

Damien Gobin • Johan Leray

MATHS

DU LYCÉE À LA LICENCE

Toutes les bases pour réussir



**COURS
ET 250
EXERCICES
CORRIGÉS**

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture : Nicolas Wiel - XXX (graphiste)
Crédits iconographiques pour la couverture:

© Dunod, 2024
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-087344-9

Avant-propos

Ce livre est le fruit des enseignements de mathématiques que nous avons dispensé dans la filière TREMP-Li-N de 2021 à 2023, ainsi qu'en première année de filières scientifiques à Nantes Université. Il se veut donc un support de transition entre le lycée et l'enseignement supérieur. Dans cette optique, nous avons pris le parti de présenter des mathématiques de niveau lycée ou début de première année universitaire, dans un style s'approchant davantage d'un cours de licence 1.

Cet ouvrage s'adresse donc à plusieurs types de lecteurs : l'étudiant ayant obtenu un baccalauréat sans faire la spécialité mathématiques et désireux de suivre des études scientifiques, l'étudiant de Terminale souhaitant préparer son entrée à l'université ou encore l'étudiant de première année universitaire ayant besoin de revoir quelques bases du lycée.

Comment ce livre est-il organisé ? L'enchaînement des chapitres construit le cheminement mathématique : les premiers chapitres présentent des bases indispensables pour la suite et chaque chapitre utilise ensuite les connaissances présentées auparavant pour en développer de nouvelles. Les principales thématiques mathématiques sont donc abordées alternativement, en fonction de la progression.

- Les trois premiers chapitres sont des chapitres calculatoires. Des rappels de calcul basiques sont présentés dans le chapitre 1, et la résolution d'équations et d'inéquations, comme vue au lycée, dans le chapitre 2. Enfin, dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la résolution de systèmes linéaires à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, traditionnellement enseignée en première année universitaire.
- Les chapitres 4 à 9 présentent des thématiques importantes du lycée, que sont l'étude des suites, la géométrie plane et spatiale, et l'étude des fonctions réelles à une variable réelle. Une importance toute particulière a été donnée à cette dernière thématique qui constitue indéniablement le point central de l'enseignement des mathématiques de Terminale et de première année universitaire.
- Cet ouvrage s'achève par deux chapitres qui, selon nous, doivent permettre de faciliter votre accession sereine aux études supérieures. L'avant-dernier chapitre traite de l'intégration, avec un développement plus important que celui fait en classe de Terminale, notamment par son utilisation pour la résolution d'équations différentielles. Enfin, le dernier chapitre traite des nombres complexes. Il s'agit d'une thématique

particulièrement importante de part son lien entre le calcul analytique et la géométrie mais aussi par ces nombreuses applications en physique. Finalement, vous trouverez une courte annexe sur la théorie des ensembles dont certaines notions sont utilisées dans ce livre.

Ce que ne contient pas ce livre. Nous avons fait le choix de ne pas aborder certaines thématiques mathématiques qui ont pourtant leur place au lycée. Ainsi, ce livre ne contient aucun chapitre concernant la combinatoire et les probabilités, l'arithmétique ou le calcul matriciel. En effet, l'ensemble de ces thématiques sont traditionnellement revue lors du premier cycle universitaire, sans prérequis. Enfin, il ne sera fait aucune mention d'approche numérique ou d'algorithmie bien qu'il s'agisse d'un champ d'application important des mathématiques.

Comment utiliser ce livre ?

- Vous pouvez lire ce livre dans le désordre : en fonction de votre maîtrise des sujets, les premiers chapitres peuvent vous sembler superflus. Dans ce cas, n'hésitez pas à vous diriger directement vers le chapitre qui vous intéresse.
- Lorsque vous étudiez un chapitre, prenez le temps de le lire attentivement et de faire les exercices proposés au fur et à mesure : ils permettent d'assimiler les notions présentées. Comme en sport ou en musique, les mathématiques demandent de la répétition pour progresser. Tous les corrigés des exercices sont disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage sur dunod.com.
- Si vous rencontrez des difficultés, n'hésitez pas à revenir sur les chapitres précédents pour reprendre les bases que vous ne maîtriserez pas.
- Nous avons également pris le parti de faire références à quelques ouvrages qui nous paraissent importants en utilisant une balise du type [Ref] renvoyant à la bibliographie présente à la fin de cet ouvrage.

Il ne nous reste plus à présent qu'à vous souhaiter bonne lecture et surtout amusez-vous !

Remerciements. Les auteurs remercient les éditions Dunod, en particulier Laëtitia Jammet, de la confiance accordée. Ils remercient également leurs collègues ayant contribué par leurs interactions à la création de cet ouvrage : Nathalie Burguin, Alexandre Charron, Laurent Piriou, Valentin Samoyeau. Enfin, ils remercient leurs proches qui les ont soutenu pendant la rédaction de ce livre.

Table des matières

1	Rudiments de calcul	5
1.1	Ensembles de nombres et opérations	6
1.2	Développement et factorisation	11
2	Équations et inéquations	15
2.1	Résolution d'équations	15
2.2	Équations affines	17
2.3	Équations du second degré	18
2.4	D'autres types d'équations	25
2.5	Intervalles et inéquations	26
3	Résolution de systèmes linéaires	35
3.1	Systèmes linéaires à deux inconnues	35
3.2	Systèmes linéaires à trois inconnues	47
4	Vecteurs, droites, plans	57
4.1	Vecteurs du plan et de l'espace	58
4.2	Géométrie du plan affine	65
4.3	Géométrie de l'espace affine	76
4.4	Orthogonalité	93
5	Introduction aux fonctions réelles d'une variable réelle	103
5.1	Définitions et exemples	103
5.2	Composition de fonctions	106
5.3	Représentation graphique d'une fonction	109
5.4	Propriétés et illustrations graphiques	112
6	Suites réelles	123
6.1	Généralités sur les suites	124
6.2	Suites et raisonnement : la récurrence	130
6.3	Convergence de suites	134
6.4	Étude des suites récurrentes	148
6.5	Cas particuliers de suites usuelles	155

7	Longueur, angle et trigonométrie	163
7.1	La distance euclidienne	163
7.2	La notion d'angle	172
7.3	Trigonométrie	181
8	Études de fonctions réelles	189
8.1	Limites	189
8.2	Continuité	209
8.3	Dérivabilité	214
8.4	Schéma d'étude de fonction	226
9	Fonctions de références	235
9.1	La fonction partie entière	235
9.2	La fonction exponentielle	237
9.3	La fonction logarithme	245
9.4	Fonctions puissances et exponentielle de base a	251
10	Intégration	255
10.1	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	255
10.2	Primitives	259
10.3	Intégration par parties	265
10.4	Changement de variable	269
10.5	Application à la résolution d'équations différentielles	272
11	Nombres complexes	279
11.1	Forme algébrique	279
11.2	Module, argument et forme trigonométrique	286
11.3	Exponentielle complexe et forme exponentielle	292
11.4	Résolution d'équations polynomiales	297
11.5	Applications des nombres complexes	304
A	Éléments de théorie des ensembles	307
A.1	Généralités et définitions	307
A.2	Opérations sur les ensembles	309
	Index	312

CHAPITRE 1

Rudiments de calcul

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les règles de calcul élémentaires entre nombres réels. La maîtrise de ces différentes règles constitue un prérequis indispensable à la poursuite d'études scientifiques et plus généralement à la pratique des mathématiques au quotidien. Nous allons ainsi redéfinir les ensembles de nombres usuels (illustrés sur la figure 1.1) ainsi que les différentes opérations de calcul sur ces ensembles. Il va sans dire que si vous désirez progresser, vous devez absolument vous abstenir d'utiliser une calculatrice.

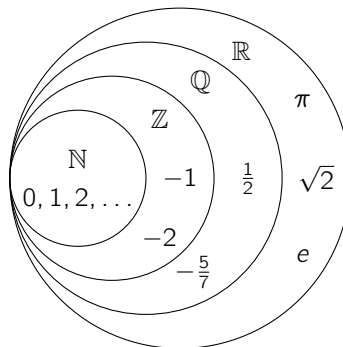


Figure 1.1 – Des ensembles de nombres

Nous aurons besoin dans ce chapitre de plusieurs notions en lien avec la théorie des ensembles. Nous ne donnerons que peu de détails à ce sujet dans ce chapitre mais si vous êtes intéressé nous vous renvoyons à l'annexe A.

1.1. Ensembles de nombres et opérations

1.1.1 Nombres entiers et premières opérations

Commençons par introduire les ensembles de nombres entiers. Pour rappel, $\mathbb{N}$ désigne **l'ensemble des nombres entiers naturels** :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Les deux opérations usuelles sur les nombres entiers naturels sont la somme et le produit qui sont définis, étant donnés deux nombres entiers naturels a et b , de la façon suivante.

- La somme de a et b est définie par $a + b = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_a \text{ termes} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b \text{ termes}$.
- Le produit de a et b est défini par $a \times b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b \text{ termes}$ et on pourra se convaincre que $a \times b = \underbrace{b + b + \dots + b}_a \text{ termes}$.

Remarques.

- Il est d'usage de noter ab le produit $a \times b$ pour simplifier les écritures.
- Dans les calculs utilisant des sommes et des produits il faudra faire particulièrement attention aux règles de priorités de calculs entre les opérations : on commence toujours par calculer les produits avant les sommes. Si vous souhaitez calculer une somme avant un produit, il faut impérativement l'indiquer en utilisant un parenthésage ! Par exemple, on a $(2 + 3) \times 5 = 5 \times 5 = 25$.

Rappelons à présent que $\mathbb{Z}$ désigne **l'ensemble des nombres entiers relatifs** :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Cet ensemble est construit à partir de $\mathbb{N}$ en ajoutant pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$ non nul son symétrique, c'est-à-dire un nombre noté $-n$ tel que $n + (-n) = 0 = -n + n$.

Remarques.

- On parlera régulièrement de nombres entiers sans précisions supplémentaires pour désigner des entiers relatifs.
- La somme et le produit définis précédemment pour les entiers naturels s'étendent de façon naturelle à l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

1.1.2 Nombres entiers et calcul de puissances

Définition 1.1 – Puissance. Soit n un nombre entier naturel non nul et soit a un nombre entier relatif. On note a^n , et on lit « a puissance n », le nombre

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ termes}}.$$

De plus, pour tout nombre entier relatif a , on pose $a^0 = 1$ (en particulier $0^0 = 1$).

Exemple. Voici la liste des premières puissances de 2 :

- | | | | |
|---------------|----------------|-----------------|---------------------|
| ◦ $2^1 = 2$, | ◦ $2^4 = 16$, | ◦ $2^7 = 128$, | ◦ $2^{10} = 1024$, |
| ◦ $2^2 = 4$, | ◦ $2^5 = 32$, | ◦ $2^8 = 256$, | ◦ $2^{11} = 2048$, |
| ◦ $2^3 = 8$, | ◦ $2^6 = 64$, | ◦ $2^9 = 512$, | ◦ $2^{12} = 4096$. |

Exercice 1.2. Calculer les puissances suivantes :

- | | | | |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| 1. 3^3 , | 3. $(-1)^2$, | 5. -2^2 , | 7. $(-1)^4$, |
| 2. 0^3 , | 4. $(-2)^2$, | 6. $(-1)^3$, | 8. $(-1)^5$. |

Proposition 1.3 – Règles de calcul avec les puissances. Soient a, b deux nombres entiers relatifs et m, n deux nombres entiers naturels. Alors,

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---|
| ◦ $a^m \times b^m = (ab)^m$, | ◦ $a^m \times a^n = a^{m+n}$, | ◦ $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$. |
|-------------------------------|--------------------------------|---|

Exemple. On cherche à calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $(-1)^n$ en fonction de n . Fixons un entier naturel n . On distingue alors deux cas :

- ou bien n est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$, et alors $(-1)^n = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$,
- ou bien n est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$, et alors $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = (-1) \times (-1)^{2k} = (-1) \times ((-1)^2)^k = (-1) \times 1^k = -1$.

On a donc montré que pour tout entier naturel n , on a $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair.

Exercice 1.4. Écrire sous la forme a^n , a et n des entiers naturels, les nombres suivants :

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------------------------|
| 1. $3^3 \times 5^3$, | 2. $3^3 \times 3^5$, | 3. $(3^3)^5$, | 4. $2^3 \times 3^3 \times 6^2$. |
|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------------------------|

1.1.3 Décomposition des nombres entiers

Définition 1.5 – Nombres premiers. Un entier naturel n est dit **premier** si $n \geq 2$ et si les seules décompositions de n en un produit de deux nombres entiers naturels $n = ab$ sont données par $a = 1$ et $b = n$ ou $a = n$ et $b = 1$.

Remarques.

- On notera que, par définition, 1 n'est pas un nombre premier.
- Si vous avez l'habitude du langage de l'arithmétique vous pouvez reformuler la définition précédente de la façon suivante : un nombre entier naturel n est dit premier s'il possède exactement deux diviseurs à savoir 1 et lui-même. On retrouve donc ici que 1 n'est pas premier.

Exemple. Les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sont des nombres premiers. Pour faire la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre fixé, on peut utiliser le crible d'Ératosthène (pour une présentation de ce crible, on pourra consulter [Wikc]). De plus, pour savoir si un nombre entier positif est un nombre premier on notera qu'il suffit de tester s'il est divisible par un nombre compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

Les nombres premiers sont d'un très grand intérêt. Ils sont, par exemple, utilisés de façon cruciale en cryptographie (par exemple pour le protocole RSA, voir [Wikb]). Leur principal usage dans ce chapitre découle du résultat suivant.

Proposition 1.6 – Décomposition en facteurs premiers. *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une unique famille de couples $(p_1, k_1), \dots, (p_r, k_r)$, avec*

- $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts et classés dans l'ordre croissant,
- $k_1, \dots, k_r$ des entiers naturels non nuls,

telle que

$$n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \dots \times p_r^{k_r}.$$

Exemple. On a la décomposition

$$2160 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3^3 \times 5.$$

Exercice 1.7 – Décomposition d'entiers. Donner la décomposition en produit de nombres premiers des nombres suivants :

1. 1000,

2. 625,

3. 564,

4. 89.

1.1.4 Nombres rationnels et calcul fractionnaire

On désigne par $\mathbb{Q}$ l'**ensemble des nombres rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme d'un quotient (d'une fraction) d'un entier relatif par un entier relatif non nul. Autrement dit,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Propriété 1.8 – Simplification d'une fraction. Soient a un nombre entier et b un nombre entier non nul. Alors, pour tout nombre c également non nul, on a :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{1} = a.$$

Exemple. On a $\frac{21}{6} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} = \frac{7}{2}$ ou encore $-\frac{242}{44} = -\frac{11 \times 11 \times 2}{2 \times 2 \times 11} = -\frac{11}{2}$.

La simplification de fraction est importante car elle permet d'écrire les nombres rationnels sous forme **irréductible**, c'est-à-dire avec le dénominateur le plus petit possible.

Définition 1.9 – Fractions irréductibles. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si elle ne peut pas être simplifiée, c'est-à-dire s'il n'existe pas de nombre entier naturel c différent de 1 tel que $a = ca'$ et $b = cb'$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$.

Exemple. Le nombre $\frac{21}{6}$ n'est pas irréductible car $21 = 3 \times 7$ et $6 = 3 \times 2$ (on a ici $c = 3$). En revanche, $\frac{7}{2}$ (qui est en réalité égale à $\frac{21}{6}$) est bien irréductible.

Propriété 1.10 – Position du signe moins. Soient a et b des nombres entiers, $b \neq 0$, on a

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Propriété 1.11 – Addition de deux fractions. Soient a, b, c et d des nombres entiers avec b et d non nuls.

- L'addition et la soustraction de deux fractions de même dénominateur sont données par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

- L'addition de deux fractions ayant des dénominateurs différents est donnée par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Exemple. On a $\frac{5}{7} + \frac{4}{3} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} + \frac{4 \times 7}{3 \times 7} = \frac{15}{21} + \frac{28}{21} = \frac{15+28}{21} = \frac{43}{21}$.

Propriété 1.12 – Produit, puissance et quotient de deux fractions. Soient a, b, c et d des nombres réels avec b et d non nuls.

- La multiplication de deux fractions est donnée par

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

En particulier, pour tout entier naturel n , $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

- Supposons également que $c \neq 0$. La division de deux fractions est donnée par

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Exercice 1.13. Écrire sous forme d'une fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5},$

4. $\frac{11}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2},$

7. $\frac{(-2)^4 \times (-3)^7}{4^3 \times 9^4},$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3},$

5. $4 \times \left(\frac{2}{4} + \frac{9}{5}\right),$

8. $\frac{\frac{2}{3} + \frac{9}{4}}{\frac{2}{3} - \frac{9}{4}}.$

3. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4},$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5},$

Définition 1.14 – Retour aux puissances. Soient a un nombre entier non nul et m et n deux entiers relatifs, alors

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

En particulier, si $m = 0$ et $n = 1$ on a $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Remarque. Ces définitions s'étendent bien entendu au cas où a est un nombre rationnel et plus largement un nombre réel. Dans le cas d'un nombre rationnel, on pourra par exemple utiliser la règle de calcul sur les puissances vue dans la propriété 1.12 pour se ramener à du calcul avec les nombres entiers.

Exercice 1.15. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51})^2,$

4. $(6)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1},$

2. $\frac{(-4)^2}{(-4)^4},$

5. $\frac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}},$

3. $(5^{-4} \times 5^5)^3,$

6. $8 \times (35)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^2)^2.$

1.1.5 Nombres réels et racine carrée

On désigne par $\mathbb{R}$ **l'ensemble des nombres réels**, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres que vous avez rencontrés au collège ou au lycée. Cet ensemble est nettement plus grand que $\mathbb{Q}$ (par exemple $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$) et sera le plus gros ensemble que nous considérerons dans ce chapitre. Pour plus d'informations sur la construction de l'ensemble des nombres réels, nous vous conseillons de consulter [Tao22, Chapitre 5].

Définition 1.16 – Racine carrée. Soit a un nombre réel **positif**. La racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif qui, lorsqu'on le multiplie par lui-même est égal à a . Autrement dit, $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

À retenir. L'égalité $\sqrt{(a)^2} = a$ n'est vraie que pour a **positif** ! Par exemple, on a $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ qui est différent de -3 .

Propriété 1.17 – Opérations sur les racines carrées. Soient a et b deux nombres réels positifs.

- La multiplication de racines carrées est donnée par $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- La division de racines carrées est donnée, si $b \neq 0$, par $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exemple. On a $\sqrt{120} = \sqrt{4 \times 5 \times 6} = 2\sqrt{5} \times \sqrt{6}$ ou encore $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

À retenir. Il faudra prendre garde au fait que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, on a $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$.

Exercice 1.18. Écrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

1. $(2\sqrt{3})^2$,
2. $4\sqrt{7} - \sqrt{63}$,
3. $\frac{1}{\sqrt{7}} + \sqrt{28}$,
4. $\sqrt{(1-\pi)^2}$.

1.2. Développement et factorisation

1.2.1 Développer une expression

Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme de plusieurs termes. Soient a, b, c, d et k des nombres réels. La **distributivité de la multipli-**

cation par rapport à l'addition est donnée par

$$k(a + b) = ka + kb.$$

On a ici **développé** l'expression $k(a + b)$ en $ka + kb$. En prenant $b = -c$, on obtient $k(a - c) = ka - kc$. La **double distributivité** est donnée par

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Exemples. Soient a et b deux nombres réels.

$$\circ 4(a + 3) = 4a + 12.$$

$$\circ (a - 7)(2 - b) = 2a + 7b - ab - 14.$$

Il y a des cas particuliers d'utilisation de la double distributivité particulièrement utiles à connaître que l'on énonce dans la proposition suivante.

Proposition 1.19 – Identités remarquables. *Pour tous nombres réels a et b , on a les égalités suivantes :*

$$\circ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\circ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Démonstration. Il suffit de développer les expressions de gauche à l'aide de la double distributivité pour démontrer ces égalités. $\square$

Exercice 1.20. Soient a et b deux nombres réels. Développer l'expression $(a - b)^2$.

Exercice 1.21. Étant donnés des nombres réels a , b , x , y , α et ω , développer les expressions suivantes :

1. $(4 - 3\sqrt{2})^2$,

6. $(7a + 5)(5 - 3a)$,

2. $(2\sqrt{5} + 3)(3\sqrt{5} - 4)$,

7. $(11y^2 + 4)^2$,

3. $(1 - \sqrt{2})^2$,

8. $(11y^2 + 4)^3$,

4. $(\sqrt{10} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2$,

9. $(\alpha - 3\omega)^2$,

5. $4x(7x^2 - 8)$,

10. $(4x - 9 - b)(4x - 9 + b)$.

Exercice 1.22 – D'autres identités remarquables. Soient a et b deux nombres réels. Développer les expressions suivantes :

1. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$,

2. $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

La double distributivité possède de nombreuses applications pratiques. L'une d'entre elles

consiste à utiliser ce que l'on appelle la **quantité conjuguée**.

Méthode – Multiplication par la quantité conjuguée. Pour simplifier une somme ou une différence de racines au dénominateur d'une fraction, comme par exemple, pour a et b sont deux réels positifs distincts,

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}},$$

on peut multiplier par **la quantité conjuguée**. Plus précisément, on écrit

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

Exercice 1.23 – Multiplication par la quantité conjuguée. Simplifier les expressions suivantes en obtenant des dénominateurs entiers :

1. $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}},$

3. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}},$

5. $\frac{4 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{4 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}},$

2. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}},$

4. $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}},$

6. $\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1} \right)^2.$

1.2.2 Factoriser une expression

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit de plusieurs facteurs. Il s'agit donc de **l'opération inverse du développement**. Par exemple, pour a , b et k des nombres réels, on a $ka + kb = k(a + b)$ et on a ici **factorisé** l'expression $ka + kb$ en $k(a + b)$. Factoriser des expressions aura un grand intérêt dans la simplification de fractions (voir exercices 1.26 et 1.27) et la résolution d'équations et d'inéquations comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Méthode – Factorisation. Pour factoriser une expression, il peut être très utile de se rappeler des identités remarquables dont on rappelle qu'elles sont données, pour a et b deux nombres réels, par $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. On les écrit dans le sens inverse de celui donné précédemment pour qu'elles s'appliquent au mieux à notre objectif : factoriser des expressions.