L2 SCIENCES

Mathématiques

Le cours en fiches

2e édition

- **152** fiches-méthodes
- **575** exercices corrigés
- Formulaire

Abdelaziz **El Kaabouchi**

ellipses

Mathématiques
L2

152 fiches-méthodes
575 exercices corrigés

2e édition

Abdelaziz EL KAABOUCHI

ellipses

Dans la même série du même auteur, chez le même éditeur

- *Mathématiques de la Terminale à la Sup*, 2025
- *Mathématiques L1*, 2025

ISBN 9782340-108592
Dépôt légal : septembre 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage est un outil d'entraînement, d'approfondissement et de révision des principales notions de mathématiques du programme de deuxième année de classes préparatoires et de licences scientifiques. Il fait suite à "Mathématiques de la Terminale à la Sup" et à "Mathématiques : Le cours en fiches, pour la licence L1" du même auteur, parus récemment aux Éditions ellipses.

Présenté sous forme de fiches, il permet à l'étudiant de renforcer sa maîtrise dans la résolution de problèmes, un aspect essentiel pour réussir en prépa où les exigences sont bien plus élevées. Chaque fiche est structurée en trois parties : une présentation de la méthode, des exemples d'application, et des exercices pratiques, permettant de tester et d'approfondir les connaissances.

La réalisation régulière d'exercices est cruciale pour progresser, surtout en prépa, où la capacité à résoudre des problèmes complexes et à appliquer des méthodes rigoureuses est un impératif. Les exercices permettent non seulement de consolider les acquis, mais aussi d'acquérir la rapidité et la précision nécessaires pour faire face à l'intensité du programme des classes préparatoires.

Cette approche pratique permet à l'étudiant de travailler de manière ciblée et efficace : les lacunes sont rapidement comblées, et le programme est parfaitement maîtrisé. L'accent est mis sur le développement de compétences solides, indispensables pour répondre aux attentes élevées des classes préparatoires. À tout moment de l'année, l'étudiant peut utiliser cet ouvrage pour aborder de nouveaux concepts, combler des lacunes ou se préparer efficacement aux examens.

A. El Kaabouchi

Sommaire

1 Structures algébriques (compléments) 7

2 Compléments sur les polynômes 17

3 Dualité 25

4 Réduction des endomorphismes et des matrices 35

5 Espaces euclidiens 55

6 Formes bilinéaires et formes quadratiques 69

7 Algèbre sesquilinéaire 87

8 Notions de topologie 101

9 Fonctions de plusieurs variables réelles 111

10 Intégrales généralisées 121

11 Séries numériques 133

12 Suites de fonctions 149

13 Séries de fonctions **157**

14 Séries entières **165**

15 Séries de Fourier **177**

16 Transformation de Laplace **183**

17 Exercices complémentaires **187**

18 Corrigé des exercices **219**

19 Formulaires **443**

Chapitre 1

Structures algébriques (compléments)

1.1 Comment montrer qu'un élément d'un groupe est d'ordre fini ?

1.2 Comment montrer qu'un sous-groupe est engendré par une partie non vide ?

1.3 Comment montrer qu'un groupe est monogène ?

1.4 Comment montrer qu'un groupe est cyclique ?

1.5 Comment montrer qu'un sous-groupe d'un groupe est distingué (ou invariant) ?

1.6 Comment déterminer la signature d'une permutation ?

1.7 Comment montrer qu'un élément d'un anneau est nilpotent ?

1.8 Comment montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal ?

1.9 Comment calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

1.1 Comment montrer qu'un élément d'un groupe est d'ordre fini ?

Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e et soit $a \in G$.

Pour montrer que a est d'ordre fini, on montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$.

On appelle *ordre* de a, le plus petit entier naturel non nul n tel que $a^n = e$.

E X E M P L E

Soit $G_4 = \{z \in \mathbb{C},\ \ z^4 = 1\} = \{-1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}, 1\}$**.**

On sait que G_4 **muni de la multiplication est un groupe.**

Trouver l'ordre de chacun des éléments de G_4**.**

On a : $(-1)^4 = 1$, donc -1 est d'ordre fini, ici ordre $(-1) = 2$;

$\mathrm{i}^4 = 1$, donc i est d'ordre fini, ici ordre $(\mathrm{i}) = 4$;

$(-\mathrm{i})^4 = 1$, donc $(-\mathrm{i})$ est d'ordre fini, ici ordre $(-\mathrm{i}) = 4$.

Exercices

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e et soit x un élément de G tel que $x^n = e$ pour un entier naturel n. Montrer que l'ordre de x divise n.
2. Soient $(G, \cdot)$ un groupe, x et y deux éléments de G.
   (a) Montrer que si x, y et xy sont d'ordre 2, alors $xy = yx$;
   (b) Montrer que si x est d'ordre fini, alors x^{-1} est d'ordre fini, de plus x et x^{-1} ont le même ordre ;
   (c) Montrer que si x est d'ordre fini alors yxy^{-1} est d'ordre fini, de plus x et yxy^{-1} ont le même ordre ;
   (d) Montrer que si xy est d'ordre fini alors yx est d'ordre fini, de plus xy et yx ont le même ordre.
3. Soient G, G' deux groupes, $f : G \to G'$ un morphisme de groupes, x un élément de G d'ordre fini et n l'ordre de x. Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini dans G' et que l'ordre de $f(x)$ divise n.
4. Soit $(G, +)$ un groupe commutatif et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini. Montrer que T est un sous-groupe de G.
5. Trouver l'ordre de chacun des éléments de $((\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \times)$.

1.2 Comment montrer qu'un sous-groupe est engendré par une partie non vide ?

Soient $(G, *)$ un groupe, A une partie non vide de G et H un sous-groupe de G.

Pour montrer que H est engendré par A, on montre que pour tout $x \in H$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_n \in A$ et $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $x = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n}$.

Autrement dit : $H = \{x = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n},\ \ a_1, \cdots, a_n \in A, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}\}$.

E X E M P L E

Soient A, B deux sous-groupes d'un groupe G, on considère le sous-groupe S engendré par $A \cup B$.

Montrer que tout élément de S est obtenu comme produit d'une suite finie d'éléments appartenant alternativement à A et à B.

Soit $x \in S$, il existe donc $c_1, \cdots, c_n \in A \cup B$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $x = c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} \cdots c_n^{\varepsilon_n}$. On peut supposer que $c_1 \in A$, soit i_1 le plus grand entier de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ tel que $c_{i_1} \in A$; si $i_1 = n$ donc $x \in A$, sinon soit i_2 le plus grand entier de $\{i_1 + 1, \cdots, n\}$ tel que $x \in B$; si $i_2 = n$ alors $x = \alpha_1 \cdot \alpha_2$ avec $\alpha_1 = c_1^{\varepsilon_1} \cdots c_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}$ et $\alpha_2 = c_{i_{1+1}}^{\varepsilon_{i_{1+1}}} \cdots c_n^{\varepsilon_n} \in B$, sinon soit i_3 le plus grand entier de $\{i_2 + 1, \cdots, n\}$ tel que $c_{i_3} \in A$; si $i_3 = n$ alors $x = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ avec $\alpha_3 = c_{i_{2+1}}^{\varepsilon_{i_{2+1}}} \cdots c_n^{\varepsilon_n} \in A$ et ainsi de suite...

Il existe donc

$\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2p+1} \in A$, $\alpha_2, \alpha_4, \cdots, \alpha_{2p} \in B$ tels que $x = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2p}$ ou $x = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{2p-1} \cdot \alpha_{2p} \cdot \alpha_{2p+1}$.

Exercices

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe S_n des permutations de $\{1, \cdots, n\}$ est engendré par les cycles de S_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n est engendré par les transpositions.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n est engendré par les $n - 1$ transpositions suivantes : $(1, 2)$, $(2, 3)$,$\cdots$, $(n - 1, n)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n est engendré par $H = \{\tau, s\}$ où $\tau = (1, 2)$ et $s = (1, 2, \cdots, n)$.

1.3 Comment montrer qu'un groupe est monogène ?

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Pour montrer que G est *monogène*, on montre qu'il existe $a \in G$ tel que G soit le sous-groupe engendré par $\{a\}$.

Autrement dit : Il existe $a \in G$ tel que $G = \{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

On remarque que tout *groupe monogène* est *commutatif*.

E X E M P L E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons par $U_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$. On sait que U_n muni de la multiplication des nombres complexes est un groupe.

Montrer que U_n est monogène.

U_n est l'ensemble des racines n$^{\text{imes}}$ de l'unité. On a donc :

$$U_n = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \cdots, n-1\} \right\}.$$

Posons $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, on a pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = a^k$, d'où

$$U_n = \left\{ a^k, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Par suite U_n est un groupe monogène.

Exercices

1. Soient G, G' deux groupes et f un morphisme de groupes de G dans G'. Montrer que si G est monogène et f est surjectif, alors G' est un groupe monogène.
2. Soit G un groupe monogène engendré par un élément a de G. Montrer que si H est un sous-groupe de G non réduit à $\{0\}$, alors H est monogène et engendré par un élément a^m, où m est un entier positif.
3. Montrer que l'ensemble des entiers relatifs multiples de n est un groupe monogène engendré par n.
4. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe monogène.

1.4 Comment montrer qu'un groupe est cyclique ?

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Pour montrer que G est *cyclique*, on montre que G est monogène et fini. Autrement dit :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists a \in G \text{ tels que } : G = \left\{e, a, a^2, \cdots, a^n\right\}.$$

E X E M P L E

Montrer que $(((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}), \times)$ **est un groupe cyclique.**

Remarquons que $\bar{3} = \bar{8} = \bar{2} \times \bar{2} \times \bar{2} = (\bar{2})^3$ et $\bar{4} = \bar{2} \times \bar{2} = (\bar{2})^2$.

Il existe donc $n = 3$ tel que $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}) = \left\{\bar{1}, \bar{2}, (\bar{2})^2, (\bar{2})^3\right\}$.

Par suite $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \times)$ est un groupe cyclique.

Exercices

1. Soient G, G' deux groupes et f un morphisme de groupes de G dans G'.
   Montrer que si G est cyclique et f est surjectif, alors G' est un groupe cyclique.

2. Soit G un groupe fini. On appelle *ordre* de G, le nombre d'éléments de G. Montrer que si G est d'ordre un nombre premier alors G est cyclique.

3. Soient $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ deux groupes et $*$ la loi définie sur $G_1 \times G_2$ par :

   $$\forall (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2, (g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$$

   (a) Montrer que $(G_1 \times G_2, *)$ est un groupe ;

   (b) Montrer que si G_1 est cyclique d'ordre n_1, G_2 est cyclique d'ordre n_2.
   Si de plus n_1 et n_2 sont premiers entre eux, alors $G_1 \times G_2$ est cyclique d'ordre $n_1 n_2$.

4. Montrer que $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \times)$ est un groupe cyclique.

1.5 Comment montrer qu'un sous-groupe d'un groupe est distingué (ou invariant) ?

Soient $(G,\cdot)$ un groupe et H un sous-groupe de G.

Pour montrer que H est *invariant* ou *distingué*, on montre que pour tout $a \in G$, $aHa^{-1} \subset H$.

Autrement dit : $\forall a \in G$, $\forall x \in H$, $axa^{-1} \in H$.

Remarque

Si $(G,\cdot)$ est un groupe commutatif, tout sous-groupe de G est distingué.

E X E M P L E

Soit $(G,\cdot)$ un groupe. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $x, y \in G$, $(xy)^n = x^n y^n$. On note $G^{(n)} = \{x^n, x \in G\}$.

a) Montrer que $G^{(n)}$ est un sous-groupe de G ;

b) Montrer que $G^{(n)}$ est distingué dans G.

a) Soient $x, y \in G^{(n)}$, montrons que $xy \in G^{(n)}$. Il existe $u, v \in G$ tel que $x = u^n$, $y = v^n$, comme $xy = u^n v^n = (uv)^n$ et $uv \in G$ car G est un groupe, donc $xy \in G^{(n)}$. Soit $x \in G^{(n)}$ et montrons que $x^{-1} \in G^{(n)}$. Il existe $u \in G$ tel que $x = u^n$, d'autre part comme $(u^n)^{-1} \cdot (u^n) = e_G$ et $\left(u^{-1}\right)^n \cdot u^n = \left(u^{-1}u\right)^n = e_G$ (e_G étant l'élément neutre de G), donc $(u^n)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^n$ d'où $x^{-1} = (u^n)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^n$ et par suite $x^{-1} \in G^{(n)}$. Par conséquent $G^{(n)}$ est un sous-groupe de G.

b) Soient $a \in G$ et $x \in G^{(n)}$, il existe donc $u \in G$ tel que $x = u^n$, et comme $axa^{-1} = au^n a^{-1} = \left(aua^{-1}\right)\left(aua^{-1}\right)\cdots\left(aua^{-1}\right) = \left(aua^{-1}\right)^n$ donc $axa^{-1} \in G^{(n)}$ et par suite $G^{(n)}$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercices

1. Soient G, G' deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
   (a) Montrer que pour tout sous-groupe distingué H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G ;
   (b) Montrer que si f est surjective, pour tout sous-groupe distingué H de G, $f(H)$ est un sous-groupe distingué de G.

*) Pour les exercices complémentaires : se reporter page : 187.

1.6 Comment déterminer la signature d'une permutation ?

Soit σ une permutation (un élément de S_n).

Pour déterminer la signature de σ, on décompose d'abord σ en produit de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints (cette décomposition est unique), soit m le nombre de cycles formant cette décomposition.

La signature de σ est alors $(-1)^{n-m}$.

E X E M P L E

Déterminer la signature de la permutation σ de S_{10} définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 7 & 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Décomposons d'abord σ en produit de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints. Pour cela, considérons les cycles suivants

$s_1 = (1,3,5)$, $s_2 = (2,6,4)$, $s_3 = (7)$, $s_4 = (8,9)$ et $s_5 = (10)$

On a : $\sigma = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 \circ s_5$.

La signature de σ est alors $\text{sig}(\sigma) = (-1)^{10-5} = (-1)^5 = -1$.

Exercices

1. Soit σ la permutation de S_5 définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Décomposer σ en produit de cycles à supports deux à deux disjoints ;

   (b) En déduire la signature de σ.

2. Calculer la signature de chacune des permutations suivantes

   (a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

   (c) $\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) & n \\ n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1.7 Comment montrer qu'un élément d'un anneau est nilpotent ?

Soit $(A,+,\times)$ un anneau et soit $a \in A$.

Pour montrer que a est *nilpotent*, on montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0_A$. (0_A étant l'élément neutre de $(A,+)$).

E X E M P L E

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$. On sait que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau.

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$, donc il existe $n = 2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et par suite A est nilpotente.

Exercices

1. Soient $(A,+,\times)$ un anneau et $x, y \in A$.
   (a) Montrer que si x est nilpotent alors $(1-x)$ est inversible et calculer son inverse ;
   (b) Montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.
   (c) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors $(x+y)$ est nilpotent.
2. Soient A, A' deux anneaux, f un morphisme d'anneau (voir tome 1) et $a \in A$.
   Montrer que si a est nilpotent dans A alors $f(a)$ est nilpotent dans A'.
3. On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+,\times)$.
   Déterminer les éléments nilpotents dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+,\times)$.
4. Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$, on considère les matrices suivantes
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 13 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A et B sont nilpotentes.

1.8 Comment montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal ?

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et I une partie de A.

Pour montrer que I est un *idéal* de A, on montre que $(I, +)$ est un sous-groupe de A et $(IA \subset I)$ et $(AI \subset I)$. Autrement dit :

$$I \neq \emptyset,\ \forall x, y \in I,\ x - y \in I \text{ et } \forall x \in I, \forall y \in A,\ (xy \in I \text{ et } yx \in I)\ \ (*).$$

Si l'anneau A est commutatif, la propriété $(*)$ peut être remplacée par

$$\forall x \in I, \forall y \in A, xy \in I.$$

E X E M P L E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $I = \{nx, x \in \mathbb{Z}\}$ (l'ensemble des multiples de n) est un idéal de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

• $0 \in I$ donc $I \neq \emptyset$.

• Soient $x, y \in I$, il existe donc $k, k^{'} \in \mathbb{Z}$ tels que $x = nk$ et $y = nk^{'}$.

On a : $x - y = nk - nk^{'} = n(k - k')$ donc $(x - y) \in I$.

Comme $(\mathbb{Z}, \times)$ est commutatif, il suffit de montrer que pour tout $x \in I$ et $y \in \mathbb{Z}$, $xy \in I$. Pour cela, soient $x \in I$ et $y \in \mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kn$. On a : $xy = nky = n\,(ky)$, donc $xy \in I$. Par suite I est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Exercices

1. Soient $(A, +, \times)$ un anneau, I et J deux idéaux de A.
   (a) Montrer que $I + J$ est un idéal de A ;
   (b) Montrer que $I + J$ est le plus petit idéal de A contenant $I \cup J$.
2. Soient $(A, +, \times)$ un anneau, I et J deux idéaux de A.
   On désigne par $I * J$ l'ensemble des u de A ayant la propriété suivante « Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $x_1, \cdots, x_n$ de n éléments de I et une famille $y_1, \cdots, y_n$ de n éléments de J tels que : $u = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ ».
   (a) Montrer que $I * J$ est un idéal de A ;
   (b) Montrer que $I * J \subset I \cap J$.
3. Soient $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ et $P_0\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes divisibles par P_0 dans $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire : $P_0\mathbb{R}[X] = \{P_0Q, Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
   Montrer que $P_0\mathbb{R}[X]$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 187.

1.9 Comment calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Pour calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on utilise les relations de compatibilité modulo n avec les lois $+$ et $\times$.

Autrement dit :

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a + c \equiv (b + d)\,[n] \\ ac \equiv bd\,[n] \end{array}\right.$$

$$(a \equiv b\,[n]) \Rightarrow (a^p \equiv b^p\,[n])\,.$$

E X E M P L E

Montrer que dans $\mathbb{Z}/111\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\overline{10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1} = \overline{0}$$

On remarque que $10^3 = 1000 = 1 + 9 \times 111$ donc $10^3 \equiv 1\,[111]$.

D'autre part

$$10^{6n+2} = \left(10^3\right)^{2n} \cdot 100 \equiv 1 \cdot 100\,[111]$$

$$10^{3n+1} = \left(10^3\right)^{n} \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10\,[111]$$

Donc $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \equiv (100 + 10 + 1)\,[111]$

Par suite : $\overline{10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1} = \overline{0}$.

Exercices

1. Montrer que dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{3^{2n} + 2^{6n-5}} = \overline{0}$.
2. Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, déterminer la classe de $(1341)^{2004}$.
3. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, déterminer la classe de $19^{52} \times 23^{41}$.
4. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $17\,|(2x + 3y) \Leftrightarrow 17\,|(9x + 5y)$.
5. Résoudre les équations suivantes
   (a) $x^2 + x + \overline{7} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$;
   (b) $x^2 - 4x + \overline{3} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Compléments sur les polynômes

2.1 Comment déterminer le PGCD de deux polynômes ?

2.2 Comment montrer que a est racine d'ordre k d'un polynôme ?

2.3 Comment montrer que deux polynômes sont premiers entre eux ?

2.4 Comment déterminer le PPCM de deux polynômes ?

2.5 Comment utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange ?

2.6 Comment utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme ?

2.7 Comment montrer qu'une famille de polynômes est libre ?

2.1 Comment déterminer le PGCD de deux polynômes ?

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle polynôme *normalisé*, tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ qui a 1 comme coefficient du monôme le plus haut degré.

Pour déterminer le PGCD des polynômes A et B, on peut

• Soit décomposer en produits de facteurs premiers. Le PGCD est alors le produit (normalisé) des facteurs communs pris avec la plus grande puissance.

• Soit utiliser l'algorithme d'Euclide : on effectue les divisions euclidiennes ci-dessous :

$A = BQ_1 + R_1$; $B = R_1Q_2 + R_2$; $R_1 = R_2Q_3 + R_3$; ... ; $R_k = R_{k+1}Q_{k+2} + R_{k+2}$

Le PGCD de A et B est alors le dernier reste *non nul* (et normalisé).

E X E M P L E

Déterminer le PGCD des polynômes A et B suivants

$$A = X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + X - 1 \; ; B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$$

L'utilisation de l'algorithme d'Euclide nous donne

	$1 = Q_1$	$-X^2 - 1 = Q_2$	$-X = Q_3$
A	$X^5 + X^4 + 2X^2 - 1 = B$	$-X^3 - X^2 + X = R_1$	$X^2 + X - 1 = R_2$
	$-X^3 - X^2 + X = R_1$	$X^2 + X - 1 = R_2$	0

Par suite, le PGCD des polynômes A et B est le polynôme :

$$D = R_2 = X^2 + X - 1.$$

Exercices

Déterminer dans chacun des cas suivants le PGCD des polynômes A et B.

1. $A = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$, $B = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$;
2. $A = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$, $B = 4X^3 + 6X^2 - 22X - 12$;
3. $A = X^3 + X^2 - X + 1$, $B = X^2 - X + 1$;
4. $A = X^{99} + 1$, $B = X^{45} + 1$;
5. $A = X^5 - X^4 - X^3 + 2X + 2$, $B = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 9X + 5$.

2.2 Comment montrer que a est racine d'ordre k d'un polynôme ?

Pour montrer que a est racine d'un polynôme P, on montre que $\tilde{P}(a) = 0$.

Pour montrer que a est racine d'ordre k d'un polynôme P, on montre que

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

E X E M P L E

1) Montrer que 2 est une racine du polynôme $P = X^2 - 5X + 6$.

2) Soit $P = X^6 + 3X^5 - 2X^4 - 16X^3 - 21X^2 - 11X - 2$**.**
Montrer que (-1) **est une racine du polynôme** P **et trouver son ordre de multiplicité.**

1) En effet : $\tilde{P}(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.

2) On a $\tilde{P}(-1) = 1 - 3 - 2 + 16 - 21 + 11 - 2 = 0$, donc -1 est une racine de P. Calculons P', P'' et $P^{(3)}$. On a

$$P' = 6X^5 + 15X^4 - 8X^3 - 48X^2 - 42X - 11,$$
$$P" = 30X^4 + 60X^3 - 24X^2 - 96X - 42,$$
$$P^{(3)} = 120X^3 + 180X^2 - 48X - 96,$$

d'où

$$\tilde{P}'(-1) = -6 + 15 + 8 - 48 + 42 - 11 = 0,$$
$$\tilde{P}"(-1) = 30 - 60 - 24 + 96 - 42 = 0$$
$$\text{et } \tilde{P}^{(3)}(-1) = -120 + 180 + 48 - 96 \neq 0.$$

Donc -1 est une racine de P d'ordre 3.

Exercices

1. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine -1 dans les polynômes suivants ?
   (a) $P = X^7 + 3X^6 + 3X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$;
   (b) $Q = X^5 + 7X^4 + 19X^3 + 25X^2 + 16X + 4$?
2. Trouver les racines du polynôme $X^5 - 1$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c pour que le polynôme $X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ ait une racine d'ordre 4.
   Quelle est alors cette racine ?
   Quelles sont les autres racines ?

2.3 Comment montrer que deux polynômes sont premiers entre eux ?

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour montrer que A et B sont *premiers entre eux*, on peut :

montrer qu'ils n'ont aucun diviseur irréductible commun ;

ou trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$;

ou montrer que le PGCD est égal à 1.

E X E M P L E

Dans chacun des cas suivants, montrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

a) $A = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$, $B = X^3 + 2X^2 - 3X$;

b) $A = X^2 + X + 1$, $B = X + 1$;

c) $A = X^3 + X^2 - X + 1$, $B = X^2 - X + 1$.

a) On vérifie que : -1 et 2 sont les zéros de A. Les entiers 0, 1 et (-3) sont les zéros de B d'où $A = (X+1)^2(X+2)$; $B = X(X-1)(X+3)$. Il s'ensuit que A et B n'ont aucun diviseur irréductible commun, par conséquent les polynômes A et B sont premiers entre eux.

b) On remarque que $1A - XB = 1$, donc il existe $U = 1$, $V = -X$ des polynômes tels que $AU + BV = 1$, d'où A et B sont premiers entre eux.

c) D'après l'algorithme d'Euclide, (voir exercice 3. de la méthode 1), on a $\mathrm{PGCD}(A, B) = 1$, donc A et B sont premiers entre eux.

Exercices

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$. On déterminera des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.
   (a) $A = X^4 + 1$, $B = X^3 + 1$;
   (b) $A = X^5 + 1$, $B = X^2 + 1$.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 188

2.4 Comment déterminer le PPCM de deux polynômes ?

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour déterminer le PPCM des polynômes A et B, le plus simple c'est de trouver le PGCD des polynômes A et B, puis on effectue la division euclidienne du polynôme $A \cdot B$ par le PGCD des polynômes A et B.

E X E M P L E

Trouver le PPCM des polynômes

$$A = X^5 - 5X^4 + 7X^3 + X^2 - 8X + 4,$$

$$B = X^4 + 2X^3 - 2X + 1.$$

Remarquons que -1 et 1 sont des racines de A et B ; ce qui nous permet de factoriser A et B. On trouve

$$A = (X-1)^2 (X-2)^2 (X+1) \quad \text{et} \quad B = (X+1)^3 (X-1).$$

Il s'ensuit que $\text{PGCD}(A, B) = (X-1)(X+1)$.

Donc le PPCM des polynômes A et B est $M = (X-1)^2 (X+1)^3 (X-2)^2$.

Exercices

Déterminer le PPCM des polynômes A et B dans chacun des cas suivants

1. $A = X^2 - X + 1$, $B = X^2 - X + 2$;
2. $A = \left(X^2 - 2X + 1\right)(X+3)$, $B = (X-1)\left(X^2 + X + 1\right)$;
3. $A = \left(X^2 + X\right)\left(5X^2 - 1\right)$, $B = (X-1)\left(3X^2 + 3\right)$;
4. $A = X(X+3)\left(X^2 - 9\right)$, $B = \left(X^2 + 3X\right)(4X - 5)$;
5. $A = (6X-1)(X+2)^2$, $B = (X+2)\left(3X - \frac{1}{2}\right)$.

2.5 Comment utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange ?

Soient $(n+1)$ nombres réels ou complexes *distincts* $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ et $(n+1)$ nombres réels ou complexes quelconques $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$.

On montre qu'il existe un unique polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de degré n tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n+1\}$, on ait : $\tilde{P}(x_i) = y_i$.

Ce polynôme s'écrit : $P = \sum_{k=1}^{n+1} \left(y_k \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \right)$ et s'appelle polynôme *interpolateur de Lagrange* associé à (x_i, y_i) où $i \in \{1, \cdots, n+1\}$.

E X E M P L E

Déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$\tilde{P}(0) = 1$, $\tilde{P}(1) = 2$ et $\tilde{P}(2) = 3$.

On a $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ et $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

$$P = \sum_{k=1}^{3} \left(y_k \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

$$P = y_1 \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$P = 1 \frac{(X - 1)(X - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} + 2 \frac{(X - 0)(X - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} + 3 \frac{(X - 0)(X - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)}$$

$$P = \frac{(X - 1)(X - 2)}{2} - 2X(X - 2) + \frac{3}{2} X(X - 1).$$

Exercices

1. Soient a, b, c des réels deux à deux distincts. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X - a)(X - b)(X - c)$.
2. Généraliser le résultat de l'exercice 1 à une famille quelconque $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels deux à deux distincts.
3. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que le polynôme $P - \left(X^4 - 2X\right)$ soit divisible par $X(X - 1)(X + 1)$.
4. Trouver un polynôme P de degré 4 tel que le polynôme $P - \left(X^6 - 4X^3 + 1\right)$ soit divisible par $(X - 2)(X - 1)X(X + 1)(X + 2)$.

2.6 Comment utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme ?

Soient $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $x_1, \cdots, x_n$ ses racines, donc $P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$.

Les relations entre les coefficients et les racines de P sont

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sigma_2 = \sum_{1\leq k<l\leq n} x_k x_l = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sigma_r = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r} = (-1)^r \frac{a_{n-r}}{a_n} \text{ et } \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

E X E M P L E

Soit $P = 2X^3 - X^2 - 7X + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Déterminer α, de façon que la somme de deux racines de P soit égale à 2.

Avec les notations de la méthode, $a_3 = 2$, $a_2 = -1$, $a_1 = -7$, $a_0 = \alpha$.

La somme des trois racines de P étant $\sigma_1 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$, l'une des racines est égale à $\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, donc $P = \left(X + \frac{3}{2}\right)\left(2X^2 - 4X + \frac{2}{3}\alpha\right)$.

En développant P, on obtient $P = 2X^3 - X^2 + \left(-\frac{12}{2} + \frac{2}{3}\alpha\right)X + \alpha$, il s'ensuit que $-\frac{12}{2} + \frac{2}{3}\alpha = -7$, d'où $\alpha = -\frac{3}{2}$.

Exercices

1. Déterminer les racines de l'équation $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$ sachant que la somme de deux de ses racines est égale à -1.
2. Déterminer les racines de l'équation $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$ sachant que le produit de deux de ses racines est égale à -6.
3. Déterminer un nombre complexe a pour que l'équation

   $$x^3 + 6x^2 - 6x + a = 0$$

   admette deux racines dont la somme et le produit sont égaux.

   Résoudre alors $x^3 + 6x^2 - 6x + a = 0$.

2.7 Comment montrer qu'une famille de polynômes est libre ?

Soit $P_0, \cdots, P_n$ une suite finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour montrer que la famille $P_0, \cdots, P_n$ est libre, il suffit de vérifier que les degrés des polynômes $P_0, \cdots, P_n$ sont deux à deux distincts.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq n\}$, on considère la suite de polynômes suivants :

$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$,

$P_3 = X(X-1)(X-2)$, $P_k = X(X-1)(\cdots)(X-(k-1))$,

$P_{n-1} = X(X-1)(\cdots)(X-(n-2))$ et $P_n = X(X-1)(\cdots)(X-(n-1))$.

Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarquons tout d'abord que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\deg(P_k) = k$, donc la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, il s'ensuit que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercices

1. Montrer que la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par :

   $$P_k = (X-a)^k$$

   est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit P un polynôme de degré n, montrer que la famille $\left(P, P', \cdots, P^{(n)}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

   $$P_n = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\cdots(X+n).$$

   Montrer que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 3

Dualité

3.1 Comment montrer qu'une application est une forme linéaire ?

3.2 Comment montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan ?

3.3 Comment déterminer l'orthogonal (par rapport à une forme linéaire) d'un sous-espace vectoriel ?

3.4 Comment utiliser l'orthogonalité ?

3.5 Comment déterminer la base duale d'une base donnée ?

3.6 Comment déterminer la base préduale d'une base donnée ?

3.7 Comment déterminer la transposée d'une application linéaire ?

3.8 Comment trouver un sous-espace supplémentaire d'un hyperplan ?

3.9 Comment montrer qu'une famille de formes linéaires est libre dans l'espace dual d'un espace vectoriel de dimension finie ?

3.1 Comment montrer qu'une application est une forme linéaire ?

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et φ une application définie sur E.

Pour montrer que φ est une forme linéaire sur E, on montre que φ est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et que φ est une application linéaire. Autrement dit

$$(\forall x \in E,\ \varphi(x) \in \mathbb{K}) \text{ et } (\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \varphi(x + \alpha y) = \varphi(x) + \alpha\varphi(y))$$

L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^*.

E X E M P L E

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{R}$. On considère l'application φ définie sur E par

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \tilde{P}''(1) + 3\tilde{P}'(0)$$

Montrer que φ est une forme linéaire.

Il est clair que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\tilde{P}'(0) \in \mathbb{R}$ et $\tilde{P}"(1) \in \mathbb{R}$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.

D'autre part, comme pour tout P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(P + \alpha Q)''(1) = \tilde{P}''(1) + \alpha\tilde{Q}''(1) \quad \text{et} \quad (P + \alpha Q)''(0) = \tilde{P}''(0) + \alpha\tilde{Q}''(0),$$

donc $\varphi(P + \alpha Q) = \varphi(P) + \alpha\varphi(Q)$. Par suite φ est une forme linéaire sur E.

Exercices

1. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.
   (a) Soit $f_0 \in E$. Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ qui à $f \in E$ associe $\varphi(f) = \int_0^1 f_0(t) f(t)\, dt$ est une forme linéaire sur E ;
   (b) Montrer que l'application δ de E dans $\mathbb{R}$ qui à $f \in E$ associe $\delta(f) = f(0)$ est une forme linéaire sur E.
2. L'espace $E = \mathbb{R}^n$ étant muni de sa base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$ et soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui associe à $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ le nombre $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Montrer que f est une forme linéaire sur E.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 188.

3.2 Comment montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de E.

Pour montrer que H est un hyperplan de E, il suffit de montrer que

$$\dim(H) = n - 1 \ ;$$

ou H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ;

ou H est le supplémentaire dans E d'une droite vectorielle de E.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel, on considère le sous-ensemble H de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\right\}.$$

Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Première méthode : Comme $H = \{x(1, 0, -3) + y(0, 1, 2), x, y \in \mathbb{R}\}$, donc $H = \text{Vect}\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$. Il s'ensuit que H est de dimension 2 car les vecteurs $(1, 0, -3), (0, 1, 2)$ ne sont pas proportionnels et donc forment une base de H. Ainsi H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ $\left(\dim H = 2 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - 1\right)$.

Deuxième méthode : Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & 3x - 2y + z \end{array}$$

On vérifie facilement que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. D'autre part,

$$\text{Ker}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\right\} = H,$$

donc H est le noyau d'une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$, par suite H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Troisième méthode : Remarquons que la famille $\{(1, 0, -3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, par suite

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\} \oplus \text{Vect}\{(0, 0, 1)\} = H \oplus \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}.$$

Donc H est le supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ d'une droite vectorielle, d'où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Exercices

Se reporter page : 188.

3.3 Comment déterminer l'orthogonal (par rapport à une forme linéaire) d'un sous-espace vectoriel ?

Soient E un espace vectoriel, L un sous-espace vectoriel de E.

Pour déterminer l'orthogonal de L (noté$L^{\perp}$), on cherche l'ensemble des formes linéaires φ telles que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in L$, c'est-à-dire

$$L^{\perp} = \{\varphi \in E^*, \forall x \in L, \varphi(x) = 0\}.$$

Quand E est de dimension finie, et si G est un sous-espace vectoriel de E^*, l'orthogonal de G est aussi : $G^{\perp} = \{x \in E^* : \forall \varphi \in G, \varphi(x) = 0\}$.

Voici quelques formules très utilisées

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F et G des sous-espaces vectoriels de E ou de E^*, on a

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F \text{ et } \dim\left(F^{\perp}\right) = n - \dim(F)$$

$$F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$$

$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp} \text{ et } (\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}.$$

E X E M P L E

Soit L le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = (1, 3, -2, 2), \quad u_2 = (1, 4, -3, 4) \quad \text{et} \quad u_3 = (2, 3, -1, -2).$$

Déterminer $L^{\perp}$.

Cherchons d'abord une base de $L = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$. En essayant de voir si la famille (u_1, u_2, u_3) est libre ou liée, on s'aperçoit que :

$$u_3 = -3u_2 + 5u_1 = 2u_2 - 5(u_2 - u_1)$$

Ainsi $L = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$.

Posons $v_1 = u_1 = (1, 3, -2, 2)$ et $v_2 = u_2 - u_1 = (0, 1, -1, 2)$, on en déduit que (v_1, v_2) est une base de L et $\dim\left(L^{\perp}\right) = 4 - 2 = 2$.

*) Pour la suite du corrigé de l'exemple, se reporter page : 241.

Exercices

Se reporter page : 189.

3.4 Comment utiliser l'orthogonalité ?

Soit E un espace vectoriel. Dans certains cas, pour démontrer une propriété (P) dans E, il est parfois plus simple de démontrer la propriété (P^*) c'est-à-dire celle qui traduit la propriété (P) dans l'espace dual E^*.

Voir formules dans l'énoncé de la méthode précédente.

E X E M P L E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\mathbb{R}_n[X]$, on considère les polynômes

$$P_0 = X^n, P_1 = (X+1)^n, ..., P_n = (X+n)^n.$$

Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Posons $V = \text{Vect}\{P_0, \cdots, P_n\}$, alors $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de E si et seulement si $E = V$ si et seulement si $V^\perp = \{0\}$.

Soit donc $f \in V^\perp$ et montrons que $f = 0$. On a

$$f \in V^\perp \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}, f(P_k) = 0)$$

Or pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $f(P_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^j f\left(X^{n-j}\right) = 0$.

Donc $f \in V^\perp$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 & \cdot & 0^n \\ 1 & 1 & 1^2 & \cdot & 1^n \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdot & 2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n & n^2 & \cdot & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} f(X^n) \\ \binom{n}{1} f\left(X^{n-1}\right) \\ \\ \\ \binom{n}{n} f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posons $M = \left(k^j\right)_{k,j}$, $M' = \left(k^j\right)_{k,j \in \{1,\cdots,n\}}$, $\det(M')$ est un déterminant de Van der Monde et on a : $\det(M) = \det(M') = 1$, donc $\det(M) \neq 0$.

Par suite pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}, f\left(X^k\right) = 0$.

Par conséquent $f = 0$.

Exercices

Dans$(\mathbb{R}_n[X])^*$, on considère les formes linéaires $(f_i)_{i \in \{0,\cdots,n\}}$ définies par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_i(P) = P(i).$$

Montrer que la famille $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ forme une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

3.5 Comment déterminer la base duale d'une base donnée ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

Pour déterminer la base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$, on considère la famille des formes linéaires $(f_1, \cdots, f_n)$ définies par :

$$(f_i(e_k) = 0 \text{ si } i \neq k) \quad \text{et} \quad (f_i(e_k) = 1 \text{ si } i = k).$$

Autrement dit

f_i est l'application qui au vecteur x associe sa i^{ime} coordonnée dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (i, j, k), on considère la base de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$e_1 = i + j + k, \quad e_2 = i - k \quad \text{et} \quad e_3 = j + k.$$

Déterminer la base duale de (e_1, e_2, e_3).

Soit (f_1, f_2, f_3) la base duale de (e_1, e_2, e_3), on a :

$$f_1(e_1) = 1 \text{ et } f_1(e_2) = f_1(e_3) = 0.$$

Si $u = xi + yj + zk$ alors $f_1(u) = xf_1(i) + yf_1(j) + zf_1(k)$.

Or

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(e_1) & = & 1 \\ f_1(e_2) & = & 0 \\ f_1(e_3) & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcccccl} f_1(i) & + & f_1(j) & + & f_1(k) & = & 1 \\ f_1(i) & & & - & f_1(k) & = & 0 \\ & & f_1(j) & + & f_1(k) & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où $f_1(i) = f_1(k) = 1$ et $f_1(j) = -1$.

Par suite $f_1(u) = x - y + z$.

Avec la même démarche, on obtient $f_2(u) = y - z$ et $f_3(u) = -x + 2y - z$.

La base duale de (e_1, e_2, e_3) est donc donnée par les formes linéaires f_1, f_2, et f_3 définies par

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f_1(u) = x - y + z, \quad f_2(u) = y - z \quad \text{et} \quad f_3(u) = -x + 2y - z.$$

Exercices

Se reporter page : 189

3.6 Comment déterminer la base préduale d'une base donnée ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, E^* son dual, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(l_1, \ldots, l_n)$ une base de E^*. On sait qu'il existe une unique base $(u_1, \ldots, u_n)$ de E dont la base duale est $(l_1, \ldots, l_n)$.

Pour déterminer $(u_1, \ldots, u_n)$, on considère d'abord la matrice P qui a pour *lignes* les coordonnées des formes linéaires $(l_1, \ldots, l_n)$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$, puis on calcule son inverse P^{-1}, enfin on écrit : $u_k = \sum_{i=1}^{n} q_{ik} e_i$: le k^{ime} uplet $(q_{1k}, \ldots, q_{nk})$ étant les coordonnées du k^{ime} vecteur colonne de P^{-1}.

E X E M P L E

Soient l_1, l_2, l_3 les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ définies par

$$l_1(x,y,z) = x + y + 3z, \quad l_2(x,y,z) = 5x - y + z \text{ et } l_3(x,y,z) = x - y - z$$

a) Montrer que (l_1, l_2, l_3) est une base de l'espace dual $(\mathbb{R}^3)^*$;

b) Trouver la base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est (l_1, l_2, l_3).

a) Notons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale de (e_1, e_2, e_3) et P la matrice dont les lignes sont les coordonnées des formes linéaires l_1, l_2, l_3 dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*).

On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\det P = -4 \neq 0$, donc (l_1, l_2, l_3) est libre et par suite une base de E^*.

En calculant P^{-1}, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

b) D'où : $u_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$, $u_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $u_3 = \left(-1, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

On vérifie que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est (l_1, l_2, l_3).

Exercices

Se reporter page : 190.

3.7 Comment déterminer la transposée d'une application linéaire ?

Soient E, F deux espaces vectoriels et h une application linéaire de E dans F. La transposée de h notée ${}^t h$ est l'application linéaire de F^* dans E^* définie par

$$\forall \psi \in F^*, {}^t h(\psi) = \psi \circ h.$$

Quand E et F sont de dimension finie ayant pour bases respectivement $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$, la matrice de ${}^t h$ relativement aux bases duales $\left(f_1^*, \cdots, f_p^*\right)$, $(e_1^*, .., e_n^*)$ est la transposée de la matrice de h relativement aux bases $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$.

E X E M P L E

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\left(1, X, X^2\right)$, on considère l'application linéaire h de E dans E définie par

$$h(P) = (X+1)P' + P$$

Déterminer la transposée de h.

La matrice de h relativement aux bases canoniques est

$$M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La transposée de $M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est ${}^t M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc ${}^t h$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ relativement aux bases duales.

Exercices

1. Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\varphi(x, y) = 3x - 2y$.
   Pour chacune des applications linéaires $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ suivantes, trouver ${}^t T(\varphi)$.
   (a) $T(x, y, z) = (x + 2y, y + z)$;
   (b) $T(x, y, z) = (2x + y + z, x - y)$.

*) Pour la suite des exercices, se reporter page : 190.

3.8 Comment trouver un sous-espace supplémentaire d'un hyperplan ?

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et H un hyperplan de E.

Pour trouver un sous-espace supplémentaire de H, il suffit de trouver un vecteur x qui n'appartient par à H, puis on considère la droite : $D = \text{Vect}(x) = \{\lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

D est alors un sous-espace supplémentaire de H dans E.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

Trouver un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Soit f la forme linéaire de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4.$$

On remarque que $H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\right\} = \text{Ker}(f)$, donc H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Soit $\vec{u} = (0, 0, 0, 1)$, il est clair que $f(\vec{u}) \neq 0$ donc $\vec{u} \notin H$, posons $D = \text{Vect}(\vec{u})$, D est alors un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère le sous-espace vectoriel H défini par

   $$H = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X], \tilde{P}(0) + 3\tilde{P}'(0) - 2\tilde{P}''(0) + 4\tilde{P}^{(3)}(0) = 0\right\}.$$

   Trouver un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ quatre nombres réels non nuls et soit H le sous ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

   $$H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda t = 0\right\}.$$

   Trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

3. Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, x_0, x_1, x_2, x_3 des réels deux à deux distincts et considérons le sous-ensemble H de E défini par

   $$H = \left\{P \in E,\ \ \tilde{P}(x_0) - 2\tilde{P}(x_1) + 3\tilde{P}(x_2) - \tilde{P}(x_3) = 0\right\}.$$

   Trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de H dans E.

3.9 Comment montrer qu'une famille de formes linéaires est libre dans l'espace dual d'un espace vectoriel de dimension finie ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \cdots, f_p)$ une famille d'éléments de E^* (avec $p \leq n$ sinon $(f_1, \cdots, f_p)$ est liée).

Pour montrer que $(f_1, \cdots, f_p)$ est libre dans E^*, on décompose d'abord chacune des f_i dans la base duale $B^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$, puis on utilise les résultats généraux d'algèbre linéaire.

E X E M P L E

Soient f_1, f_2, f_3 les formes linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f_1(x,y,z) = x - 3y + z, f_2(x,y,z) = x + 2y - z, f_3(x,y,z) = 2x - y + z.$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ sa base duale.

On a : $e_1^*(x,y,z) = x$, $e_2^*(x,y,z) = y$, $e_3^*(x,y,z) = z$.

Donc $f_1 = e_1^* - 3e_2^* + e_3^*$, $f_2 = e_1^* + 2e_2^* - e_3^*$, $f_3 = 2e_1^* - e_2^* + e_3^*$.

Il s'ensuit que

$$\det_{B^*}(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 - 1 - 4 - 1 + 3 = 5 \neq 0.$$

Par conséquent (f_1, f_2, f_3) est libre dans $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Exercices

1. Soient f_1, f_2, f_3 les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 - x_3$$

   (a) Montrer que les formes linéaires suivantes forment une base de E^* ;

   (b) Déterminer la base préduale de (f_1, f_2, f_3).

*) Pour la suite des exercices, se reporter page : 191.

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes et des matrices

4.1 Comment déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice ?

4.2 Comment déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ?

4.3 Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'un endomorphisme ?

4.4 Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'une matrice ?

4.5 Comment reconnaître un vecteur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice ?

4.6 Comment déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre ?

4.7 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (1) ?

4.8 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (2) ?

4.9 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (3) ?

4.10 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (4) ?

4.11 Comment déterminer le polynôme minimal d'un endomorphisme ?

4.12 Comment montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en utilisant le polynôme minimal ?

4.13 Comment diagonaliser une matrice carrée ?

4.14 Comment calculer les puissances d'une matrice diagonalisable ?

4.15 Comment résoudre certains systèmes de suites récurrentes ?

4.16 Comment résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants ?

4.17 Comment montrer qu'une matrice ou un endomorphisme est trigonalisable ?

4.1 Comment déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice ?

Soit M une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour déterminer le polynôme caractéristique de M, on forme d'abord la matrice $(M - XI_n)$ puis, on calcule le polynôme $P_M(X)$ défini par :

$$P_M(X) = \det(M - XI_n).$$

E X E M P L E

Déterminer le polynôme caractéristique associé à la matrice ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice A est

$$\begin{aligned} P_A(X) = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 2 \\ 2 & 1-X & 1 \\ 1 & 3 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)^2(3-X) - 5(1-X) + 12 \end{aligned}$$

ou encore : $P_A(X) = (1-X)^2(3-X) - 5(1-X) + 12$.

Exercices

Déterminer le polynôme caractéristique associé à chacune des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} -15 & -19 & -13 \\ 10 & 13 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & 1 \\ \mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$;
3. $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$;

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 192.

4.2 Comment déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ?

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

Pour déterminer le polynôme caractéristique de f, on forme d'abord la matrice A de f par rapport à une base de E, puis on calcule le polynôme caractéristique de A, qui est $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2)$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall u = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2, f(u) = (3x - y)e_1 + (x + 2y)e_2.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Formons d'abord la matrice A de f dans la base B. Pour cela, on calcule $f(e_1)$ et $f(e_2)$. On a

$f(e_1) = 3e_1 + e_2$, $f(e_2) = -e_1 + 2e_2$, d'où : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de f est donc

$$P_A(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 3 - X & -1 \\ 1 & 2 - X \end{vmatrix} = (3 - X)(2 - X) + 1.$$

Exercices

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = 2XP' - X^2P" + P.$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$;

   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de f.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z, x + 3y + z).$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$;

   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de f.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 192.

4.3 Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'un endomorphisme ?

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et λ un scalaire.

Pour montrer que λ est une valeur propre de f, on procède comme suit :

Si E est de dimension finie, on vérifie que λ est une racine du polynôme caractéristique de f, *sinon*, on trouve un vecteur *non nul* u de E tel que : $f(\lambda u) = \lambda u$.

E X E M P L E

Déterminer les valeurs propres des endomorphismes suivants

a) f **de** $\mathbb{R}[X]$ **défini par :** $f(P) = \left(X^3 + X\right) P' - \left(3X^2 - 1\right) P$ **;**

b) g **de** $\mathbb{R}^2$ **défini par :** $g(x, y) = (x + y, x + 2y)$**.**

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que : $f(P) = \lambda P$.
Considérons donc un polynôme $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$, on a : $f(P) = \lambda P$ si et seulement si

$$(n-3)\, a_n X^{n+2} + \ldots = \lambda(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0),$$

d'où : $n = 3$. Il s'ensuit que
$f(P) = -a_2 X^4 + (3a_3 + a_1 - 3a_1 + a_3)X^3 + (2a_2 - 3a_0 + a_2)X^2 + 2a_1 X + a_0$.
Après calcul, on trouve

$$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -a_2 & = & 0 \\ 4a_3 - 2a_1 & = & \lambda a_3 \\ 3a_2 - 3a_0 & = & \lambda a_2 \\ 2a_1 & = & \lambda a_1 \\ a_0 & = & \lambda a_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -a_2 & = & 0 \\ (4-\lambda)a_3 & = & 2a_1 \\ a_0 & = & 0 \\ (2-\lambda)a_1 & = & 0 \\ (1-\lambda)a_0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 4 \Rightarrow a_3 = a_1 = 0$ et comme $(a_0 = a_2 = 0)$, donc $P = 0$.
Si $\lambda = 2$, le polynôme $P = X^3 + X$ vérifie $f(P) = 2P$.
Si $\lambda = 4$, le polynôme $P = X^3$ vérifie $f(P) = 4P$.
Donc les valeurs propres de f sont $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$.

*) Pour la suite du corrigé de l'exemple, se reporter page : 208.

Exercices

Se reporter page : 192.

4.4 Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'une matrice ?

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour montrer que λ est une valeur propre de A, on montre que λ est une racine du polynôme caractéristique de A, ou encore il existe une matrice uni-colonne X telle que : $AX = \lambda X$.

E X E M P L E

Trouver les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ **de** $M_3(\mathbb{R})$**.**

Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 0-X & 1 & -1 \\ 1 & 4-X & -2 \\ 2 & 6 & -3-X \end{vmatrix}.$$

Après calcul, on trouve : $P_A(X) = (1-X)\left(X^2+1\right)$.

Donc la seule valeur propre de A est $\lambda_1 = 1$.

Exercices

Trouver les valeurs propres des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} -15 & -19 & -13 \\ 10 & 13 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
2. $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 6 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.5 Comment reconnaître un vecteur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice ?

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E et u un vecteur de E. Pour montrer que u est un *vecteur propre* de f, il suffit de vérifier que $u \neq 0$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f(u) = \lambda u$.

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et u un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Pour montrer que u est un *vecteur propre* de A, il suffit de vérifier que $u \neq 0$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $AU = \lambda U$ (U étant la matrice unicolonne associé à u).

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs : $e_1 + e_3$, $e_1 - e_3$ et e_2 sont des vecteurs propres de f.

On voit bien que :

• $f(e_1 + e_3) = (e_1 + e_3) + (e_1 + e_3) = 2(e_1 + e_3)$, donc il existe $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(e_1 + e_3) = \lambda(e_1 + e_3)$;

• $f(e_1 - e_3) = (e_1 + e_3) - (e_1 + e_3) = 0 \cdot (e_1 - e_3)$, donc il existe $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(e_1 - e_3) = \lambda(e_1 - e_3)$;

• $f(e_2) = e_2$, donc il existe $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_2) = \lambda(e_2)$.

Par suite $e_1 + e_3$, $e_1 - e_3$ et e_2 sont des vecteurs propres de f.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans B est : $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Montrer que les vecteurs $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 0, 1)$ sont des vecteurs propres de f.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 192.

4.6 Comment déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre ?

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à λ, on résout $f(u) = \lambda u$, d'incon- nue u. Le sous-espace propre associé à λ est alors le sous-espace vectoriel de E engendré par l'ensemble des solutions de cette équation.

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et λ une valeur propre de A. Pour déterminer le sous-espace propre associé à λ, on résout l'équation $AX = \lambda X$ ou $(A - \lambda I_n)X = 0$ d'inconnue X. Le sous-espace propre associé à λ est alors le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par l'ensemble des solutions de cette équation.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est : $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le réel $\lambda = -1$ est une valeur propre ;

b) Trouver le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$.

a) On a : $M(f) - (-1) I_3 = M(f) + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, donc $\det(M(f) + I) = 0$, d'où $\lambda = -1$ est une valeur propre de f.

b) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur propre associé à $\lambda = -1$, on a :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 2z = 0 \\ 8x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 3y - 2z = 0$$

Le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$ est donc le plan d'équation

$$4x + 3y - 2z = 0.$$

Exercices

Se reporter page : 193.