Probabilidade 3

Daniel Francisco Neyra Castañeda

2014

Sumário

1 Alguns comandos do R **1**

1.1 Iniciando o R . . . 1
1.2 Manipulação de números e vetores . . . 2
1.3 Funções matemáticas . . . 3
1.4 Funções estatísticas . . . 3
1.5 Vetores e Matrizes . . . 4
1.5.1 Indexando matrizes . . . 4
1.5.2 Sequências . . . 4
1.5.3 Multiplicação e inversão de matrizes . . . 5
1.5.4 Comandos `cbind()` e `rbind()` . . . 5
1.6 Data frame ou construtor de dados . . . 6
1.7 Funções `attach()` e `detach()` . . . 6
1.8 Função `read.table()` . . . 7
1.9 Função `scan()` . . . 7
1.10 Função sample . . . 7
1.11 Rcmdr . . . 8
1.12 Exportando dados do R para o Excel . . . 8
1.13 Distribuições de probabilidade . . . 8
1.14 Algoritmos de programação no R . . . 9
1.15 Laços no R . . . 11
1.16 A função cut() . . . 12
1.17 Criando a suas próprias funções . . . 12
1.17.1 Teste que compara duas médias . . . 12
1.18 Teste Qui- Quadrado . . . 13
1.19 Teste t - student . . . 13
1.20 Teste F . . . 14
1.21 Gráficos . . . 14
1.22 Tabelas . . . 16
1.23 Exercicios . . . 17

2 Noções Básicas **21**

2.1 Conjuntos . . . 21
2.1.1 União . . . 22
2.1.2 Intersecção . . . 22

2.1.3 Diferença . . . 22
2.1.4 Complementar . . . 22
2.1.5 Combinatórias . . . 23
2.1.6 Leis . . . 23
2.1.7 Propriedades adicionais . . . 24
2.1.8 Produto Cartesiano . . . 25
2.1.9 Experimento . . . 25
2.1.10 Espaço amostral . . . 26
2.1.11 Eventos . . . 26
2.1.12 $\sigma - algebra$ . . . 27
2.2 Probabilidade . . . 27
2.2.1 Condições . . . 27
2.2.2 Exemplos . . . 28
2.3 Vetores Aleatórios . . . 29
2.3.1 Exercícios . . . 30

3 Distribuições Bidimensionais 33
3.1 Caso discreto . . . 33
3.1.1 Frequências absolutas simples Bidimensionais . . . 33
3.1.2 Distribuições Bidimensionais de frequências absolutas simples marginais . . . 33
3.1.3 Exemplo . . . 33
3.1.4 Frequências relativas simples Bidimensionais . . . 35
3.1.5 Distribuições Bidimensionais de frequências relativas simples marginais . . . 35
3.2 Caso Continuo . . . 37
3.2.1 Definição . . . 37
3.2.2 Exemplo . . . 37
3.2.3 Marginal e Condicional . . . 38
3.2.4 V A Independentes . . . 39
3.2.5 Exemplo 1 . . . 39
3.2.6 Exemplo 2 . . . 40
3.2.7 Função de distribuição Conjunta . . . 41
3.2.8 Proposição 1 . . . 41
3.2.9 Probabilidade Conjunta Marginal . . . 42
3.2.10 Densidade Conjunta Marginal . . . 43
3.2.11 Método do Jacobiano . . . 44
3.3 Normal Multivariada . . . 44
3.3.1 Calculo da constante C . . . 45
3.3.2 Inversão de S . . . 46
3.4 Valor esperado . . . 46
3.5 Esperança Condicional . . . 47
3.5.1 Exemplo 1 . . . 47
3.5.2 Exemplo 2 . . . 47
3.5.3 Exemplo 3 . . . 48
3.6 Variância Condicional . . . 49

3.7 Covariância Condicional 49
3.7.1 Exemplo 4 49
3.7.2 Exemplo 5 50
3.7.3 Matriz de dispersão 50
3.8 Funções de variáveis aleatórias 51
3.8.1 Exemplo 6 52
3.8.2 Exemplo 7 52
3.8.3 Proposição 1 53
3.8.4 Proposição 2 54
3.8.5 Definição 55

4 Função geratriz de Momentos **57**
4.1 Definições importantes 57
4.1.1 Série de Maclaurin 57
4.1.2 Teorema de Newton 57
4.1.3 Momentos centrados 58
4.2 Função Geratriz de Momentos 59
4.2.1 Definição 59
4.2.2 Propriedades 59
4.3 Funções Discretas 62
4.3.1 Exemplo 1. Bernoulli 62
4.3.2 Exemplo 2. Binomial 63
4.3.3 Exemplo 3. Poisson 64
4.3.4 Exemplo 4. Multinomial 67
4.3.5 Exemplo 5. Hipergeométrica 69
4.4 Funções Continuas 70
4.4.1 Exemplo 1. Uniforme 70
4.4.2 Assimetria 71
4.4.3 Exemplo 2. Gamma 72
4.4.4 Exemplo 3. Exponencial 74
4.4.5 fgm da Exponencial 75
4.4.6 Valor esperado 75
4.4.7 Exemplo 4. χ^2 76
4.4.8 Exemplo 5. Normal Padrão 78
4.5 Exercícios fgm 81

5 Função Característica **83**
5.1 Aplicação 85
5.1.1 Exemplo 1. Bernoulli 85
5.1.2 Exemplo 2. Binomial 86
5.1.3 Exemplo 3. Poisson 87
5.1.4 Exemplo 4. Uniforme 89
5.1.5 Assimetria 90
5.1.6 Exemplo 5. Gamma 91

Dedicatória

A mi familia.

Agradecimentos

Este livro é fruto das notas de aula das disciplina de Probabilidade ministradas nos cursos de Estatística e Ciências Atuariais na Universidade Federal de Sergipe durante os últimos anos.

Prefácio

Uma das área da estatística de grande impacto é a teoria das probabilidade, e qualquer exagero é pouco por sua importância principalmente na formação de profissionais das áreas exatas em particular para Estatísticos ou Atuários. Pre requisito básico é funções, limites, calculo diferencial e integral. Os temas abordados superam os conteúdos de probabilidade das diferentes centros ou faculdades brasileiras, e na maioria dos casos faz-se uso da plataforma R com comandos de linha como auxilio na compreensão teórica, e comandos gráficos para visualização ambos como complemento para o entendimento do estudante.

O cursos de Estatística e Atuária na Universidade Federal de Sergipe, oferece atualmente três disciplina de probabilidade e tem-se implementado os seus conteúdos em programas tradicionais como excel, SPSS, ou algum programa local em destaque, porem este livro traz como nova proposta o **projeto R** que já é bastante difundida no ambiente universitário, este ambiente além de ser livre (o código fonte está disponível para alteração) e gratuita (sem custo monetário). Este ambiente utiliza a linguagem S, as suas funções estão implementadas no pacote padrão `stats` ou em pacotes externos a serem instalados, os quais sempre estão em constante atualização. O projeto R é uma linguagem de programação matemática orientada a objetos que usa comandos de linha para sua execução. A plataforma R é confiável pela qualidade dos seus resultados, e pela estabilidade em ambientes como Linux e Windows, usaremos este último ambiente neste livro. Também vem imprimindo um novo ritmo de procura na comunidade universitária pela qualidade dos seus resultados, o tempo de execução é imediata, e pela quantidade de informação como material bibliográfico e referencias na internet no sitio: `www.r-project.org`.

Conteúdos

Para abranger as disciplinas de probabilidade, podemos dividir em três capítulos a seguir

Probabilidade 1

1. Apresentamos uma breve introdução aos comandos do R, as bibliotecas utilizadas, manipulação de números, vetores e matrizes, multiplicação e inversão de matrizes, funções matemáticas e estatísticas, leitura de dados de arquivos em vários formatos, construção de gráficos como histogramas, boxplot, funções acumuladas.

2. Experimento, espaço amostral, eventos, contagem de pontos amostrais, definição de probabilidade, probabilidade condicional, regras aditivas e multiplicativas, teorema de Bayes

3. Variável aleatória, distribuição de probabilidade discreta, distribuição de probabilidade continua, probabilidades conjuntas.

4. Esperança matemática, média de uma variável aleatória, variância de uma variável aleatória, teorema de Chebyschev, algumas distribuições de probabilidade discretas: Distribuição Uniforme, Bernoulli e Binomial, Multinomial, Hipergeométrica e Poisson, propriedades das distribuições discretas de Probabilidade.

Probabilidade 2

1. Algumas distribuições de probabilidade continuas: Distribuição Uniforme, Normal, aplicações da distribuição Normal, aproximação normal da Binomial, Gama, Exponencial, Qui Quadrado, outras distribuições de probabilidade continuas.

2. Variáveis aleatórias contínuas, função densidade de probabilidade, funções de variáveis aleatórias, distribuições continuas e discretas mais importantes

3. Valor esperado e suas propriedades, vetores aleatórios bidimensionais, distribuição bidimensional e condicional de variáveis aleatórias discretas e continuas. independência de variáveis aleatórias discretas e contínuas, vetores aleatórios n-dimensionais, momentos de vetores aleatórios e de funções vetoriais, covariância e correlação.

Probabilidade 3

1. Método do Jacobiano e aplicações Esperança condicional de variáveis aleatórias discretas e contínuas.Exercícios de aplicação Covariância, Correlação, Variância condicional para variáveis aleatórias discretas e contínuas.

Distribuição de probabilidade conjunta de funções de variáveis aleatórias. Funções de variáveis aleatórias

2. Função geratriz de momentos, exemplos de função geratriz de Momentos, propriedades da função geratriz de momentos, esperança, variância e momentos das distribuições mais importantes. Função característica, propriedades, exercícios de aplicação

3. Leis dos Grandes Números. Lei Fraca dos Grandes Números e Lei Forte dos Grandes Números, sequências de eventos e lema de Borel-Cantelli, convergências de variáveis aleatórias, modos de convergência, convergência quase certa, convergência em probabilidade e convergência em distribuição, aplicações. Teorema central do limite, teorema central do limite para seqüências i.i.d., teorema central do limite para seqüência de variáveis aleatórias, Teorema central do limite de Lindeberg e teorema central do limite de Liapunov, teorema central do limite multivariado. Exemplos.