Pierre-Loïc Méliot

Chaînes de Markov

Théorie et applications

Cours avec exercices
et problèmes corrigés



L3
Master
Agrégation

ellipses

Références sciences

Chaînes de Markov

Théorie et applications

Pierre-Loïc Méliot

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-121591
Dépôt légal : novembre 2026
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Lorsqu'on observe un système physique ou biologique complexe, une mesure du système au cours du temps $X = X(t)$ peut être considérée comme une fonction *aléatoire* à valeurs réelles. Autrement dit, c'est une fonction

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\mapsto X(\omega, t) \end{aligned}$$

dépendant de l'état microscopique (inconnu) ω du système, et du temps t. Pour simplifier, on peut supposer que l'état du système est mesuré à des intervalles de temps réguliers ; alors, quitte à choisir l'échelle de temps, on peut remplacer le temps $t \in \mathbb{R}$ par des valeurs entières $n \in \mathbb{N}$. Notons $X_n(\omega) = X(\omega, n)$. La mesure du système est donc donnée par une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de *variables aléatoires*, qui sont les objets d'étude de la théorie mathématique des probabilités.

Une première hypothèse que l'on peut faire sur ces variables est leur *indépendance* totale : pour tous temps $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, les mesures $X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_k}$ sont indépendantes. C'est vraisemblable pour certaines observations, et pratique pour les calculs, mais cela ne rend pas bien compte de l'*évolution* du système au cours du temps. Par exemple, si l'on considère l'orientation X_n d'une feuille d'un arbre portée par un cours d'eau (donnée par un angle par rapport au sens du courant), alors :

- chaque mesure X_n est bien aléatoire, car la connaissance simultanée de tous les paramètres physiques déterminant l'orientation de la feuille est quasiment impossible (il faudrait connaître la position initiale de la feuille au moment précis où elle tombe sur l'eau, sa vitesse initiale, le poids de la feuille, la direction et l'intensité du courant tout le long du chemin de la feuille, *etc.*).

- en revanche, si la mesure $X_n = X_n(\omega)$ est connue, alors les mesures d'orientation suivantes $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ sont probablement assez proches de X_n, en particulier si la feuille s'est déjà alignée avec le courant.

Au moins pour les systèmes physiques, le passé n'a pas d'importance : si l'on connaît tous les paramètres du système au temps $t = t_0$, alors ces paramètres déterminent l'entière évolution du système en temps $t' > t_0$: il n'y a pas besoin de connaître les mesures passées aux temps $t' < t_0$. Avec la description en temps discret choisie précédemment, pour modéliser correctement les mesures d'un système, il faut donc des suites de variables aléatoires telles que, *sachant le passé* $(X_0, X_1, \dots, X_n)$, X_{n+1} est

une fonction aléatoire du *présent* X_n. Ceci nous mène aux chaînes de Markov, qui sont ces suites aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec une propriété *d'indépendance conditionnellement au présent du futur par rapport au passé*.

Notre livre est consacré aux propriétés mathématiques des chaînes de Markov, qui sont des objets très importants de la théorie des probabilités. Il s'appuie sur des cours qui ont été donnés pendant une dizaine d'années aux étudiants de l'Université Paris-Saclay, et aux étudiants de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA). Les publics multiples de ces cours ont mené à des présentations diverses, et aux deux parties de ce livre :

1. La première partie (chapitres 1 à 4) est consacrée à la *théorie* des chaînes de Markov, et elle en présente tous les aspects essentiels :

   - définitions et propriété de Markov (chapitre 1) ;
   - récurrence et transience, classification des états (chapitre 2) ;
   - mesures invariantes, périodicité, et théorèmes limites (chapitre 3).

   Tous les résultats sont énoncés et démontrés ; et ils sont illustrés par de nombreux exemples soit dans le corps du texte, soit dans des exercices à la fin de chaque chapitre. Cette première partie se conclut par une liste de problèmes (chapitre 4) qui sont adaptés d'examens donnés aux étudiants précédemment mentionnés ; leurs solutions emploient l'ensemble des résultats théoriques présentés.

2. La seconde partie (chapitres A à D) est consacrée aux *applications* des chaînes de Markov, et elle débute par une introduction alternative de ces objets, fondée sur l'étude approfondie de trois marches aléatoires. L'une des applications les plus importantes de la théorie est la méthode de simulation de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Cette méthode est présentée dans le chapitre B. Ainsi, on peut engendrer des objets aléatoires suivant n'importe quelle loi sur un ensemble fini, à condition de trouver une chaîne de Markov qui admette cette loi comme mesure invariante. La vitesse de convergence de cette procédure est étudiée en détail dans le chapitre C. Enfin, la partie d'applications se conclut comme la première partie par une liste de problèmes (chapitre D). Chaque problème introduit un modèle de chaîne de Markov et établit les propriétés importantes de ce modèle, ce qui permet de simuler des objets aléatoires intéressants.

Les deux parties ont été enseignées séparément, et pour cette raison, elles sont quasiment indépendantes l'une de l'autre. En particulier, le chapitre A des applications peut vraiment être lu sans rien connaître de la partie théorique. Les deux autres chapitres

B et C de la partie d'applications s'appuient beaucoup sur le théorème de convergence vers la loi stationnaire des chaînes finies irréductibles apériodiques ; ils restent accessibles si l'on admet ce seul résultat.

Une partie très importante du livre est constituée d'exercices et de problèmes ; leurs solutions sont à chaque fois données en intégralité, y compris pour les quelques questions de programmation des problèmes de la partie d'applications. On peut utiliser ces éléments pour remplacer dans un cours les exemples donnés dans le corps du texte. Par exemple, dans la partie d'applications, le modèle des coloriages propres peut être utilisé en lieu et place du modèle d'Ising et du modèle des partitions planes pour illustrer la plupart des résultats. Certains titres d'exercices sont suivis du chiffre I ou II ; dans ce cas, les deux parties sont liées, et il est conseillé de traiter la partie I (qui est souvent dans un chapitre précédent) avant d'aborder la partie II. Certains problèmes sont librement inspirés de textes qui ont été donnés aux oraux de l'option de probabilités-statistiques du concours de l'agrégation de mathématiques : plus précisément, les problèmes 4.7 et D.2.

Le livre s'adresse principalement aux étudiants en mathématiques à partir de la troisième année (à l'université ou en école d'ingénieurs). Il sera également utile pour la préparation à l'agrégation, en particulier l'option de probabilités-statistiques. Les prérequis à la lecture sont les suivants :

- une connaissance générale des mathématiques de niveau licence ;
- une connaissance sommaire de la théorie des probabilités : rudiments de théorie de la mesure et notions d'espace de probabilités, de variable aléatoire et de loi.

Ainsi, le premier chapitre requiert immédiatement d'être familier avec les variables aléatoires. Néanmoins, la nature des chaînes de Markov (suite de variables aléatoires à valeurs dans des espaces discrets) simplifie de nombreux arguments. Ainsi, après les premières définitions, tous les calculs de probabilité mettront en jeu des sommes ou des séries discrètes (en général, de nombres positifs), de sorte qu'il est possible de comprendre l'intégralité du livre en ne connaissant presque rien de la théorie générale de la mesure. Une contrepartie de ce choix de présentation est que l'on évitera les arguments reposant sur les notions de tribu et de filtration. Ceci restreindra un peu le cadre d'application de la propriété de Markov simple, et nous forcera à énoncer une propriété de Markov forte dans un cas particulier, à savoir celui où le temps par lequel on décale la chaîne est un temps de retour en un état ; mais c'est de loin le cas le plus important.

Dans la partie d'applications, des exercices à la fin du chapitre B et certaines questions des problèmes du chapitre D demandent de programmer sur ordinateur divers algorithmes. Le langage `Python` est particulièrement adapté à ces exercices, et

nous supposerons dans les énoncés et leurs solutions que c'est ce qui est employé (en conjonction éventuellement des modules scientifiques `numpy`, `sympy`, `matplotlib` et `networkx`). Les programmes présentés ont été testés avec la dernière version 3.14 de `Python`, et ils sont probablement compatibles avec des versions antérieures de ce langage de programmation. Il n'y a pas dans ce livre un cours de programmation pour apprendre la syntaxe et la logique des algorithmes de simulation aléatoire dont nous donnons le code. Néanmoins, les deux dernières sections du chapitre B sont des feuilles d'exercices qui introduisent l'essentiel de ce dont on se sert en terme de programmation en `Python`.

Ce livre n'aurait pas été possible sans les nombreuses personnes qui m'ont accompagné dans les enseignements de chaînes de Markov que j'ai donnés, en tant que responsable de cours, responsable de formation, chargé de travaux dirigés ou simplement collègue au laboratoire de mathématiques d'Orsay. J'adresse en particulier de chauds remerciements à Laurent Bourgeois, Alexandre Goupy, Benjamin Graille, Olympio Hacquard, Olivier Hénard, Christine Keribin, Jean-François Le Gall, Sophie Lemaire, Paul Melotti, Mohamed Mrad, qui ont été à mes côtés à l'université Paris-Saclay ou à l'ENSTA et qui ont contribué au bon déroulement des dits enseignements. Leurs remarques et conseils m'ont aidé à créer un cours sur les chaînes de Markov qui se veut le plus accessible possible, et qui permet aux étudiants de découvrir agréablement les nombreuses subtilités et merveilles de cette théorie. Un remerciement particulier est dû à Olivier Hénard, qui était responsable du cours de chaînes de Markov à l'ENSTA avant que je le reprenne en 2020, et dont certains énoncés d'exercices de feuilles de travaux dirigés ont été repris et adaptés dans les chapitres 1 à 3.

Des remerciements d'une nature plus profonde sont adressés à ma famille pour leur support constant, en particulier ma femme Véronique et nos deux enfants Armand et Camille.

Table des matières

I Théorie **1**

1 Propriété de Markov **3**
1.1 Matrices de transition et chaînes de Markov 3
1.2 Construction et exemples de chaînes de Markov 10
1.3 Propriété de Markov et méthode d'un pas en avant 18
1.4 Exercices 24
1.5 Solutions 32

2 Récurrence et transience **49**
2.1 Nombre de visites d'un état 49
2.2 Classification des états 51
2.3 Exercices 61
2.4 Solutions 68

3 Théorèmes ergodiques **81**
3.1 Mesures invariantes 81
3.2 Convergence vers la loi stationnaire 88
3.3 Loi des grands nombres pour les nombres de visites 96
3.4 Exercices 99
3.5 Solutions 107

4 Problèmes **121**
4.1 Un problème d'urnes 121
4.2 Marches aléatoires et transformée de Fourier 125
4.3 Marche de paramètre α dans le plan 136
4.4 Modélisation d'une chaîne de réparation 146
4.5 Maximum de variables géométriques 150
4.6 Chaîne de Markov serpent 153
4.7 Mélange de cartes top-to-random 160

II Applications **175**

A Marches aléatoires **177**
A.1 Marche aléatoire sur le cercle 177
A.2 Marche aléatoire sur la droite 185
A.3 Marche aléatoire dans l'espace 195

B Simulation de variables aléatoires **203**
B.1 Le modèle d'Ising et les partitions planes aléatoires 203
B.2 Algorithme de Metropolis 211
B.3 Couplage par le passé 217
B.4 Chaînes de Markov et Python 222
B.5 Simulation de lois par l'algorithme de Metropolis 228

C Temps de mélange **231**
C.1 Généralités sur la distance en variation totale 231
C.2 Méthodes spectrales et phénomène de coupure 235
C.3 Méthodes de couplage 245

D Modèles **251**
D.1 Coloriages propres d'un graphe 251
D.2 Modèle de biodiversité des mesures d'Ewens 265
D.3 Chaîne des transpositions adjacentes 279
D.4 Étude spectrale des urnes d'Ehrenfest 290
D.5 Algorithme de Metropolis–Hastings 304
D.6 Correspondance de Gibbs–Markov 316
D.7 Modèle de Curie–Weiss 331

Pour approfondir **347**

Bibliographie **349**

Index **351**

Partie I

Théorie

Chapitre 1. Propriété de Markov

Les premiers résultats classiques de la théorie des probabilités (la loi des grands nombres, le théorème central limite, *etc.*) concernent les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes : pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} est indépendant des variables précédentes $X_0, \dots, X_n$ (ce qu'on appellera le *passé de la trajectoire*). On peut se demander ce qui se passe si l'on relaxe un peu cette hypothèse, en demandant par exemple que :

$$X_{n+1} \text{ ne dépend du passé qu'au travers de la dernière variable } X_n.$$

L'objectif de ce premier chapitre est de formaliser cette idée, et d'étudier les premières propriétés des suites de variables aléatoires correspondantes, qu'on appellera *chaînes de Markov*.

1.1 Matrices de transition et chaînes de Markov

On fixe dans tout ce chapitre un ensemble $\mathfrak{X}$ fini ou dénombrable, donc en bijection avec une partie de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. On dit que $\mathfrak{X}$ est un *espace d'états*. Nos suites de variables aléatoires prendront leurs valeurs dans $\mathfrak{X}$. Cette restriction interdit par exemple de considérer des chaînes de Markov à valeurs dans l'ensemble non dénombrable des réels $\mathbb{R}$; mais elle peut être levée sans grandes difficultés si l'on approfondit un peu la théorie qui sera développée ici. L'avantage de la restriction aux espaces d'états dénombrables est qu'elle ôte la plupart des subtilités de théorie de la mesure. Une *probabilité* sur $\mathfrak{X}$ est une famille de nombres réels positifs $(p(x))_{x\in\mathfrak{X}}$ telle que

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}} p(x) = 1.$$

Étant donnée une telle probabilité p, la probabilité d'une partie $A \subset \mathfrak{X}$ est donnée par $p(A) = \sum_{x\in A} p(x)$.

Définition 1.1 (Matrice stochastique)**.** *Une matrice stochastique, ou matrice de transition sur $\mathfrak{X}$ est une famille $(P(x,y))_{x,y\in\mathfrak{X}}$ de nombres réels positifs telle que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$,*

$$\sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y) = 1.$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $P(x,\cdot)$ est une probabilité sur $\mathfrak{X}$.

Exemple 1.2. Sur $\mathfrak{X} = \{1, 2, 3\}$, la matrice suivante est une matrice stochastique :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

En effet, les entrées de la matrice sont positives (au sens large), et la somme sur chaque ligne vaut 1.

Dans tout ce qui suit, étant fixé un espace d'états $\mathfrak{X}$, une probabilité $(\pi(x))_{x\in\mathfrak{X}}$ sur $\mathfrak{X}$ sera toujours donnée par un vecteur ligne. Par exemple, $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est la probabilité uniforme sur l'espace $\{1, 2, 3\}$. Si l'espace d'états est infini, il faut s'imaginer un vecteur ligne de longueur infinie. Cette convention d'écriture permet l'observation suivante :

Proposition 1.3. *Soit P une matrice stochastique sur un espace d'états $\mathfrak{X}$.*

1. *Pour toute probabilité $\pi = (\pi(x))_{x\in\mathfrak{X}}$ sur $\mathfrak{X}$, le produit matriciel πP est une nouvelle probabilité sur $\mathfrak{X}$.*

2. *Pour toute autre matrice stochastique Q sur $\mathfrak{X}$, le produit matriciel PQ est encore une matrice stochastique.*

Démonstration. Supposons pour commencer que $\mathfrak{X}$ est un ensemble fini de taille N. Une probabilité sur $\mathfrak{X}$ est alors un vecteur ligne de taille N, et une matrice stochastique sur $\mathfrak{X}$ est une matrice de taille $N \times N$. Si π est une probabilité sur $\mathfrak{X}$ et si P est une matrice stochastique sur $\mathfrak{X}$, alors pour tout $x \in \mathfrak{X}$,

$$(\pi P)(x) = \sum_{w\in\mathfrak{X}} \pi(w)\, P(w, x).$$

Cette quantité est positive en tant que somme de nombres positifs, et on obtient bien une nouvelle probabilité, car

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}} (\pi P)(x) = \sum_{(w,x)\in\mathfrak{X}^2} \pi(w)\, P(w, x) = \sum_{w\in\mathfrak{X}} \pi(w) = 1$$

en utilisant la propriété de matrice stochastique pour la seconde identité, et le fait que π est une probabilité pour la dernière identité. Ceci prouve le premier point, et le second point s'en déduit immédiatement, car pour tout $x \in \mathfrak{X}$,

$$\begin{aligned}(PQ)(x, \cdot) &= \underbrace{P(x, \cdot)}_{\text{ligne d'une matrice stochastique}} \times \underbrace{Q}_{\text{matrice stochastique}} \\ &= \text{probabilité} \times \text{matrice stochastique} = \text{probabilité}.\end{aligned}$$

Si $\mathfrak{X}$ est un ensemble infini (dénombrable), ceci ne change rien : la seule différence est que les sommes considérées peuvent maintenant être des séries de nombres positifs. Notons qu'en règle générale, on ne peut pas définir correctement le produit matriciel pour des matrices de taille infinie, à cause de problèmes de sommabilité. Mais il n'y a pas de problème si tous les coefficients des matrices sont positifs, et ce sera toujours le cas dans nos calculs. □

Fixons une matrice de transition P sur un espace d'états $\mathfrak{X}$. Une chaîne de Markov de matrice P sur $\mathfrak{X}$ est une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments aléatoires de $\mathfrak{X}$, dont la loi, qui est une probabilité sur l'ensemble $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$, vérifie certaines propriétés qui seront décrites ci-dessous (voir la définition 1.5). L'une des difficultés de la théorie des chaînes de Markov est que l'on doit manipuler des probabilités sur l'ensemble $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites à valeurs dans $\mathfrak{X}$; or, dès que $\mathrm{card}(\mathfrak{X}) \geq 2$, cet ensemble est non dénombrable, et manipuler des probabilités sur un tel ensemble pose des problèmes de théorie de la mesure. Le paragraphe suivant donne des définitions et des résultats qui vont nous permettre de surmonter ces obstacles théoriques. Par souci de rigueur, certains énoncés dans ce qui suit utilisent les notions usuelles de théorie de la mesure (tribu, partie mesurable, *etc.*) ; mais c'est à peu près le seul endroit du livre où on en aura besoin, et on peut sans doute comprendre tout le reste indépendamment de ces arguments.

On appelle *trajectoire* une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'états de l'espace $\mathfrak{X}$. Un *cylindre à horizon* $N \geq 0$ est un ensemble de trajectoires de la forme

$$C(y_0, y_1, \dots, y_N) = \{\text{trajectoires } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, x_0 = y_0, x_1 = y_1, \dots, x_N = y_N\};$$

c'est donc une partie de $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathscr{F}_N$ la plus petite tribu sur l'ensemble $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ qui contient tous les cylindres à horizon N (on rappelle qu'une tribu est un ensemble de parties qui contient $\emptyset$ et $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$, qui est stable par union dénombrable, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire). Il est facile de voir que les événements de $\mathscr{F}_N$ sont toutes les unions dénombrables de cylindres à horizon N :

$$\mathscr{F}_N = \left\{ \bigsqcup_{(y_0,\dots,y_N)\in A} C(y_0, \dots, y_N), \;\; A \text{ partie de } \mathfrak{X}^{N+1} \right\}.$$

Chaque cylindre à horizon N est une union disjointe de cyclindres à horizon $N+1$:

$$C(y_0, y_1, \dots, y_N) = \bigsqcup_{y_{N+1}\in\mathfrak{X}} C(y_0, y_1, \dots, y_N, y_{N+1}).$$

Ceci implique que les tribus $\mathscr{F}_N$ sont croissantes pour l'inclusion :

$$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_N \subset \mathscr{F}_{N+1} \subset \cdots$$

Lorsqu'on observe des trajectoires dans $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$, il faut comprendre $\mathscr{F}_N$ comme l'ensemble des événements qu'on peut mesurer en se fondant uniquement sur ce que l'on peut voir jusqu'au temps N.

Théorème 1.4 (Kolmogorov)**.** *Soit $\mathscr{F}$ la plus petite tribu sur l'ensemble des suites $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ qui contient toutes les tribus $\mathscr{F}_N$.*

1. *La donnée d'une probabilité p sur $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_N$ est équivalente à la donnée de toutes les probabilités de cylindres $p(C(y_0,\dots,y_N))$, avec la règle de compatibilité*
$$p(C(y_0,\dots,y_N)) = \sum_{y_{N+1}\in\mathfrak{X}} p(C(y_0,\dots,y_N,y_{N+1}))$$
pour toute famille finie $(y_0,\dots,y_N)$, et avec $\sum_{y_0\in\mathfrak{X}} p(C(y_0)) = 1$.

2. *Supposons donnée une telle fonction p. Alors, il existe un unique prolongement de p à toute la tribu $\mathscr{F}$, qui en fait une mesure de probabilité sur cette tribu.*

Le théorème ci-dessus indique que, pour définir correctement une probabilité p sur l'ensemble $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ de toutes les trajectoires, il suffit de la définir sur les cylindres. Notons que la tribu $\mathscr{F}$ est en général strictement plus grande que l'union $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_N$. En effet, si $x \in \mathfrak{X}$, alors l'événement

$$E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, x_n = x \text{ pour } n \text{ assez grand}\}$$

n'est pas dans $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_N$ (on ne peut pas décider si une suite est stationnaire à x à partir d'observations à horizon fini), mais il est bien dans la tribu $\mathscr{F}$, car

$$E = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{M\geq N} \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, x_M = x\} \right);$$

c'est donc l'union dénombrable d'intersections dénombrables d'événements dans les tribus $\mathscr{F}_M$. Le théorème 1.4 est un cas particulier des résultats classiques d'existence de mesures de probabilité sur un espace produit. La première partie est très facile à établir, et la seconde partie peut par exemple être prouvée en utilisant le lemme de classe monotone. Nous ne rentrerons pas dans les détails de la démonstration ; tout ceci n'est pas vraiment important pour la suite, mais rend rigoureux la définition suivante.

Définition 1.5 (Chaîne de Markov)**.** *Soit $\mathfrak{X}$ un espace d'états (fini ou dénombrable), et P une matrice stochastique sur $\mathfrak{X}$. Une chaîne de Markov de matrice de transition P est une trajectoire aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$, dont la loi est donnée sur les cylindres par la formule suivante :*

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N] = \pi_0(x_0)\, P(x_0,x_1)\, P(x_1,x_2) \cdots P(x_{N-1},x_N),$$

π_0 étant une certaine mesure de probabilité sur $\mathfrak{X}$. On dit alors que π_0 est la loi initiale de la chaîne de Markov ; $\mathbb{P}[X_0 = x_0] = \pi_0(x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathfrak{X}$.

Si la loi initiale π_0 est donnée, alors la fonction définie sur les cylindres par

$$p(C(x_0, \dots, x_N)) = \pi_0(x_0)\, P(x_0, x_1) \cdots P(x_{N-1}, x_N)$$

est bien une probabilité, et elle vérifie bien la condition de compatibilité du premier point du théorème 1.4. En effet, pour voir que p est une probabilité, notons qu'elle prend bien ses valeurs dans $[0, 1]$ pour tout cylindre, et qu'on a bien

$$p(\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}) = p\left(\bigsqcup_{x_0 \in \mathfrak{X}} C(x_0)\right) = \sum_{x_0 \in \mathfrak{X}} \pi_0(x_0) = \pi_0(\mathfrak{X}) = 1.$$

Pour la compatibilité, on utilise le caractère stochastique de la matrice P :

$$\begin{aligned}
&\sum_{y_{N+1} \in \mathfrak{X}} p(C(y_0, \dots, y_{N+1})) \\
&\qquad = \sum_{y_{N+1} \in \mathfrak{X}} \pi_0(y_0)\, P(y_0, y_1)\, P(y_1, y_2) \cdots P(y_N, y_{N+1}) \\
&\qquad = \pi_0(y_0)\, P(y_0, y_1) \cdots P(y_{N-1}, y_N) \left(\sum_{y_{N+1} \in \mathfrak{X}} P(y_N, y_{N+1})\right) \\
&\qquad = \pi_0(y_0)\, P(y_0, y_1) \cdots P(y_{N-1}, y_N) = p(C(y_0, \dots, y_N)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on se donne π_0 et P, alors par le théorème de Kolmogorov 1.4 il existe une unique probabilité sur les trajectoires dans $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie la formule de la définition 1.5. On notera cette probabilité $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$ ou plus simplement $\mathbb{P}_{\pi_0}$, la matrice P étant sous-entendue. La théorie des chaînes de Markov est l'étude des propriétés des suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui suivent une loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$. Pour l'instant, si P est π_0 sont données, alors il n'est pas tout à fait clair qu'il existe bien des suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont des chaînes de Markov de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$. Cette question sera résolue dans le prochain paragraphe. Nous donnerons aussi dans la prochaine section des exemples importants de chaînes de Markov. Voyons d'abord quelques conséquences immédiates de la définition 1.5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$ sur un espace d'états $\mathfrak{X}$. Pour $n \geq 1$, on note π_n la loi de X_n (dite *loi marginale*) : $\pi_n(x) = \mathbb{P}[X_n = x]$. Cette loi se calcule facilement à l'aide de P et π_0 :

Proposition 1.6 (Lois marginales)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de loi initiale π_0 et de matrice de transition P. Pour tout $n \geq 0$, la loi marginale π_n est donnée par le produit matriciel :*

$$\pi_n = \pi_0 P^n.$$

Démonstration. Pour calculer $\pi_n(x)$, on peut sommer sur toutes les possibilités pour les variables $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$:

$$\begin{aligned}\pi_n(x) &= \sum_{(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathfrak{X}^n} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] \\ &= \sum_{(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathfrak{X}^n} \pi_0(x_0)\, P(x_0,x_1)\, P(x_1,x_2) \cdots P(x_{n-1},x).\end{aligned}$$

On reconnaît la somme sur les indices qui donne le produit matriciel $(\pi_0 P^n)(x)$. □

Proposition 1.7 (Chaînes de Markov et probabilités de transition)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de loi initiale π_0 et de matrice de transition P. Pour tout $n \geq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0, \dots, X_n)$ est $P(X_n, \cdot)$. Autrement dit, pour tout vecteur $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tel que $\mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] \neq 0$, on a*

$$\mathbb{P}_{\pi_0}[X_{n+1} = x \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = P(x_n, x).$$

Démonstration. Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\pi_0}[X_{n+1} = x \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] &= \frac{\mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x]}{\mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n]} \\ &= \frac{\pi_0(x_0)\, P(x_0,x_1) \cdots P(x_{n-1},x_n)\, P(x_n,x)}{\pi_0(x_0)\, P(x_0,x_1) \cdots P(x_{n-1},x_n)} \\ &= P(x_n,x).\end{aligned}$$

Notons que réciproquement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une trajectoire aléatoire dans $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie la conclusion de la proposition et telle que $\mathbb{P}[X_0 = x] = \pi_0(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$, alors c'est une chaîne de Markov de loi initiale π_0 et de matrice de transition P. En effet, raisonnons par récurrence et supposons établie jusqu'au rang N la formule pour les probabilités des cylindres. Alors, au rang $N+1$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{N+1} = x_{N+1}] \\ &= \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_N = x_N]\, \mathbb{P}[X_{N+1} = x_{N+1} \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_N = x_N] \\ &= \left(\pi_0(x_0)\, P(x_0,x_1) \cdots P(x_{N-1},x_N)\right) P(x_N,x_{N+1}),\end{aligned}$$

d'où la formule au rang N. Ainsi, la proposition 1.7 est une définition alternative des chaînes de Markov. □

Remarque 1.8. La proposition 1.7 implique pour une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice P la formule

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x \,|\, X_n = x_n] = P(x_n, x).$$

Remarquons néanmoins que ceci ne suffit pas pour avoir une chaîne de Markov : on veut que la loi de la variable X_{n+1} *conditionnellement à tout le début de la trajectoire* $\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$ ne dépende que de l'état au temps n, et soit la loi de transition $P(x_n, \cdot)$.

La proposition précédente montre que la définition 1.5 coïncide avec l'objectif de départ : étant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la loi de X_{n+1} conditionnellement à X_n est indépendante du passé $(X_0, \dots, X_{n-1})$, et elle est donnée par la matrice de transition $P(X_n, \cdot)$. Pour conclure cette introduction des chaînes de Markov, expliquons comment calculer l'espérance d'une fonction $f(X_n)$ d'une chaîne de Markov. Dans tout ce qui suit, une fonction f sur l'espace d'états $\mathfrak{X}$ sera toujours représentée par un vecteur colonne, sauf si cette fonction est une mesure de probabilité (dans ce cas, on a convenu précédemment d'utiliser des vecteurs lignes). Par exemple, la fonction $f(x) = 2x$ sur $\mathfrak{X} = \{1, 2, 3\}$ est représentée par le vecteur

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Avec ces conventions d'écriture :

Proposition 1.9 (Espérance d'une fonction d'une chaîne de Markov)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de loi initiale π_0 et de matrice de transition P, et f une fonction positive ou bornée sur $\mathfrak{X}$.*

1. *L'espérance conditionnelle de $f(X_{n+1})$ sachant $X_n = x$ vaut :*

$$\mathbb{E}_{\pi_0}[f(X_{n+1}) \,|\, X_n = x] = (Pf)(x),$$

   où Pf est le produit matriciel de la matrice P par le vecteur f.

2. *L'espérance de $f(X_n)$ est : $\mathbb{E}_{\pi_0}[f(X_n)] = \pi_0 P^n f$.*

Démonstration. Notons pour commencer que si $\mathbb{P}_{\pi_0}[X_n = x] \neq 0$, alors pour tout $y \in \mathfrak{X}$, $\mathbb{P}_{\pi_0}[X_{n+1} = y \,|\, X_n = x] = P(x, y)$. En effet,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\pi_0}[X_{n+1} = y \,|\, X_n = x] \\
&= \sum_{(x_0,\dots,x_{n-1})\in\mathfrak{X}^n} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}]\, \mathbb{P}_{\pi_0}[X_{n+1} = y \,|\, X_0 = x_0, \dots, X_n = x] \\
&= \sum_{(x_0,\dots,x_{n-1})\in\mathfrak{X}^n} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}]\, P(x, y) = P(x, y).
\end{aligned}$$

La première partie de la proposition s'en déduit immédiatement :

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) \,|\, X_n = x] = \sum_{y \in \mathfrak{X}} \mathbb{P}[X_{n+1} = y \,|\, X_n = x] f(y) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x,y) f(y) = (Pf)(x).$$

La seconde partie de la proposition est une conséquence triviale de la proposition 1.6 :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbb{P}[X_n = x] f(x) = \pi_n f = \pi_0 P^n f. \qquad \square$$

Remarque 1.10. Le lecteur peut se demander pourquoi on a choisi d'écrire les probabilités comme des vecteurs lignes, et pourquoi on fait agir les matrices stochastiques à droite de ces lignes. En effet, traditionnellement (du moins dans les cercles mathématiques français), on fait plutôt agir les matrices à gauche de vecteurs écrits en colonne. La raison de notre choix est qu'il est nécessaire dans la théorie des chaînes de Markov de faire agir la matrice P à la fois à gauche et à droite, et que les vecteurs invariants par ces actions sont deux choses différentes :

- les vecteurs invariants à droite, qui vérifient $\pi P = \pi$, donnent les *mesures invariantes* qui seront étudiées dans le chapitre 3.
- les vecteurs invariants à gauche, qui vérifient $Pf = f$, sont les *fonctions harmoniques* ; ces fonctions apparaissent dans divers exercices.

On a donc deux types très différents d'objets invariants, et il faut que l'un des types soit représenté par des lignes et l'autre par des colonnes. Par cohérence avec des conventions d'écriture d'autres domaines mathématiques ou scientifiques, il est alors naturel de représenter les mesures par des vecteurs lignes sur lesquels on agit à droite.

1.2 Construction et exemples de chaînes de Markov

Nous avons défini précédemment les chaînes de Markov en précisant la forme de leurs lois trajectorielles, mais ce n'est sans doute pas très intuitif. Dans cette section, nous allons expliquer comment construire explicitement une chaîne de Markov de loi initiale et matrice de transition données, et présenter des exemples. Une notion utile est celle de *graphe d'une matrice de transition*. Supposons donnés un espace d'états $\mathfrak{X}$ et une matrice de transition P sur $\mathfrak{X}$. Le graphe de P est le graphe dirigé $\mathcal{G}_P$:

- dont l'ensemble des sommets est $\mathfrak{X}$;
- avec une arête dirigée de $x \in \mathfrak{X}$ vers $y \in \mathfrak{X}$ si $P(x,y) > 0$; dans ce cas, on accole une étiquette $P(x,y)$ à cette arête.

Par exemple, le graphe de la matrice stochastique de l'exemple 1.2 est dessiné sur la figure 1.1.

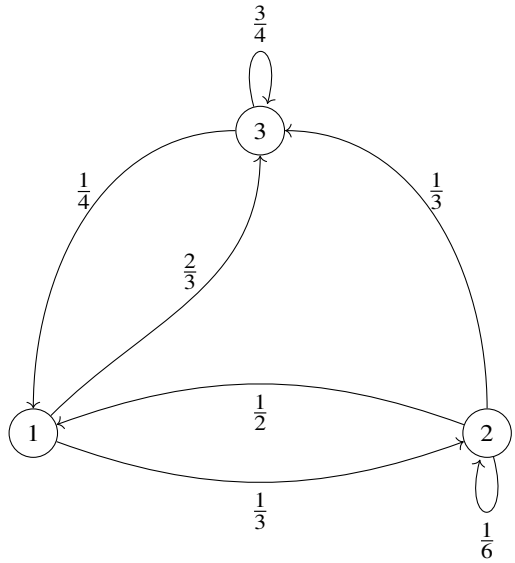


Fig. 1.1 : Graphe de la matrice de transition de l'exemple 1.2.

Définition intuitive. *Soit P une matrice stochastique sur un espace d'états $\mathfrak{X}$, et π_0 une mesure de probabilité sur cet espace. Pour construire une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$, on peut procéder comme suit :*

1. *On choisit un premier état aléatoire X_0 suivant la loi π_0.*

2. *Supposons construits les états $X_0, \dots, X_n$. Si $X_n = x$, alors pour obtenir X_{n+1}, on tire au hasard une variable aléatoire de loi $P(x, \cdot)$ et indépendante de tous les choix précédemment effectués.*

Ainsi, la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur le graphe de la matrice P, la probabilité d'un saut $(X_n = x) \to (X_{n+1} = y)$ étant donnée par $P(x, y)$.

Le point délicat de la définition intuitive ci-dessus est l'« indépendance de la transition $X_n \to X_{n+1}$ de tous les choix précédemment effectués ». Le théorème ci-dessous rend rigoureux cette idée, et il démontre l'existence d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$ pour n'importe quelle matrice stochastique et n'importe quelle loi initiale sur un espace $\mathfrak{X}$.

Théorème 1.11 (Représentation des chaînes de Markov)**.** *Soit $\mathfrak{X}$ un espace d'états, π_0 une probabilité sur $\mathfrak{X}$.*

1. *Supposons données :*

   - *une variable X_0 de loi π_0 sur $\mathfrak{X}$;*
   - *une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$, ces variables étant identiquement distribuées, indépendantes entre elles et indépendantes de la variable X_0 ;*
   - *une fonction mesurable $f : \mathfrak{X} \times E \to \mathfrak{X}$.*

   On définit par récurrence la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour $n \geq 0$:

   $$X_{n+1} = f(X_n, \xi_n).$$

   Alors, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de loi initiale π_0 et de matrice $P(x, y) = \mathbb{P}[f(x, \xi_0) = y]$.

2. *Réciproquement, pour toute matrice stochastique P, la construction ci-dessus est possible, et on peut même supposer que $E = [0, 1)$ et que $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1)$.*

Démonstration. Pour la première partie de la proposition, il suffit de vérifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les lois trajectorielles de la définition 1.5. Soit $(x_0, x_1, \dots, x_N)$ des états dans $\mathfrak{X}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots, X_N = x_N] \\
&= \mathbb{P}[X_0 = x_0, f(X_0, \xi_0) = x_1, f(X_1, \xi_1) = x_2, \dots, f(X_{N-1}, \xi_{N-1}) = x_N] \\
&= \mathbb{P}[X_0 = x_0, f(x_0, \xi_0) = x_1, f(x_1, \xi_1) = x_2, \dots, f(x_{N-1}, \xi_{N-1}) = x_N] \\
&= \mathbb{P}[X_0 = x_0]\, \mathbb{P}[f(x_0, \xi_0) = x_1]\, \mathbb{P}[f(x_1, \xi_1) = x_2] \cdots \mathbb{P}[f(x_{N-1}, \xi_{N-1}) = x_N] \\
&= \mathbb{P}[X_0 = x_0]\, \mathbb{P}[f(x_0, \xi_0) = x_1]\, \mathbb{P}[f(x_1, \xi_0) = x_2] \cdots \mathbb{P}[f(x_{N-1}, \xi_0) = x_N] \\
&= \pi_0(x_0)\, P(x_0, x_1)\, P(x_1, x_2) \cdots P(x_{N-1}, x_N)
\end{aligned}$$

en utilisant à la troisième ligne l'indépendance de X_0 et des variables $\xi_{n\geq 0}$, et à la quatrième ligne le fait que toutes les variables ξ_n ont la même loi. Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$.

Pour la seconde partie, fixons $\mathfrak{X}$, π_0 et P, ainsi qu'une suite $(\xi_n)_{n\geq -1}$ de variables *i.i.d.* (*indépendantes identiquement distribuées*) de loi uniforme sur $[0, 1)$: pour tout n et tout intervalle $[a, b) \subset [0, 1)$,

$$\mathbb{P}[a \leq \xi_n < b] = b - a.$$

Comme $\mathfrak{X}$ est fini ou dénombrable, on peut numéroter ses éléments $x_1, x_2, \dots$ Notons alors que, pour toute probabilité p sur $\mathfrak{X}$, la suite de nombres réels $(\sum_{i=1}^{k} p(x_i))_{k\geq 0}$

est croissante, commence à 0 et se termine par 1 si $\mathfrak{X}$ est fini, ou tend vers 1 si $\mathfrak{X}$ est infini dénombrable. On utilise la variable ξ_{-1} pour choisir au hasard X_0 de loi π_0 :

$$X_0 = x_k, \quad \text{où } k \text{ est l'unique indice tel que } \sum_{i=1}^{k-1} \pi_0(x_i) \leq \xi_{-1} < \sum_{i=1}^{k} \pi_0(x_i).$$

On obtient bien une variable de loi π_0, car

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_0 = x_k] &= \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{k-1} \pi_0(x_i) \leq \xi_{-1} < \sum_{i=1}^{k} \pi_0(x_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} \pi_0(x_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \pi_0(x_i) = \pi_0(x_k).\end{aligned}$$

Définissons maintenant la fonction $f : \mathfrak{X} \times [0,1] \to \mathfrak{X}$ à peu près de la même façon :

$$f(x,\xi) = x_k, \quad \text{où } k \text{ est l'unique indice tel que } \sum_{i=1}^{k-1} P(x,x_i) \leq \xi < \sum_{i=1}^{k} P(x,x_i).$$

Alors, on a bien

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[f(x,\xi_0) = x_k] &= \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{k-1} P(x,x_i) \leq \xi_0 < \sum_{i=1}^{k} P(x,x_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(x,x_i) - \sum_{i=1}^{k-1} P(x,x_i) = P(x,x_k)\end{aligned}$$

pour tout $x_k \in \mathfrak{X}$, donc par la première partie de la proposition, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence $X_{n+1} = f(X_n, \xi_n)$ est une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$ sur l'espace $\mathfrak{X}$. □

Remarque 1.12. D'après le théorème précédent, si l'on dispose d'une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. uniformes sur $[0,1)$, alors on peut construire n'importe quelle chaîne de Markov. La plupart des langages de programmation incluent dans leurs librairies des générateurs de nombres pseudo-aléatoires qui engendrent des suites de nombres :

- qui sont déterministes,
- mais qui ont les mêmes propriétés statistiques que des suites de variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0,1]$.

Autrement dit, pour tout échantillon de taille raisonnable, la suite engendrée est indistinguable par des tests d'une suite réellement aléatoire de variables i.i.d. Par conséquent, on peut très facilement simuler une chaîne de Markov à l'aide d'un

ordinateur. Voici un code simple qui, étant donnée une matrice P de taille N stockée dans `Python` sous la forme d'un tableau `numpy` de taille $N \times N$, et une mesure initiale π_0 stockée sous la forme d'un tableau de taille N, calcule les $n+1$ premiers états $X_0, X_1, \dots, X_n$ d'une chaîne de Markov de matrice P et de mesure initiale π_0 (l'espace des états est dans ce contexte $\mathfrak{X} = [\![0, N-1]\!]$).

```
import numpy as np
import numpy.random as random

def markov_chain(n: int, P: np.ndarray, pi0: np.ndarray) -> np.ndarray:
    res = np.zeros(n+1, dtype=np.int64)
    N = P.shape[0]
    res[0] = random.choice(N, p=pi0)
    for k in range(n):
        res[k+1] = random.choice(N, p=P[res[k], :])
    return res
```

Exemple 1.13 (Suites de variables i.i.d.). Soit π une mesure de probabilité sur un espace d'états $\mathfrak{X}$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathfrak{X}$, avec $\mathbb{P}[X_n = x] = \pi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathfrak{X}$. Alors, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

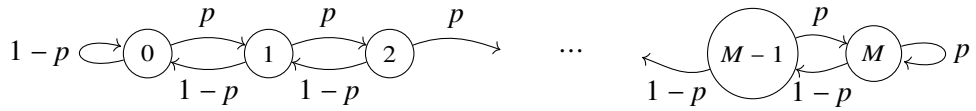
$$P(x, y) = \pi(y).$$

En effet, on peut utiliser le théorème de représentation avec $E = \mathfrak{X}$, $X_{n+1} = \xi_n$ et $f(x, y) = y$. Ce n'est pas un exemple très intéressant, car la probabilité d'une transition $(X_n = x) \to (X_{n+1} = y)$ ne dépend pas de x ; mais ceci montre que la théorie des chaînes de Markov généralise celle des suites de variables indépendantes.

Exemple 1.14 (Ruine du joueur). Soit M un entier plus grand que 1, et $p \in (0, 1)$ un nombre réel. On considère la chaîne d'espace d'états $\mathfrak{X} = \{0, 1, 2, \dots, M\} = [\![0, M]\!]$, et de probabilités de transition

$$\begin{aligned}
&\forall k \le M-1, \;\; P(k, k+1) = p;\\
&\forall k \ge 1, \;\; P(k, k-1) = 1-p;\\
&P(0,0) = 1-p \qquad ; \qquad P(M, M) = p.
\end{aligned}$$

Le graphe de cette chaîne de Markov est :



Cette chaîne de Markov modélise la quantité d'argent d'un joueur qui participe à chaque temps n à un jeu où il a une probabilité p de gagner et d'augmenter ses fonds d'une unité, et une probabilité $1-p$ de perdre et de voir ses fonds diminuer d'une unité. Le nombre M est la quantité totale d'argent mise en jeu et que le joueur peut remporter. On parle de la *chaîne de Markov de la ruine du joueur* ; l'un des problèmes importants que nous résoudrons dans ce chapitre est le calcul de la probabilité de ruine

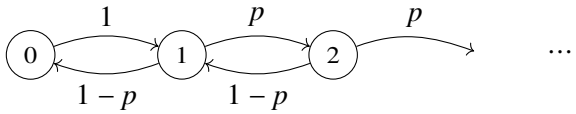
$$\mathbb{P}[\text{la chaîne atteint l'état 0 avant l'état } M \,|\, X_0 = k].$$

Il existe un certain nombre de variantes de cette chaîne, avec les mêmes probabilités de transition sauf pour $P(0,\cdot)$ et $P(M,\cdot)$. En particulier, une alternative assez fréquemment étudiée est le cas où $P(0,1) = P(M,M-1) = 0$ et $P(0,0) = P(M,M) = 1$; si l'on imagine un jeu au casino, cette modification implique que le jeu s'arrête lorsque le joueur est ruiné et atteint 0, ou lorsqu'il a remporté tout l'argent de la banque en atteignant l'état M.

Exemple 1.15 (File d'attente). Modifions légèrement l'exemple précédent en prenant l'espace d'états $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$, avec essentiellement les mêmes probabilités de transition que précédemment :

$$\begin{aligned}
&\forall k \geq 1, \quad P(k,k+1) = p;\\
&\forall k \geq 1, \quad P(k,k-1) = 1-p;\\
&P(0,1) = 1.
\end{aligned}$$

C'est le cas $M = +\infty$ dans le modèle de la ruine du joueur, avec également une modification de la probabilité de transition $P(0,\cdot)$.



La chaîne de Markov avec ces probabilités de transition modélise le nombre de personnes dans une file d'attente avec un seul guichet. Si la file d'attente est vide à l'étape n ($X_n = 0$), l'étape suivante correspond à l'arrivée d'un nouveau client et on a donc $X_{n+1} = 1$ avec probabilité 1. Si la file d'attente est non vide à l'étape n ($X_n = k \geq 1$), l'étape suivante correspond :

- soit à l'arrivée d'un nouveau client ($X_{n+1} = k+1$),
- soit au départ du client au guichet dont la demande a été traitée ($X_{n+1} = k-1$).

Certaines hypothèses de modélisation mènent aux valeurs de probabilités de transition $P(k,k+1) = p$ et $P(k,k-1) = 1-p$ pour un certain paramètre p mesurant la différence

entre la fréquence d'arrivée de nouveaux clients et la fréquence de traitement des demandes. Des questions importantes pour ce modèle sont :

- est-ce qu'on a avec probabilité non nulle $X_n \to +\infty$ (explosion de la chaîne) ?
- quel est le nombre moyen de personnes dans la file au cours d'un long intervalle de temps ?
- partant de $X_0 = k$, combien de temps en moyenne faut-il attendre pour que la file d'attente se vide ?

Exemple 1.16 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$). On peut encore modifier l'exemple de la ruine du joueur en retirant les deux bornes inférieure et supérieure de l'espace d'états : on prend $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ et

$$P(k, k+1) = p \qquad ; \qquad P(k, k-1) = 1 - p$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. C'est la *marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}$ de paramètre p : à chaque étape, on fait un saut vers le haut avec probabilité p, et un saut vers le bas avec probabilité $1 - p$. Une construction possible de cette chaîne est à partir de variables de Bernoulli indépendantes $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$\mathbb{P}[\xi_n = +1] = p \qquad ; \qquad \mathbb{P}[\xi_n = -1] = 1 - p.$$

Alors, $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ avec matrice de transition donnée par les formules ci-dessus. On étudie très souvent le cas où $X_0 = 0$ presque sûrement ; autrement dit, $\pi_0 = \delta_0$ est le Dirac en 0, avec

$$\pi_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera la loi de chaîne de Markov $\mathbb{P}_0$ au lieu de $\mathbb{P}_{\delta_0}$; plus généralement, étant donnée une chaîne de Markov sur un espace d'états $\mathfrak{X}$, si la loi initiale est le Dirac en un point δ_x, on notera toujours $\mathbb{P}_x$ au lieu de $\mathbb{P}_{\delta_x}$ la loi associée sur $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$. Pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, le cas le plus intéressant est sans doute celui où $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ (marche aléatoire *symétrique*). Une trajectoire de cette marche aléatoire sous la loi $\mathbb{P}_0$ est dessinée sur la figure 1.2.

La loi des grands nombres et le théorème central limite donnent des informations sur la distribution de la variable aléatoire $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ à n fixé (grand), mais pas sur l'aspect de toute la trajectoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. En particulier, voici quelques questions importantes que l'on pourra résoudre avec la théorie des chaînes de Markov (les réponses dépendent de la valeur du paramètre p) :

- combien de fois la trajectoire passe-t-elle par 0 ? quel est la durée moyenne entre deux passages en 0 ? quelle est la loi du temps aléatoire séparant deux passages en 0 ?
- la trajectoire reste-t-elle bornée ? peut-elle tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$? combien de temps faut-il attendre pour atteindre un niveau $k \in \mathbb{Z}$, partant de $X_0 = 0$?

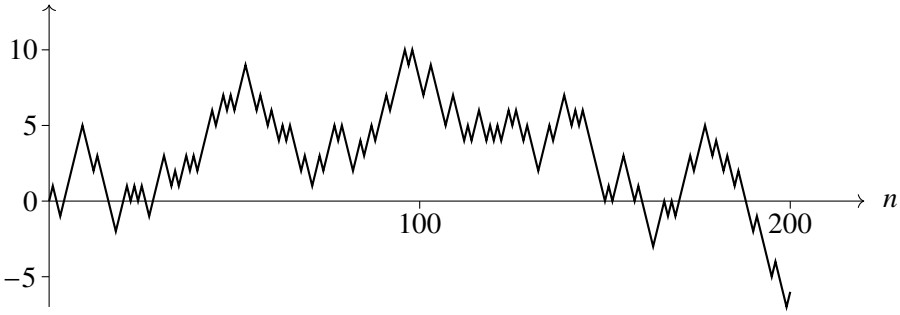


Fig. 1.2 : Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.17 (Marche aléatoire sur un graphe). On a expliqué précédemment comment associer à une matrice stochastique P un graphe *dirigé* $\mathcal{G}_P$, de sorte que la chaîne de Markov de matrice P est une marche aléatoire sur ce graphe avec des probabilités de saut données par P. Il y a aussi une façon canonique d'associer à un graphe *non dirigé* $\mathcal{G}$ une matrice stochastique $P_{\mathcal{G}}$ d'espace d'états l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$. Considérons ainsi un graphe $\mathcal{G} = (\mathfrak{X}, \mathfrak{E})$, c'est-à-dire un ensemble dénombrable de sommets $\mathfrak{X}$ et un ensemble d'arêtes

$$\mathfrak{E} \subset \{\text{paires } \{x, y\} \text{ d'éléments distincts de } \mathfrak{X}\}.$$

On supposera que pour tout sommet $x \in \mathfrak{X}$,

$$\deg x = \operatorname{card}(\{y \in \mathfrak{X} \mid \{x, y\} \in \mathfrak{E}\}) \text{ est fini et supérieur à 1.}$$

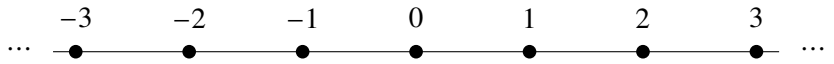
Autrement dit, tout sommet du graphe a au moins un voisin, et n'en a qu'un nombre fini. Attention, ceci n'implique pas que $\mathcal{G}$ soit un graphe connexe. La matrice de transition canoniquement associée au graphe $\mathcal{G}$ est :

$$P_{\mathcal{G}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg x} & \text{si } y \text{ est un voisin de } x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient bien une matrice stochastique, car pour tout $x \in \mathfrak{X}$,

$$\sum_{y \in \mathfrak{X}} P_{\mathcal{G}}(x, y) = \frac{1}{\deg x} \sum_{y \in \mathfrak{X}} \mathbb{1}_{(x \sim y)} = \frac{\deg x}{\deg x} = 1.$$

La chaîne de Markov de matrice $P_{\mathcal{G}}$ est appelée *marche aléatoire sur le graphe* $\mathcal{G}$. Par exemple, la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ ($p = \frac{1}{2}$) est la marche aléatoire sur le graphe :



Un exemple intéressant de marche aléatoire sur un graphe est le cas du réseau $\mathbb{Z}^2$: $\mathcal{G} = (\mathfrak{X}, \mathfrak{E})$ avec $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}^2$ et

$$\mathfrak{E} = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \,|\, |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1\}.$$

Dans le réseau, chaque sommet est connecté à quatre voisins aux quatre points cardinaux nord, sud, est et ouest, et la probabilité de transition vers chaque direction est égale à $\frac{1}{4}$. Un exemple de trajectoire de la marche aléatoire sur ce graphe apparaît sur la figure 1.3 (en partant du point $(0, 0)$, on a dessiné les 1000 premiers pas, le point de départ est en bas à gauche et le point d'arrivée à droite de la figure). Notons que les sommets et arêtes sont parfois visités de nombreuses fois (ce qui est difficile à restituer avec un dessin en noir et blanc). On a le même genre de questions que pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$:

- combien de fois repasse-t-on par l'origine ?
- la trajectoire reste-t-elle bornée dans le plan ?
- quel est le nombre moyen d'états visités au temps n ?
- si on laisse la trajectoire se poursuivre sur un temps infini, y a-t-il des états dans $\mathbb{Z}^2$ qui sont évités par la marche ?

1.3 Propriété de Markov et méthode d'un pas en avant

De nombreux calculs sur les probabilités des chaînes de Markov peuvent être effectués en utilisant l'observation très simple suivante :

Théorème 1.18 (Propriété de Markov simple)**.** *Soit $\mathfrak{X}$ un espace d'états, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice de transition P et de loi initiale π_0 arbitraire. On fixe un état $x \in \mathfrak{X}$. Conditionnellement à l'événement $\{X_1 = x\}$, la trajectoire décalée en temps $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$, de même matrice de transition P et de loi initiale δ_x. Ainsi, pour tout événement A dans la tribu $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ introduite dans le théorème 1.4,*

$$\mathbb{P}_{\pi_0}[(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in A \,|\, X_1 = x] = \mathbb{P}_x[(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A].$$

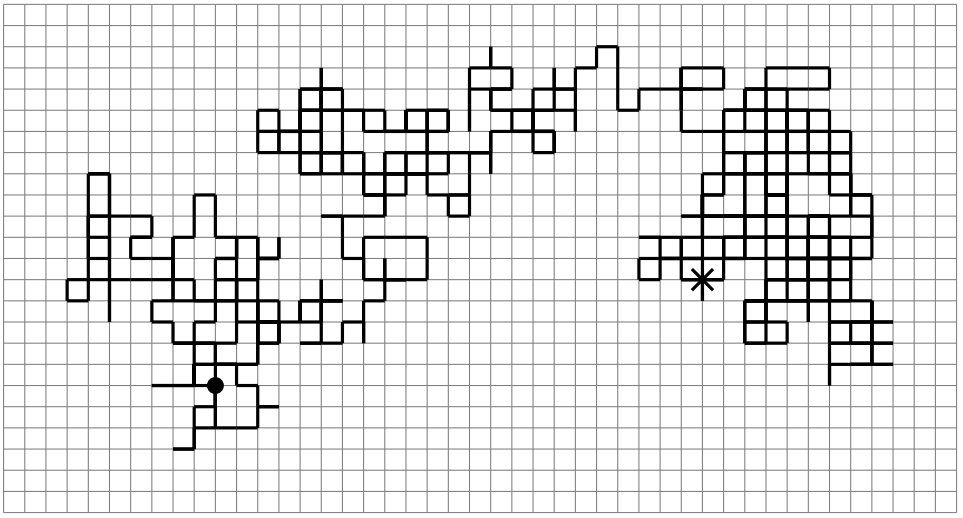


Fig. 1.3 : Marche aléatoire sur le réseau $\mathbb{Z}^2$.

Démonstration. On va calculer les probabilités trajectorielles de la chaîne décalée d'un pas conditionnellement à l'événement $\{X_1 = x\}$, qu'on suppose donc de probabilité non nulle

$$\pi_1(x) = (\pi_0 P)(x) = \sum_{w\in\mathfrak{X}} \pi_0(w)\, P(w,x) \neq 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = y_0, X_2 = y_1, \dots, X_{N+1} = y_N \,|\, X_1 = x] \\
&= \frac{\mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = x, X_1 = y_0, X_2 = y_1, \dots, X_{N+1} = y_N]}{\mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = x]} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = x]} \sum_{w\in\mathfrak{X}} \mathbb{P}_{\pi_0}[X_0 = w, X_1 = x, X_1 = y_0, X_2 = y_1, \dots, X_{N+1} = y_N] \\
&= \frac{\delta_x(y_0)}{\mathbb{P}_{\pi_0}[X_1 = x]} \sum_{w\in\mathfrak{X}} \pi_0(w)\, P(w,x)\, P(y_0,y_1) \cdots P(y_{N-1},y_N) \\
&= \delta_x(y_0)\, P(y_0,y_1) \cdots P(y_{N-1},y_N).
\end{aligned}$$

On reconnaît les probabilités des cylindres pour une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_x$. □

Remarque 1.19. On peut aussi énoncer une version non conditionnelle de la propriété de Markov simple : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice de transition P et de loi initiale π_0, alors $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de même matrice de transition et de loi initiale $\pi_1 = \pi_0 P$. Cette version non conditionnelle

se démontre à partir de la version conditionnelle en décomposant les probabilités trajectorielles en fonction des valeurs possibles pour X_1.

Le théorème 1.18 nous dit que la propriété de chaîne de Markov est conservée par décalage par un pas du processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$; ceci se traduira par diverses équations de récurrence vérifiées par les probabilités des chaînes de Markov. L'énoncé du théorème 1.18 est très formel ; examinons plutôt des applications concrètes de ce principe.

Exemple 1.20 (Probabilité de ruine). Fixons un paramètre $p \in (0,1)$, et considérons le modèle de la ruine du joueur, avec pour espace d'états $\mathfrak{X} = [\![0, M]\!]$ et probabilités de transition comme indiquées dans l'exemple 1.14 (sans modification des probabilités de transition en 0 ou en M). On note comme d'habitude $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov associée, avec une loi initiale $\pi_0 = \delta_k$ concentrée en un point de départ $k \in [\![0, M]\!]$. Posons

$$\tau_0 = \inf(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0\}),$$

qui est le *temps d'atteinte* de l'état 0 par la chaîne de Markov. Étant donnée une trajectoire $(X_0, X_1, X_2, \ldots)$, il est possible que l'on n'atteigne jamais 0 ; on pose dans ce cas $\tau_0 = +\infty$. Le temps aléatoire τ_0 est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}$. On définit de même

$$\tau_M = \inf(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = M\}),$$

et finalement $\tau = \min(\tau_0, \tau_M)$; c'est le temps au bout duquel le joueur est ruiné ou a ruiné la banque s'il joue au casino. Si $M \geq 1$, alors on ne peut pas atteindre simultanément 0 et M, donc si τ est fini, alors soit $\tau = \tau_0 < \tau_M$ (si on atteint 0 avant M), soit $\tau = \tau_M < \tau_0$ (si on atteint M avant 0). On souhaite calculer la *probabilité de ruine* :

$$f(k) = \mathbb{P}_k[\tau < +\infty \text{ et } \tau = \tau_0].$$

La propriété de Markov simple permet d'écrire une équation de récurrence satisfaite par la fonction f. Notons pour commencer que $f(0) = \mathbb{P}_0[\tau = \tau_0 < +\infty] = 1$: si l'on part de 0, alors on atteint 0 en un temps $\tau_0 = 0$. De même, $f(M) = 0$: si l'on part de M, alors il n'y a aucune possibilité d'atteindre 0 avant M. Supposons maintenant $k \notin \{0, M\}$. Pour calculer $f(k)$, on va décomposer suivant les valeurs possibles pour X_1, et utiliser la propriété de Markov. Comme celle-ci implique la chaîne décalée en temps, il faut faire attention aux notations utilisées. Une bonne façon de procéder est de considérer les quantités τ_0, τ_M et τ comme des fonctions des trajectoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons alors que, si $X_0 \notin \{0, M\}$, on a :

$$\tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) + 1.$$

En effet, le temps que met la trajectoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour atteindre 0 est égal au temps que met la trajectoire $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ pour atteindre 0, plus un pas (le pas $X_0 \to X_1$).

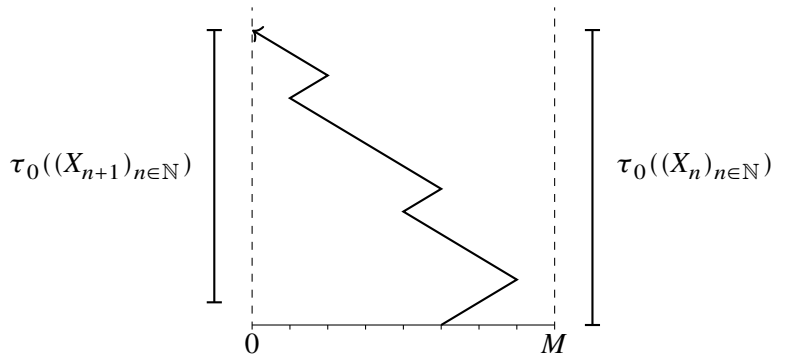


Fig. 1.4 : Le temps d'atteinte de l'état 0 par la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1 de plus que le temps d'atteinte de l'état 0 par la chaîne décalée $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On a la même relation pour les temps τ_M et τ. Ceci implique l'identité d'événements suivants si $X_0 \notin \{0, M\}$:

$$\begin{aligned}
&(\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty) \\
&\quad\iff (1 + \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = 1 + \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty) \\
&\quad\iff (\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
f(k) &= \mathbb{P}_k[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty] \\
&= \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty] \\
&= \mathbb{P}_k[X_1 = k+1]\,\mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \,|\, X_1 = k+1] \\
&\quad + \mathbb{P}_k[X_1 = k-1]\,\mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \,|\, X_1 = k-1] \\
&= pf(k+1) + (1-p)f(k).
\end{aligned}$$

À la dernière ligne du calcul, on a remplacé les deux probabilités $\mathbb{P}_k[X_1 = k+1]$ et $\mathbb{P}_k[X_1 = k-1]$ par leurs valeurs, et on a utilisé la propriété de Markov telle qu'énoncée dans le théorème 1.18 : ainsi, la loi de $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sachant $\{X_1 = k+1\}$ est la loi $\mathbb{P}_{k+1}$ d'une chaîne de Markov de même matrice P et de loi initiale δ_{k+1}, donc la probabilité conditionnelle de l'événement

$$\{\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty\}$$

est $f(k+1)$ (et de même pour l'autre probabilité conditionnelle).

Résumons : on a deux valeurs $f(0) = 1$ et $f(M) = 0$, et la relation de récurrence $f(k) = pf(k+1) + (1-p)f(k-1)$ qui est d'ordre 2 ; il y a donc une unique solution

que nous allons maintenant déterminer dans le cas $p = \frac{1}{2}$ (le cas $p \neq \frac{1}{2}$ est traité dans les exercices). Si $p = \frac{1}{2}$, l'équation de récurrence se réécrit sous la forme :

$$f(k) = \frac{f(k+1) + f(k-1)}{2}$$

ce qui est équivalent à

$$f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1).$$

Cette dernière équation dit que les pentes $f(k+1) - f(k)$ sont constantes le long de l'intervalle $[\![0, M]\!]$. Notons Δ cette pente constante. Comme

$$f(M) - f(0) = 0 - 1 = \sum_{k=0}^{M-1} f(k+1) - f(k) = M\Delta,$$

on obtient $\Delta = -\frac{1}{M}$, et finalement $f(k) = f(0) + \sum_{j=0}^{k-1} f(j+1) - f(j) = 1 + k\Delta = 1 - \frac{k}{M}$. Conclusion : dans le cas symétrique $p = \frac{1}{2}$, la probabilité de ruine partant de k est

$$f(k) = 1 - \frac{k}{M} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, M]\!] .$$

Exemple 1.21 (Temps de jeu dans le modèle de la ruine du joueur). Considérons de nouveau le modèle de la ruine du joueur avec un paramètre $p \in (0, 1)$ arbitraire, et intéressons-nous maintenant à la quantité

$$g(k) = \mathbb{E}_k[\tau],$$

où $\tau = \min(\tau_0, \tau_M)$ comme dans le paragraphe précédent. Cette espérance pourrait *a priori* être infinie ; nous allons voir que ce n'est pas le cas, et en particulier, ceci impliquera que $\tau < +\infty$ avec probabilité 1. Ainsi, avec probabilité 1, une trajectoire de la chaîne de Markov atteint l'un des deux bords 0 ou M au bout d'un temps fini. On a comme précédemment deux valeurs triviales pour g :

$$g(0) = g(M) = 0.$$

Si $X_0 \notin \{0, M\}$, on utilise la relation $\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) + 1$ et la propriété de Markov pour établir une formule de récurrence :

$$\begin{aligned} g(k) &= \mathbb{E}_k[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})] = \mathbb{E}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})] + 1 \\ &= \mathbb{P}_k[X_1 = k+1]\, \mathbb{E}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \,|\, X_1 = k+1] \\ &\quad + \mathbb{P}_k[X_1 = k-1]\, \mathbb{E}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \,|\, X_1 = k-1] + 1 \\ &= p\, g(k+1) + (1-p)\, g(k-1) + 1. \end{aligned}$$

À la dernière ligne, les probabilités $\mathbb{P}_k[X_1 = k+1]$ et $\mathbb{P}_k[X_1 = k-1]$ ont été remplacées par leurs valeurs, et on a utilisé la propriété de Markov avec des espérances conditionnelles au lieu de probabilités conditionnelles : cela ne pose pas de problème, car

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \,|\, X_1 = k+1] &= \sum_{t\in\mathbb{N}\sqcup\{\infty\}} \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = t \,|\, X_1 = k+1]\, t \\ &= \sum_{t\in\mathbb{N}\sqcup\{\infty\}} \mathbb{P}_{k+1}[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = t]\, t \\ &= \mathbb{E}_{k+1}[\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})].\end{aligned}$$

Cet argument montre que de façon générale, on peut utiliser la propriété de Markov avec des espérances conditionnelles de fonctions positives ou bornées de la chaîne décalée $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$; le cas des probabilités conditionnelles correspond aux fonctions $f((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathbb{1}_{(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A}$ avec A événement de la tribu $\mathscr{F}$.

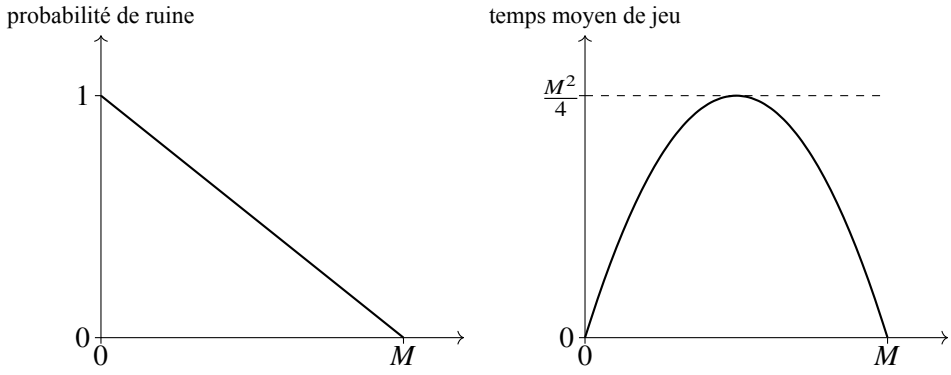


Fig. 1.5 : Probabilité de ruine et temps moyen de jeu dans le modèle de la ruine du joueur, avec un paramètre $p = \frac{1}{2}$.

De nouveau, on a une relation de récurrence d'ordre 2 et deux valeurs pour g, donc il y a une seule solution. Résolvons le système d'équations lorsque $p = \frac{1}{2}$. On peut réécrire la formule de récurrence sous la forme :

$$g(k) = \frac{g(k+1) + g(k-1)}{2} + 1,$$

ce qui est équivalent à

$$g(k+1) - g(k) = g(k) - g(k-1) - 2.$$

Autrement dit, la pente $\delta(k) = g(k+1) - g(k)$ diminue de deux unités à chaque fois qu'on augmente k d'un pas ; $\delta(k) = \delta(0) - 2k$ pour tout $k \in [\![0, M-1]\!]$. De plus,

$$g(M) - g(0) = 0 = \sum_{k=0}^{M-1} \delta(k) = M\delta(0) - M(M-1),$$

donc $\delta(0) = M-1$ et $\delta(k) = M-1-2k$. Ainsi, $g(k) = g(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \delta(j) = k(M-k)$. Conclusion : l'espérance du temps de jeu dans le cas symétrique $p = \frac{1}{2}$ est la fonction quadratique

$$g(k) = k(M-k).$$

Dans le prochain chapitre, nous verrons dans un cas particulier une généralisation du théorème 1.18, où au lieu de décaler d'un pas en avant la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on la décale d'un temps aléatoire τ et on considère $(X_{n+\tau})_{n\in\mathbb{N}}$. L'énoncé formel correspondant à cette généralisation est ce qu'on appelle la propriété de Markov *forte* (par opposition à la propriété de Markov *simple*) ; ceci dépasse un peu le cadre de ce livre.

1.4 Exercices

Objectifs : manipuler une matrice stochastique et les lois marginales d'une chaîne de Markov ; utiliser la propriété de Markov simple ; utiliser la représentation d'une chaîne de Markov en termes d'aléas indépendants ; décomposer toute probabilité d'un événement en somme de probabilités trajectorielles.

1. Chaîne de Markov à deux états. On considère l'espace $\mathfrak{X} = \{1, 2\}$, et une matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) À quelles conditions sur a, b, c, d la matrice P est-elle une matrice stochastique ? On supposera dans tout ce qui suit que ces conditions sont réunies. Réécrire dans ce cas P en fonction seulement des paramètres a et d. Dessiner le graphe dirigé $\mathcal{G}_P$ associé à cette matrice (qui peut dépendre des valeurs de a et d).

b) On suppose pour les questions suivantes $(a, d) \notin \{(0,0), (1,1)\}$. Montrer que les deux vecteurs lignes

$$\pi = \left(\frac{1-d}{2-a-d}, \frac{1-a}{2-a-d} \right) \quad \text{et} \quad \eta = (1, -1)$$

sont des vecteurs propres pour l'action à droite de la matrice P : $\pi P = \lambda_\pi \pi$ et $\eta P = \lambda_\eta \eta$, pour des valeurs propres réelles λ_π et λ_η que l'on calculera en fonction de a et d.

c) Soit π_0 une mesure de probabilité sur $\{1,2\}$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1,2\}$ de matrice P et de mesure initiale π_0. Montrer qu'il existe un coefficient $\beta \in \mathbb{R}$ qu'on calculera en fonction de π_0 et de P tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1-d}{2-a-d} + \beta\,(a+d-1)^n;$$
$$\mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1-a}{2-a-d} - \beta\,(a+d-1)^n.$$

On pourra décomposer π_0 sur la base (π, η) de $\mathbb{R}^2$.

d) Que peut-on dire de $\mathbb{P}[X_n = i]$ ($i \in \{1,2\}$) lorsque n tend vers l'infini ?

e) On suppose que $d = 1$ et $a < 1$. Montrer que $\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} X_n = 2] = 1$.

2. Modèle de file d'attente, I. On considère la matrice de transition sur l'espace $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ donnée par $P(0,1) = 1$ et

$$\forall k \geq 1,\ \ P(k,k+1) = p \qquad ; \qquad \forall k \geq 1,\ \ P(k,k-1) = 1-p,$$

p étant un paramètre réel dans $(0,1)$.

a) Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi

$$\mathbb{P}[\xi_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = -1] = p.$$

On considère la suite aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\xi_k \mathbb{1}_{(X_{k-1}>0)} + \mathbb{1}_{(X_{k-1}=0)}),$$

X_0 étant indépendant de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de loi notée π. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi)}$ sur l'espace $\mathbb{N}$.

b) On suppose $p > \frac{1}{2}$. Comparer les variables X_n et $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$, et montrer que $\mathbb{P}_\pi[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty] = 1$ quelque soit la loi initiale π.

c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer que

$$0 \leq X_n \leq X_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k + 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_{k-1}=0)}.$$

En déduire à l'aide de la loi des grands nombres que sous $\mathbb{P}_\pi$, l'événement $\mathrm{card}(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0\}) = +\infty$ a probabilité 1. Que vaut alors la probabilité $\mathbb{P}_\pi\left[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\right]$?

3. Le problème du collectionneur. On considère un ensemble fini E de cardinal N, et une suite de variables aléatoires $(C_k)_{k\geq 1}$ indépendantes, avec chaque C_k de loi uniforme sur E :

$$\forall k \geq 1, \quad \forall e \in E, \quad \mathbb{P}[C_k = e] = \frac{1}{N}.$$

On note ensuite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$X_n = \mathrm{card}(\{C_1, C_2, \dots, C_n\}),$$

avec par convention $X_0 = 0$.

a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X} = [\![0, N]\!]$, dont on explicitera la matrice de transition.

b) Soit $T = \inf(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = N\})$. Montrer que T est fini presque sûrement.

c) Montrer que pour tout $t \geq N$, $\mathbb{P}[T = t]$ est donnée par la somme :

$$\sum_{\substack{t_0,\dots,t_{N-1}\geq 1 \\ t_0+t_1+\cdots+t_{N-1}=t}} (1-p_0)^{t_0-1} p_0 \, (1-p_1)^{t_1-1} p_1 \cdots (1-p_{N-1})^{t_{N-1}-1} p_{N-1}$$

avec $p_k = 1 - \frac{k}{N}$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$. En déduire que la loi de T est celle d'une somme de variables géométriques indépendantes

$$G_0 + G_1 + \cdots + G_{N-1},$$

avec $\mathbb{P}[G_k = l] = (1-p_k)^{l-1} p_k$.

d) Déduire de la question précédente la valeur de $\mathbb{E}[T]$ en fonction de N. Donner un équivalent simple de cette formule lorsque N tend vers l'infini.

4. Marche aléatoire sur la droite et transformation $M - X$. On considère la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$: c'est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition $P(x, y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(|x-y|=1)}$.

a) On suppose que la mesure initiale de la chaîne est δ_0. Donner une représentation de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en termes d'aléas i.i.d. $(\xi_n)_{n\geq 1}$ avec $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$.

b) On pose $M_n = \max(\{X_k,\, 0 \leq k \leq n\})$. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov (indication : rendre tangible le fait que l'évolution de M_n dépend du moment où le précédent maximum a été atteint).

c) On s'intéresse au vecteur $Z_n = (X_n, M_n - X_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Montrer que

$$Z_{n+1} - Z_n = \begin{cases} (\xi_{n+1}, -\xi_{n+1}) & \text{si } M_n - X_n > 0, \\ (1,0) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = 1, \\ (-1,+1) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = -1. \end{cases}$$

d) Montrer que $(X_n, M_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

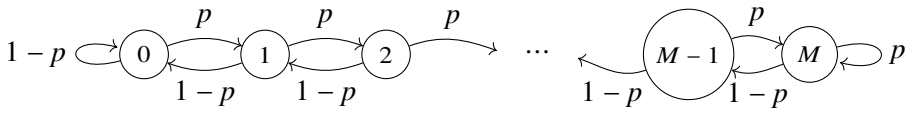
e) Montrer que $(M_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathbb{N}$, et préciser sa matrice de transition.

5. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, I. Soit P une matrice stochastique sur un espace d'états $\mathfrak{X}$, et $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *harmonique* sur $\mathfrak{X}$ (par rapport à P) si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathfrak{X},\ f(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x,y) f(y).$$

On suppose donnée une fonction f harmonique et bornée sur $\mathfrak{X}$. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice de transition P, alors la suite $(\mathbb{E}[f(X_n)])_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

6. Modèle de la ruine du joueur avec $p \neq \frac{1}{2}$. Dans cet exercice, on reprend le modèle de la ruine du joueur : étant fixé un paramètre $p \in (0,1)$ et un entier $M \geq 1$, on considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états $\mathfrak{X} = [\![0, M]\!]$ et de matrice de transition P dont le graphe $\mathcal{G}_P$ est :



On suppose dans tout ce qui suit $p \neq \frac{1}{2}$, le cas $p = \frac{1}{2}$ ayant été vu précédemment. On note

$$\tau = \tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \inf(\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0 \text{ ou } X_n = M\}) \in \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\};$$