \setminus B = A \cap B^C$.

- Se $A \neq \emptyset$ e $B = \emptyset$, então $A \setminus B = A$ e $B \setminus A = \emptyset$

- Propriedades do conjunto complementar: para qualquer que seja o conjunto A , valem as seguintes propriedades:

(i) $(A^C)^C = A$;

(ii) Se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$;

(iii) Se $A = \emptyset$, então $A^C = U$;

(iv) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$;

(v) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$;

(vi) $A \cup A^C = U$ e $A \cap A^C = \emptyset$.

- Observe que os conjuntos $A \setminus B$ e $A \cap B$ são disjuntos e sua união é igual ao conjunto A ; assim, tem-se $n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)$, de onde se tira $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$ (*). Observe, ainda, que $A \setminus B$ e B são conjuntos disjuntos e sua união é igual ao conjunto $A \cup B$; daí, tem-se $n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(B)$, que dá, utilizando a expressão (*), $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

- Principais conjuntos numéricos:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = conjunto dos números naturais;

- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ = conjunto dos números inteiros;

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \right\}$, onde a e b são inteiros, com $b \neq 0$ } = conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{I} = \{x/x \text{ não pode ser escrito na forma } \frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ inteiros}\}$ = conjunto dos números irracionais;
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ = conjunto dos números reais.

Observe que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

• Exemplos Adicionais:

Exemplo 1 – Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, então, tem-se:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A \cap B = \{4, 5\}, A \setminus B = \{1, 2, 3\}, B \setminus A = \{6, 7\}.$$

Exemplo 2 – Se $A = \{a, b, c\}$, então

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Exemplo 3 – Suponha que $A \subset B$ e $B \subset C$, e seja $x \in A$. Então, como $A \subset B$, tem-se que $x \in B$. Mas, como $B \subset C$, tem-se que $x \in C$, o que significa que $A \subset C$, pois x é qualquer elemento de A .

Exemplo 4 – Suponha que $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3\}$. Observe que, neste caso, $A \cup B = A \cup C = \{1, 2, 3\}$, mas $B \neq C$. Portanto, nem sempre se tem $B = C$ quando $A \cup B = A \cup C$.

Exemplo 5 – Considere que $A \subset B$, e seja $x \in B^C$. Então, segue-se que $x \notin B$; como $A \subset B$, deve-se ter $x \notin A$. Isso significa que $x \in A^C$. Portanto, podemos afirmar que, se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$.

Exemplo 6 – Se, entre 350 pessoas, 270 praticam a atividade A , 280 praticam a atividade B e 220 pessoas praticam, conjuntamente, as atividades A e B , pede-se determinar o número de pessoas que não praticam nenhuma das atividades.

Solução: Considerando como A e B , respectivamente, os conjuntos de pessoas que praticam as atividades A e B , tem-se $n(A) = 270, n(B) = 280$ e $n(A \cap B) = 220$; daí, calcula-se $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 270 + 280 - 220 = 330$; ou

seja, tem-se que 330 pessoas praticam pelo menos uma das atividades A ou B . Como se tem 350 pessoas no total, então tem-se $350 - 330 = 20$ pessoas que não praticam nenhuma das atividades.

Exemplo 7 – Pede-se calcular $n(A \cup B)$, dado que $n(A \setminus B) = 5, n(A \cap B) = 5$ e $n(B \setminus A) = 5$.

Solução: Observe que os conjuntos $A \setminus B, A \cap B$ e $B \setminus A$ são disjuntos. Daí, como $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, segue-se que:

$$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) = 5 + 5 + 5 = 15.$$

Exemplo 8 – Determinar o número de pessoas presentes em uma festa, sabendo-se que, entre todos os presentes, 150 bebem vinho e refrigerante, 170 bebem vinho, mas não refrigerante, e 180 bebem refrigerante, mas não vinho.

Solução: Sejam A e B os conjuntos de pessoas que bebem vinho e refrigerante, respectivamente. Então, tem-se $n(A \cap B) = 150, n(A \setminus B) = 170$ e $n(B \setminus A) = 180$. O que se deseja é obter $n(A \cup B)$. Como os conjuntos $A \cap B, A \setminus B$ e $B \setminus A$ são disjuntos, tem-se:

$$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) = 170 + 150 + 180 = 500.$$

Portanto, 500 pessoas, no total, estão presentes na festa.

Exemplo 9 – Sendo o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determine o conjunto X tal que $A \cap X = \{1\}$ e $A \cup X = U$.

Solução: De $A \cap X = \{1\}$, segue-se que $1 \in X, 2 \notin X$ e $3 \notin X$; , de $A \cup X = U$, segue-se que $4 \in X$ e $5 \in X$, pois estes números estão na união de X e A , mas não estão em A ; logo, obrigatoriamente, devem estar em X . Tem-se, assim, $X = \{1, 4, 5\}$.

Exemplo 10 – Sendo $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, pede-se determinar o conjunto X tal que $X \cup B = A \cup C$ e $X \cap B = \emptyset$.

Solução: Como $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$, tem-se $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, o que significa que $\{1, 2\} \subset X$, já que os números 1 e 2 não estão em B . Da intersecção vazia entre B e X , segue-se que 3 e 4 não são elementos de X . Isso esgota todas as possibilidades para os elementos de X . Logo, $X = \{1, 2\}$.

• Problemas propostos:

Problema 1 – Se $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ e $A \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$, calcule $A \cup B \cup C$.

Problema 2 – Mostre que, se $A \cup B = A$, então $B \subset A$.

Problema 3 – Calcule $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Problema 4 – Se $A = \{1, 2, 3\}$, determine o conjunto X tal que $A \cap X = \{3\}$ e $X \setminus A = \emptyset$.

Problema 5 – Se $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e A, B e X são conjuntos tais que $A \cap X = \{4, 6\}$, $B \cap X = \{5, 7\}$, $A \cap X^c = \{2, 8\}$ e $B \cap X^c = \{1, 3, 9\}$, determine X .

Problema 6 – Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f\}$ e $X \subset A \cup B$, tal que $A \setminus X = \{a, b\}$ e $B \setminus X = \{f\}$. Determine X .

Problema 7 – Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $X \subset A \cup B$, tal que $A \cap X = \{2, 3\}$ e $B \cap X = \{3, 4\}$. Determine X .

Problema 8 – Se $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e A, B e X são conjuntos tais que $X \setminus (A \cup B) = \{6, 7\}$, $X \cap (A \cup B) = \{4, 5\}$, determine X .

Problema 9 – Sejam $A = \{3, 7\}$ e $B = \{7, 8, 9\}$. Determine o conjunto X tal que $A \cap X = \{3\}$, $B \cap X = \{8\}$ e $A \cup B \cup X = \{3, 7, 8, 9, 10\}$.

Problema 10 – Num grupo de n pessoas, 30 só compram o produto A , 15 compram os produtos A e B , 70 compram apenas um tipo de produto e 25 não consomem nem o produto A , nem o produto B . Calcule n .

Seção 2

Propriedades dos Números Naturais

- Ao conjunto dos números naturais associam-se quatro operações aritméticas básicas, chamadas *adição* (+), *subtração* (−), *multiplicação* (x ou $\cdot$) e *divisão* ($\div$), assim relacionadas:

$$a+b=c \text{ se, e somente se, } a=c-b$$

$$a \cdot b=c \text{ se, e somente se, } a=c \div b$$

- Dados a, b e c naturais:

(i) se $c = a + b$, a e b são chamados de *parcelas* e c é chamado *soma* de a e b ;

(ii) se $c = a - b$, a é chamado *minuendo*, b é chamado de *subtraendo* e c é a *diferença* de a e b ;

(iii) se $c = a \cdot b$, a e b são chamados *fatores* e c é chamado *produto* de a e b ;

(iv) se $c = a \div b$, a é chamado de *dividendo*, b é chamado de *divisor* e c é chamado de *quociente* da divisão;

(v) nos quatro itens anteriores, a e b são chamados de *operandos* das operações em consideração.

- Todo número natural n possui um *sucessor*, dado por $n+1$;

- Todo número natural $n \neq 0$ possui um *antecessor*, dado por $n-1$.

• A operação de subtração induz uma *relação de ordem* no conjunto dos naturais, uma vez que $a - b$ só está definido em $\mathbb{N}$ quando $a \geq b$ (a é maior ou igual a b). Nesse caso, diz-se também que $b \leq a$ (b é menor ou igual a a). Os símbolos “ $>$ ” e “ $<$ ” são utilizados com essa mesma finalidade, mas indicam que não existe a possibilidade de igualdade entre os elementos comparados.

- Propriedades da adição e multiplicação (não satisfeitas pela subtração e divisão): dados a, b, c naturais tem-se: