PSI/PSI*

Colles de mathématiques

Rémi Coutens

NOUVEAUX PROGRAMMES !

340 EXERCICES CORRIGÉS

- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

PSI/PSI*

Colles de **mathématiques**

PSI/PSI*

Colles de **mathématiques**

Rémi Coutens

NOUVEAUX PROGRAMMES

Sous la direction de François Pantigny

ellipses

Collection Colles de Prépas
dirigée par François Pantigny

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur
www.editions-ellipses.fr

Je remercie M. Pantigny pour ses conseils, ses illustrations et sa relecture. Merci également à Emmanuelle Guillant d'avoir une nouvelle fois participé grandement à la rédaction de cet ouvrage.

Je dédie ce livre à tous les jeunes collégiens et lycéens qui participent aux clubs de maths et autres *Maths Team*, ainsi qu'aux collègues dévoués qui les encadrent. Je pense en particulier à Arno Kabla (merci pour la relecture de l'exercice 8 du chapitre 20 !) et Isabelle De Gracia Chaligné du lycée français de New York.

ISBN 9782340-066533
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

En seconde année les interrogations orales n'engendrent plus d'appréhension. On sait que cette spécificité du système des classes préparatoires aux grandes écoles participe grandement aux progrès des étudiants. Cependant, cette seconde année est courte et à l'assimilation régulière du cours s'ajoute l'aspect de l'entraînement à l'oral.

Dans l'objectif d'une préparation efficace, les exercices de ce livre sont classés en trois catégories :

- Les « exercices axés sur le calcul ». Souvent application quasiment directe du cours, ils ont pour objectif, via la pratique calculatoire, de vérifier la connaissance et la compréhension des notions du cours.
- Les « exercices axés sur le raisonnement ». Ces exercices demandant plus de recul, leur objectif est de renforcer l'assimilation des concepts.
- Les « exercices avec questions ouvertes ». Ces exercices amènent l'étudiant à avoir sa propre réflexion, à construire sa démonstration ou son contre-exemple selon les cas.

Plutôt que l'originalité ou la difficulté, nous avons privilégié des exercices qui nous ont paru formateurs. Néanmoins certains exercices, signalés par une ou deux étoiles, sont d'un niveau plus élevé.

Les corrections des exercices figurent après la liste des énoncés. Chaque exercice est entièrement corrigé parfois de plusieurs manières lorsque cela nous a semblé utile.

En début de chaque chapitre se trouve une figure, généralement réalisée par M. Pantigny, qui illustre soit une notion, soit un exercice. Nous encourageons le lecteur à faire le plus souvent possible ses propres représentations.

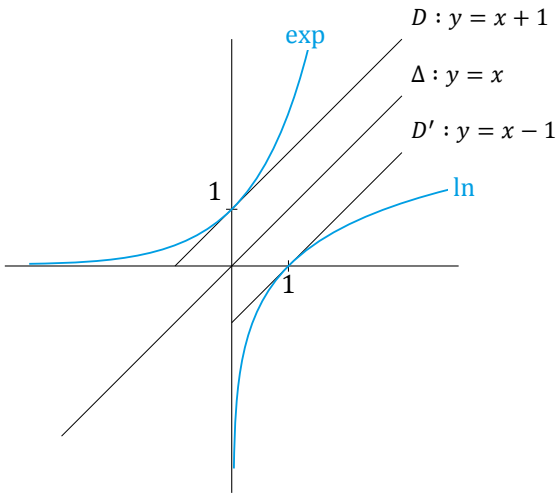
Nous remercions les étudiants qui nous ont transmis leurs retours d'oraux dont certains figurent dans cet ouvrage.

En espérant que ce livre participe efficacement à leur préparation aux concours, nous adressons nos vœux de réussite aux lecteurs de ce livre.

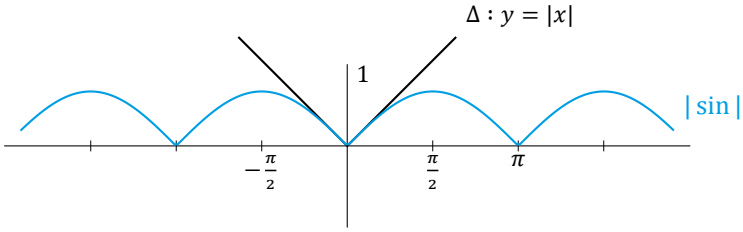
Sommaire

1	Quelques classiques de première année	3
2	Suites numériques	15
3	Espaces vectoriels normés	29
4	Études locales	43
5	Séries numériques	57
6	Primitives, intégration sur un segment	73
7	Intégrales généralisées	89
8	Suites de fonctions	107
9	Fonction définie par une intégrale	133
10	Séries de fonctions	165
11	Séries entières	189
12	Équations différentielles	209
13	Calcul différentiel	239
14	Matrices (révisions)	257
15	Déterminants	267
16	Réduction des endomorphismes	279
17	Polynômes matriciels et d'endomorphismes	309
18	Espaces euclidiens et préhilbertiens	325
19	Endomorphismes d'un espace euclidien	341
20	Probabilités	353
21	Variables aléatoires discrètes	363
22	Couples de variables aléatoires	383

1 Quelques classiques de première année



Deux inégalités à connaître : $e^x \geqslant 1 + x$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$ (ou encore $\ln(1 + t) \leqslant t$).



Autre inégalité utile $\left|\sin(x)\right| \leqslant |x|$.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Justifier l'équivalent $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

2) Préciser le développement limité de tan au voisinage de 0 à l'ordre 5.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)$$

$$q_n = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1).$$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n et q_n à l'aide de factorielles.

Exercice 3 *Somme et produit des racines d'un polynôme, transformation de* $e^{i\theta} \pm 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$.

1) Justifier que P_n admet n racines éventuellement confondues dans $\mathbb{C}$.

2) Préciser le produit et la somme de ces racines.

3) Résoudre $P_n(z) = 0$. Contrôler les résultats du 2).

4) Déduire de $P(1)$ la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

1) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2) Montrer que ce résultat est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Montrer que si f est continue de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, alors f admet un point fixe.

Exercice 6

Soit h une fonction dérivable sur un intervalle I s'annulant en p points distincts de I.
Montrer que h' s'annule au moins $p-1$ fois.

Exercice 7 *Moyenne géométrique et arithmétique*

Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 8 *Formule du binôme, unicité des coefficients d'un polynôme*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Déterminer la valeur de S_n en utilisant le coefficient de X^n dans $(1+X)^n(1+X)^n$.

Exercice 9

Établir pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Que devient ce résultat pour $x < 0$?

Exercice 10

1) Soit $x \in [-1, 1]$.
   On pose $\theta = \pi - \arccos(-x)$. Calculer $\cos(\theta)$.
2) En déduire :
$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$
3) Retrouver ce résultat à l'aide de la dérivation.

Exercice 11 ⋆⋆

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + \mathrm{i}b$ où a et $b \in \mathbb{R}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer le module de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.
   Pour $n > -a$, déterminer un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.
2) En déduire :
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z.$$

D'après Centrale 2 PSI 2013

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f\left(x^2\right).$$

1) Vérifier que f est paire.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$ on a $f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$.
3) Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1) Si f est T-périodique, f' est-elle T-périodique ?
2) Que dire de f' quand f est paire ?

Exercice 14 *Polynôme divisible par son polynôme dérivé.*

Soit n un entier naturel non nul. Existe-t-il des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ de degré n qui soient divisibles par P' ? Si oui lesquels ?

Exercice 15

Pendant une balade d'une heure en forêt, un promeneur a parcouru exactement 6 kilomètres.
Existe-il un intervalle de temps de 30 minutes durant lequel il a parcouru 3 kilomètres ?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, donc $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{1} = x$.
2) On pourrait utiliser les développements de sin et cos et faire un quotient, mais les calculs sont pénibles. Pour retrouver rapidement le développement de tan, on préfère obtenir les développements successivement à l'aide de la dérivée :
   - Ordre 1

     D'après l'équivalent précédent (ou la formule de Taylor-Young à l'ordre 1), on a :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x).$$

- Ordre 3

  Or, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, donc $\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o\left(x^2\right)$,

  puis par « primitivation », $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$. Donc :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

- Ordre 5

  $\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o\left(x^4\right)$,

  puis par « primitivation » :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour p_n, on factorise par 2 dans chaque facteur :

$$p_n = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n) = 2^n\big(1 \cdot 2 \cdots (n-1)(n)\big) = 2^n n!.$$

Pour q_n, tous les facteurs sont impairs, on introduit les facteurs pairs de 2 à $2n$ et on divise par p_n :

$$q_n = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Remarque

On peut ne pas rédiger en extension :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!,$$

$$q_n = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{p_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Exercice 3

1) On a $\deg P_n = n$, donc P_n admet n racines (éventuellement confondues) dans $\mathbb{C}$.

2) On a, en notant $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines de P_n, $P_n = 1 \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$, car le coefficient dominant de P_n est 1.

   En notant s et p la somme et le produit de ces racines, le cours assure que :

$$P_n = X^n - sX^{n-1} + \cdots + (-1)^n p.$$

   Donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, $s = -1$ et $p = (-1)^n$.

3) On sait que 1 n'est pas racine de P_n et que pour $z \neq 1, 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z). Donc :

$$P_n(z) = 0 \iff (z^{n+1} = 1 \text{ et } z \neq 1).$$

Par conséquent, les racines de P_n sont les $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

En notant $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right)$. On a $\omega \neq 1, z_k = \omega^k$ et $\omega^{n+1} = 1$. D'où les calculs suivants :

$$s = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \omega^k = \omega \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{\omega - \omega^{n+1}}{1-\omega} = \frac{\omega - 1}{1-\omega} = -1,$$

$$p = \prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} \omega^k = \omega^{1+2+\cdots+n} = \omega^{\frac{n(n+1)}{2}} = \exp(in\pi) = (-1)^n.$$

4) Par la forme développée de P_n, on a $P_n(1) = n + 1$.

Par la forme factorisée de P_n, on a $P_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n+1}\right)\right)$.

Comme $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(-2i \sin(\theta/2)\right)$, on en déduit en notant $\theta_k = \frac{2k\pi}{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \left(e^{i\theta_k/2}(-2i)\right) &= (-2i)^n \prod_{k=1}^{n} e^{i\theta_k/2} \\
&= (-2i)^n \, e^{\frac{i}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k\right)} \\
&= (-2i)^n \, e^{i n\pi/2} \\
&= (-2i)^n \left(i^n\right) \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

($e^a e^b = e^{a+b}$; $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $e^{i\pi/2} = i$; $i^2 = -1$)

Donc :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2^n}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$. Notons $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

On a $1 + \frac{x}{n} > 0$, donc $\ln\left(f_n(x)\right) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

Or, $u = \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc :

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{x}{n} = x.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \ln\left(f_n(x)\right) = x$, puis par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$.

2) Soit $x < 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1 > 0$. Donc il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $1+\frac{x}{n} > 0$.

> Remarque
> On a pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$:
>
> $$1+\frac{x}{n} > 0 \iff n > -x \iff n \geqslant \lfloor -x \rfloor + 1.$$
>
> On pouvait choisir $n_0 = \lfloor -x \rfloor + 1$.

La fin de la démonstration de la question précédente est valable à partir du rang n_0 et on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x$.
Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

Exercice 5

Pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0.$$

Notons $g : x \mapsto f(x) - x$.
La fonction g est continue sur $[0,1]$, $g(0) = f(0) \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$.
Donc f admet un point fixe.

Exercice 6

On note, en les rangeant dans l'ordre strictement croissant, $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ des points de I où h s'annule.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Comme x_k et x_{k+1} appartiennent à l'intervalle I, on a $[x_k, x_{k+1}] \subset I$. Donc la fonction h est continue et dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$. De plus, $h(x_k) = h(x_{k+1})$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $h'(c_k) = 0$.
En choisissant un de ces points c_k dans chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, on obtient des points distincts, car :

$$x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3 < \cdots < x_{p-1} < c_{p-1} < x_p.$$

La dérivée h' s'annule au moins $p-1$ fois.

Exercice 7

Soient x et y des réels positifs.
On a $x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$, donc $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. Par conséquent :

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Remarque

Le nombre $\sqrt{xy}$ est la longueur d'un côté du carré qui a la même aire xy qu'un rectangle de côtés de longueurs x et y. Ce nombre s'appelle la *moyenne géométrique* de x et y.

Le nombre $\frac{x+y}{2}$ est la moyenne arithmétique de x et y. Ce nombre est la longueur d'un côté du carré qui a le même périmètre qu'un rectangle de côtés de longueurs x et y.

Ce résultat montre que la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique.

Exercice 8

D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \qquad \text{et} \qquad (1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k.$$

D'une part, le coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$.

D'autre part, le coefficient de X^n dans le produit $(1+X)^n(1+X)^n$ est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

De plus, on sait que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, donc par unicité des coefficients :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Remarque

Ce résultat est obtenu autrement à l'exercice 8 du chapitre 22.

Exercice 9

Posons $\psi : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par addition et composition, ψ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

La dérivée étant nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction ψ est constante sur $]0, +\infty[$.

Remarque

Il est important que $]0, +\infty[$ soit un intervalle pour ce point. D'ailleurs, la dérivée de ψ est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et la fin de l'exercice montre que ψ n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Or, $\psi(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction arctan étant impaire, ψ l'est aussi, donc on obtient :

$$\forall x < 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10

1) Soit $x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \pi - \arccos(-x)$.

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos\big(\pi - \arccos(-x)\big) \\ &= -\cos\big(-\arccos(-x)\big) \\ &= -\cos\big(\arccos(-x)\big) \\ &= x.\end{aligned}$$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$; parité ; définition de arccos

2) Soit $x \in [-1,1]$. Posons $\theta = \pi - \arccos(-x)$.
Par définition, arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, $\arccos(-x) \in [0,\pi]$ et $\theta \in [0,\pi]$ aussi. De plus, on a vu que $\cos(\theta) = x$. Compte tenu de ces deux informations, on a $\theta = \arccos(x)$.
On a montré que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

3) Posons $\Psi : x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$. Par addition et composition, Ψ est continue sur le segment $[-1,1]$ et dérivable sur l'ouvert $]-1,1[$ et :
Pour $x \in]-1,1[$, $\Psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0$.
Donc Ψ' est nulle sur $]-1,1[$, La fonction Ψ étant continue sur $[-1,1]$ et de dérivée nulle sur $]-1,1[$, Ψ est constante sur $[-1,1]$.
Or, $\Psi(0) = \arccos(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc on retrouve le résultat précédent.

Exercice 11

1) Soit $z' = 1 + \frac{z}{n}$. On a $z' = 1 + \frac{a}{n} + \mathrm{i}\frac{b}{n}$, donc $|z'|^2 = \left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}$:

$$|z'| = \sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}}.$$

Si $n > -a$, alors la partie réelle de z' est $\frac{n+a}{n} > 0$. On peut choisir un argument θ_n de z' dans l'intervallle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}\tfrac{n+a}{n} + \mathrm{i}\tfrac{b}{n} &= z' \\ &= |z'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} \\ &= |z'|\big(\cos(\theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_n)\big) \\ &= |z'|\cos(\theta_n) + \mathrm{i}|z'|\sin(\theta_n).\end{aligned}$$

forme trigonométrique ; définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$

Donc $\tan(\theta_n) = \frac{\mathrm{Im}(z')}{\mathrm{Re}(z')} = \frac{b}{n+a}$. Or, $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc :

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right).$$

CORRECTIONS

2) Soit $n_0 = \lfloor -a \rfloor + 1$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $n > -a$.

Ainsi, en posant $r_n = \sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}}$ et $\theta_n = \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)$, on a :

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_n}.$$

D'une part, on sait que $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et que $b/(n+a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc :

$$n\theta_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{b}{n+a} \underset{n\to\infty}{\sim} b.$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} n\theta_n = b$, car deux suites équivalentes ont la même limite. Puis :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_n} &= \cos(n\theta_n) + \mathrm{i}\sin(n\theta_n) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(b) + \mathrm{i}\sin(b) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}. \end{aligned}$$

(continuités de cos, sin ; définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$)

D'autre part :

$$\begin{aligned} \ln\left(r_n^n\right) &= n\ln(r_n) \\ &= \frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\ln\left(1+2\frac{a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{2}\left(2\frac{a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \left(a+\frac{a^2+b^2}{2n}\right). \end{aligned}$$

($\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$)

Donc :

$$\begin{aligned} \ln\left(r_n^n\right) &\xrightarrow[n\to\infty]{} a \\ r_n^n &\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^a. \end{aligned}$$

(continuité de exp)

On déduit de ces deux résultats que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^z.$$

Exercice 12

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$, donc $f(-x) = f\left(x^2\right) = f(x)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $\forall a > 0, f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$ ».

- Initialisation

  Soit $x > 0$. On a $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, donc $f\left(\sqrt{x}\right) = f(x)$. Cela donne $f(x) = f\left(x^{2^{-1}}\right)$.

  Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

On a alors :

$$\begin{aligned} f\left(x^{2^{-(n+1)}}\right) &= f\left(\sqrt{x^{2^{-n}}}\right) \\ &= f\left(x^{2^{-n}}\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

d'après $\mathcal{P}_1$ pour le réel $x^{2^{-n}}$

d'après $\mathcal{P}_n$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f\left(x^{2^{-n}}\right)$.

3) Soit $x > 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2^{-n}} = 1$. Par continuité de f, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x^{2^{-n}}\right) = f(1)$.

Donc f est constante sur $]0, +\infty[$. Par continuité, f est constante sur $[0, +\infty[$.

Par parité, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13

1) Si f est T-périodique, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto f(x+T)$ l'est aussi et par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x+T) = f'(x).$$

Donc f' est T-périodique.

2) Si f est paire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$ l'est aussi et par dérivation d'une fonction composée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) = f'(x).$$

Donc f' est impaire.

Remarque

On montre de même que la dérivée d'une fonction impaire est paire.

Exercice 14

Montrons que les polynômes P de degré n et divisibles par P' sont les polynômes ayant une unique racine d'ordre de multiplicité n.

- Condition suffisante

  Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $a \in \mathbb{K}$. On pose $P = \alpha(X-a)^n$. On a $P' = n\alpha(X-a)^{n-1}$ et P' divise P.

- Condition nécessaire

  On suppose que P est de degré n et que P' divise P.

  Puisque $\deg P' = n-1$, $P = P'Q$ où Q est un polynôme de degré 1.
  Le coefficient dominant de Q devant être $\frac{1}{n}$, il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $Q = \frac{1}{n}(X-a)$.

  Ainsi a est racine de P. Notons $k \in [\![1, n]\!]$ son ordre de multiplicité.
  Il existe un polynôme Q_0 tel que $P = (X-a)^k Q_0$ et $Q_0(a) \neq 0$.
  On a alors $P' = k(X-a)^{k-1}Q_0 + (X-a)^k Q_0'$. En reportant dans $P = \frac{1}{n}(X-a)P'$, on a :

$$\begin{aligned}(X-a)^k Q_0 &= \frac{1}{n}(X-a)\left(k(X-a)^{k-1}Q_0 + (X-a)^k Q_0'\right)\\ &= \frac{k}{n}(X-a)^k Q_0 + \frac{1}{n}(X-a)^{k+1}Q_0'.\end{aligned}$$

  On peut simplifier par $(X-a)^k$, car un produit de polynômes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul[*] et on obtient :

$$Q_0 = \frac{k}{n}Q_0 + (X-a)Q_0'.$$

  Comme $Q_0(a) \neq 0$, on en déduit $k = n$.

  En notant α le coefficient dominant de P, on a prouvé que $P = \alpha(X-a)^n$.

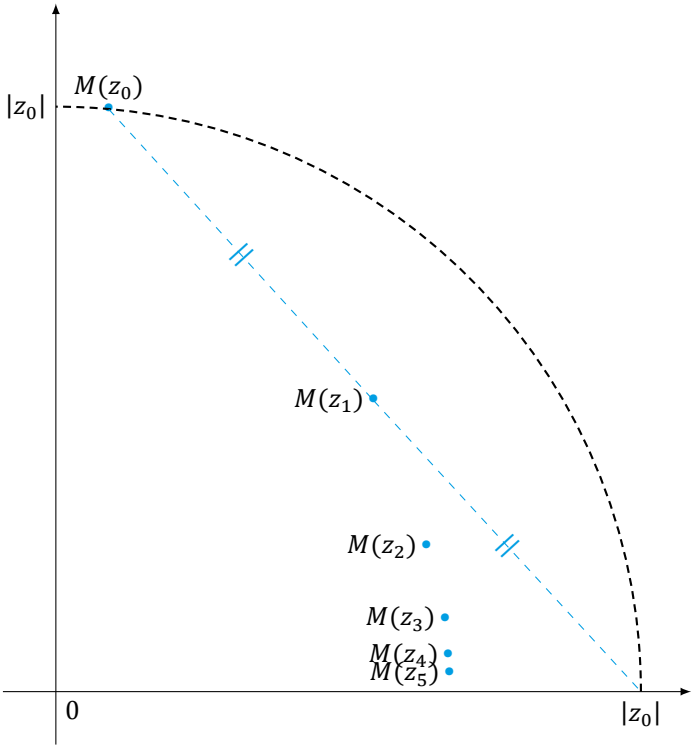
Exercice 15

Montrons que la réponse est positive en supposant que la fonction $d : [0,1] \to [0,6]$ qui, à un temps t exprimé en heures, associe la distance en kilomètres parcourue entre les instants 0 et t, est continue.
Notons $\delta : t \mapsto d(t+1/2) - d(t) - 3$.
On a $\delta(0) = d(1/2) - 3$ et $\delta(1/2) = 6 - d(1/2) - 3 = 3 - d(1/2)$. Donc ces deux nombres sont de signes opposés. La fonction δ étant continue (par composition), le théorème des valeurs intermédiaires montre que δ s'annule sur $[0, 1/2]$.
Il existe donc $t_0 \in [0, 1/2]$ tel que $d(t_0 + 1/2) - d(t_0) = 3$. Entre les instants t_0 et $t_0 + 1/2$, le promeneur parcourt exactement 3 kilomètres.

« *Attention* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ax_k = a\sum_{k=1}^{n} x_k$, *mais* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(ax_k) = a^n \prod_{k=1}^{n} x_k$. »

[*] Pour les ex-MPSI, l'anneau est intègre.

Suites numériques 2



La figure ci-dessus illustre géométriquement la suite étudiée à l'exercice 7.
La relation $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ donne que le point d'affixe z_{n+1} est le milieu du segment joignant les points d'affixes respectives z_n et $|z_n|$ (qui sont sur un même cercle centré à l'origine).

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Convergence quadratique*

Soient $\ell \in \mathbb{C}$, $k \in]0, +\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|^2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{k}\left(k\,|u_0 - \ell|\right)^{2^n}.$$

Exercice 2 *Classique*

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \cos(\theta)\cos(\theta/2)\cdots\cos(\theta/2^n).$$

1) Si $\theta = 0$, que dire de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2) Dans les questions suivantes, on suppose que $\theta \neq 0$.
   a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(\theta/2^n) \neq 0$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$p_n = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2^n \sin(\theta/2^n)}.$$
   c) Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (-1)^n.$$

1) Préciser u_n en fonction de n et de u_0.
2) Préciser les limites éventuelles de $\sqrt[n]{u_n}$ (racine n-ième de u_n) et de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

D'après Navale

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$e_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

1) Dans cette question uniquement, on suppose $\theta = \pi$.
Préciser les suites extraites $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Préciser les éventuelles valeurs de $\theta \in [0, 2\pi[$ pour lesquelles la suite $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3) Soit $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.
   a) Montrer que la convergence de l'une des suites $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ entraînerait celle de l'autre.
   b) Conclure quant à la nature de ces suites.

Exercice 5 *Convergence d'une suite d'entiers*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres entiers convergente.

1) Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1/2$.
2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 6

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos(u_n).$$

Exercice 7 ⋆⋆ *Classique*

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On se propose d'étudier la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + |z_n|\right).$$

1) Que dire de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si z_0 est un réel ?
2) On suppose désormais $z_0 \notin \mathbb{R}$.
   a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_n > 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ tels que :

$$z_n = \rho_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}.$$

   b) Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

D'après CCINP

Exercice 8 ⋆⋆

On note $\binom{n}{k}$ les coefficients binomiaux et pour n entier naturel, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 2.
Indication : On pourra observer les lignes du triangle de Pascal.

D'après CCINP

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n + 2x - 1.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'équation :

$$x^{n+1} + x^n + 2x - 1 = 0$$

possède, dans $\mathbb{R}_+$, une et une seule solution, que l'on notera x_n.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant $f_n(1/2)$, comparer x_n et $1/2$.
3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 10 *Une démonstration du théorème de Cesàro dans le cas croissant*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \frac{v_n+u_n}{2}$.
3) En déduire que $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

D'après Mines-Télécom & CCINP

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 11 ⋆

Pour un réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne sa partie entière. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1) Montrer que la suite de terme général u_n est bornée.
2) La suite est-elle convergente ?

Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \sin\left(\frac{p}{n^2}\right).$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

D'après CCINP

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|^2$ ».

- Initialisation

  Pour $n = 0$, $2^0 = 1$, donc $\frac{1}{k}\left(k\,|u_0 - \ell|\right)^{2^0} = 1 \cdot |u_0 - \ell|$. En particulier, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Hérédité

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie c'est-à-dire : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{k}\left(k\,|u_0 - \ell|\right)^{2^n}$.

  On a alors :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leqslant k\,|u_n - \ell|^2 \\ &\leqslant k\frac{1}{k^2}\left(k\,|u_0 - \ell|\right)^{2^n \cdot 2} && \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &\leqslant \frac{1}{k}\left(k\,|u_0 - \ell|\right)^{2^{n+1}}. && \text{car } 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a ainsi montré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

1) Si $\theta = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 1$ (tous les cosinus valent 1).

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta/2^n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, d'où $\sin(\theta/2^n) \neq 0$.

   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la proposition « $p_n = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2^n \sin(\theta/2^n)}$ ».

   - Initialisation

     Pour $n = 0$, $p_0 = \cos(\theta)$ et $\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2^0 \sin(\theta/2^0)} = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = \cos(\theta)$. D'où $\mathcal{H}_0$ est vraie.

   - Hérédité

     Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie. On a alors :

$$p_{n+1} = p_n \cos(\theta/2^{n+1}) = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2^n \sin(\theta/2^n)} \cos(\theta/2^{n+1}).$$

On a $\sin(\theta/2^n) = 2\sin(\theta/2^{n+1})\cos(\theta/2^{n+1})$, car $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.
On en déduit après simplifications :

$$p_{n+1} = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{2^{n+1}\sin(\theta/2^{n+1})}.$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

On a montré par récurrence que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Avec l'équivalent $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ utilisé avec $x = \theta/2^n$ (qui tend bien vers 0), on obtient $\sin(\theta/2^n) \underset{n\to\infty}{\sim} \theta/2^n$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin(\theta/2^n) = \theta$.

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p_0 \frac{\sin(\theta)}{\theta} = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\theta}.$$

Exercice 3

1) Comme $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = (-1)^n$, on obtient en faisant la somme :

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\Big) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

On en déduit donc :

$$u_n = u_0 \exp\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right).$$

2) On a $\sqrt[n]{u_n} = u_0^{1/n}\exp\left(\frac{1-(-1)^n}{2n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, mais $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\big((-1)^n\big)$ diverge (elle prend la valeur e pour les rangs pairs et e^{-1} pour les rangs impairs).

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

1) Si $\theta = \pi$, $e_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} = (-1)^n$.
La suite $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et $(e_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -1.

2) En utilisant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)^n$, on voit une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Comme $|q| = 1$, cette suite converge si, et seulement si, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$.
Or, $\theta \in [0, 2\pi[$, donc finalement : $\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\theta = 0$.

3) On utilise les formules d'addition et le fait que $\sin(\theta) \neq 0$.

a) Si $\big(\cos(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors de $\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$, on déduit (car $\sin(\theta) \neq 0$) :

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}\Big(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \cos\big((n+1)\theta\big)\Big).$$

Donc la suite $\left(\sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admettrait une limite réelle.

De même, si on suppose $\left(\sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, en écrivant :

$\sin\big((n+1)\theta\big) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta)$, on déduit (en divisant à nouveau par $\sin(\theta) \neq 0$) que $\left(\cos(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Comme $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, au moins l'une de ces deux suites diverge (partie réelle et imaginaire). En conclusion :

Quand $\theta \in]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$, les deux suites $\left(\cos(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Remarque

Si $\theta = \pi$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ (diverge) et $\sin(n\pi) = 0$ (converge).

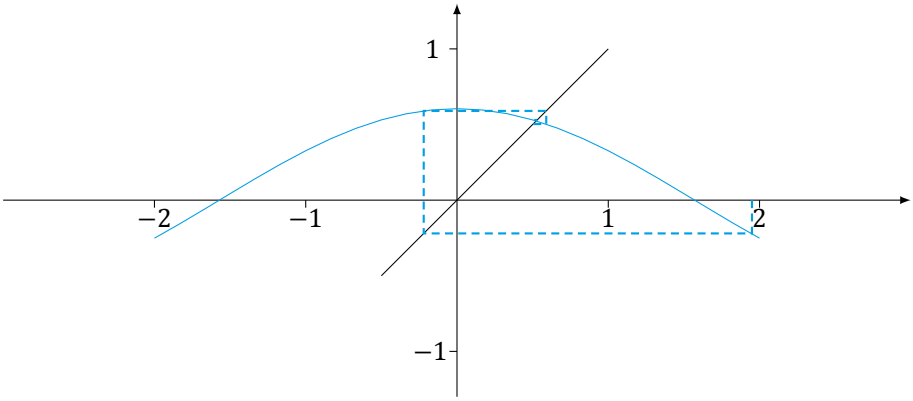
Exercice 5

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Donc il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1/2$.

2) Or, u_{n+1} et u_n étant entiers, $|u_{n+1} - u_n|$ est un entier naturel.
Donc, à partir du rang n_0, $|u_{n+1} - u_n| = 0$ et $u_{n+1} = u_n$.
On prouverait par récurrence $u_n = u_{n_0}$ pour $n \geqslant n_0$.

Exercice 6

On commence par une étude en utilisant la courbe $y = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cos(x)$.



On conjecture que la fonction $f : x \mapsto \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cos(x)$ n'a qu'un seul point fixe ℓ et que la suite converge vers ce point fixe sans être monotone.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc tous les termes de la suite sont bien définis et à partir du rang 1, ils appartiennent à $[-\pi/2, \pi/2]$ (on pourrait être plus précis sans peine).

- Point fixe de f

  Notons $g : x \mapsto f(x) - x$.

  Pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $g'(x) = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sin(x) - 1 < 0$, car $\left|-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sin(x)\right| < 1$.

  Donc g étant continue et strictement décroissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, g réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur l'intervalle image $[g(\pi/2), g(-\pi/2)] = [-\pi/2, \pi/2]$ qui contient 0.

  Donc f admet un unique point fixe dans $[-\pi/2, \pi/2]$ puisque g n'a qu'un seul zéro.

  On remarque que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donne $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

  Le seul point fixe de f est $\ell = \frac{\pi}{6}$.

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $|\cos'| = |-\sin| \leqslant 1$.

  D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tous x et y réels :

$$\left|\cos(y) - \cos(x)\right| \leqslant 1 \cdot |y - x|.$$

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|u_{n+1} - \frac{\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left|\cos(u_n) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left|u_n - \frac{\pi}{6}\right|.$$

  En notant $k = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, on en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \pi/6| \leqslant k^n\,|u_0 - \pi/6|.$$

- On vérifie que $k \in [0, 1[$, donc $k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

  Le théorème d'encadrement permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi/6$.

Exercice 7

1) Si z_0 est un réel, la suite est stationnaire :
   - si $z_0 \geqslant 0$, on remarque que $z_1 = z_0$, puis que $z_n = z_0$ (par récurrence sur n sans difficulté) ;
   - si $z_0 < 0$, on aura $z_1 = 0$, puis $z_n = 0$ à partir du rang 1.

2) On suppose désormais $z_0 \notin \mathbb{R}$.

   L'illustration graphique page 15 permet de conjecturer la convergence vers un réel positif.

   a) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}_n$ la proposition « $z_n \notin \mathbb{R}$ ».
      - Initialisation

        Puisque $z_0 \notin \mathbb{R}$, $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
      - Hérédité

        Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie. Montrons par l'absurde que z_{n+1} n'appartient pas non plus à $\mathbb{R}$.

        Si z_{n+1} était un réel, on déduirait de $z_n = 2z_{n+1} - |z_n|$ que z_n est réel, ce qui contredirait $\mathcal{Q}_n$.

        Donc $z_{n+1} \notin \mathbb{R}$, $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

Finalement, on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}$.

En particulier, $z_n \neq 0$, donc $\rho_n = |z_n| > 0$ et on peut choisir un argument θ_n de z_n dans $]-\pi, \pi]$. De plus, $\theta_n \neq 0$, car z_n n'est pas un réel positif et $\theta \neq \pi$, car z_n n'est pas un réel négatif.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_n > 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ tels que :

$$z_n = \rho_n e^{i\theta_n}.$$

b) On a ainsi :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n) = \rho_n \frac{e^{i\theta_n} + 1}{2},$$

puis en factorisant par $e^{i\theta_n/2}$:

$$z_{n+1} = \rho_n e^{i\theta_n/2} \frac{e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2}}{2} = \rho_n e^{i\theta_n/2} \cos(\theta_n/2).$$

En particulier, les modules sont égaux :

$$\rho_{n+1} = \rho_n \left|\cos(\theta_n/2)\right|.$$

Compte tenu des choix faits sur les arguments, on a $\cos(\theta_n/2) > 0$, d'où :

$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos(\theta_n/2).$$

On en déduit que $\rho_{n+1} \leqslant \rho_n$ (car $\cos(\theta_n/2) \leqslant 1$ et $\rho_n \geqslant 0$).

La suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Sa limite ℓ est un réel positif.

D'autre part, $\exp(i\theta_{n+1}) = \exp(i\theta_n/2)$, donc $\theta_{n+1} \equiv \theta_n/2\ [2\pi]$. Or, ils appartiennent tous les deux à $]-\pi, \pi[$, donc :

$$\theta_{n+1} = \theta_n/2.$$

La suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $1/2$. Or, $|1/2| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$.

On aura donc $\exp(i\theta_n) = \cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + i0 = 1$ (par continuité de cos et sin en 0).

Finalement, par produit, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \cdot 1 = \ell$.

Remarque

On a $\theta_n = \theta_0/2^n$, donc $\rho_{n+1} = \rho_n \cos(\theta_n/2) = \rho_n \cos(\theta_0/2^{n+1})$. Donc $\rho_n = \frac{\rho_0}{p_0} p_n$ où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite étudiée à l'exercice 2, donc $\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho_0 \sin(\theta_0)/\theta_0$.

CORRECTIONS

Exercice 8

Observons le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

On remarque dans une ligne du triangle la valeur 1 des deux termes extrêmes $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, et la symétrie due à $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. On conjecture aussi que les coefficients $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ croissent, puis décroissent.

Démontrons cette dernière observation. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Donc :

$$\binom{n}{k+1} \geqslant \binom{n}{k} \iff \frac{n-k}{k+1} \geqslant 1 \iff 2k \leqslant n-1.$$

Cela montre que la séquence (suite finie) $\left(\binom{n}{k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ croît, puis décroît.

On a donc :

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} + 1,$$

et $\binom{n}{1} = n$ est le plus petit des termes $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Ce qui permet de majorer la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ par $\frac{1}{n} \times (n-1)$ (il y a $n-1$ termes tous plus petits que $\frac{1}{n}$), mais cela n'est pas assez précis pour conclure.

On améliore en écrivant :

$$u_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Et on a, puisque $\binom{n}{2}$ est le plus petit des $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![2, n-2]\!]$:

$$0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant (n-3)\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

Or, $\frac{2(n-3)}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'où, par encadrement, $\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 2.

Exercice 9

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_n : x \mapsto x^{n+1} + x^n + 2x - 1$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} + 2 > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left[f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [-1, +\infty[$, ce qui prouve qu'elle s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$. On note x_n l'unique zéro de f_n, c'est-à-dire l'unique réel positif vérifiant :
$$x_n^{n+1} + x_n^n + 2x_n - 1 = 0.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + 2\frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2^{n+1}} > 0 = f_n(x_n)$, donc $x_n \leqslant \frac{1}{2}$ d'après la croissance de f_n.

3) De même :
$$f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{n+2} + {x_n}^{n+1} + 2x_n - 1 = {x_n}^{n+2} - {x_n}^n = {x_n}^n\left({x_n}^2 - 1\right) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$
Donc $x_n \leqslant x_{n+1}$ d'après la croissance de f_{n+1}.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, croissante et majorée par $1/2$, converge vers une limite $\ell \leqslant 1/2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant x_n \leqslant 1/2$, donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant 1/2^n$. Or, $1/2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc par encadrement, $x_n^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a alors $x_n^{n+1} = x_n \cdot x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \cdot 0 = 0$. À partir de la relation $x_n^{n+1} + x_n^n + 2x_n - 1 = 0$, on obtient, par unicité de la limite, $0 + 0 + 2\ell - 1 = 0$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/2$.

Exercice 10

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$(n+1)v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = nv_n + u_{n+1}.$$
Donc :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{nv_n + u_{n+1}}{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{n+1}.$$
Comme la suite u est croissante, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \leqslant u_{n+1}$. Donc $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \leqslant nu_{n+1}$.
On en déduit que $v_n \leqslant u_{n+1}$, puis que $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2) Par croissance de u, on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$nu_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = 2nv_{2n} - nv_n,$$
ce qui peut s'écrire :
$$v_{2n} \geqslant \frac{v_n + u_n}{2}.$$

CORRECTIONS

3) La suite u étant croissante de limite ℓ, elle est majorée par ℓ.
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \leqslant \ell$ et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \frac{n\ell}{n} = \ell.$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par ℓ. Donc elle est convergente de limite $\ell' \leqslant \ell$.
En passant à la limite dans l'inégalité de la question 3), on a aussi $\ell' \geqslant \frac{\ell'+\ell}{2}$, donc $\ell' \geqslant \ell$.
On a ainsi égalité et on conclut :

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \ell.$$

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 11

1) Rappelons que, par définition, on a pour tout réel x : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. En particulier :

$$0 \leqslant u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < 1.$$

La suite de terme général u_n est bornée.

2) Pour k et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \iff k \leqslant \sqrt{n} < k+1 \iff k^2 \leqslant n < (k+1)^2.$$

Donc $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ pour $n \in [\![k^2, (k+1)^2 - 1]\!]$. D'où l'idée d'utiliser des suites extraites :

- Avec $n = k^2$, on a une première suite extraite $(u_{k^2})_{k\in\mathbb{N}}$ qui est constante, égale à 0.
- Avec $n = (k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$ (le plus grand n tel que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$) :

$$\begin{aligned} u_{k^2+2k} &= \sqrt{k^2+2k} - k \\ &= \frac{\left(\sqrt{k^2+2k}\right)^2 - k^2}{\sqrt{k^2+2k}+k} && \text{en utilisant } a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b} \\ &= \frac{(k^2+2k)-k^2}{\sqrt{k^2+2k}+k} && \text{en utilisant } \left(\sqrt{u}\right)^2 = u \\ &= \frac{2k}{\sqrt{k^2+2k}+k} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{k}}+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $u_{k^2+2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.
On a une deuxième suite extraite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_{k^2+2k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Remarque

Pour la seconde suite extraite, on aurait pu utiliser l'équivalent $(1+u)^{1/2} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u$:

$u_{k^2+2k} = k\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} = 1$. Donc $\lim\limits_{k\to\infty} u_{k^2+2k} = 1$.

Exercice 12

On pose classiquement $G_n = \sum_{p=1}^{n} \exp\left(\mathrm{i}\frac{p}{n^2}\right)$ pour avoir $u_n = \mathrm{Im}(G_n)$ et l'utilisation d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison $\exp\left(\mathrm{i}\frac{1}{n^2}\right)$:

$$\begin{aligned}
G_n &= \sum_{p=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n^2}}\right)^p \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n^2}} - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n^2}}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n^2}}} \qquad \sum_{p=1}^{n} q^p = \frac{q-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n^2}} \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n^2}}} \qquad \text{factorisation} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{n^2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2n}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2n^2}}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2n^2}\right)} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} 2\mathrm{i}\sin(\theta/2) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2n^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2n}} \frac{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2n^2}\right)}. \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)}
\end{aligned}$$

En prenant la partie imaginaire :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}\right) \frac{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2n^2}\right)}.$$

En utilisant l'équivalent $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on obtient :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}\right) \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n^2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$.

Remarque

Une autre (bonne) idée (inspirée de $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ puisque tous les arguments sont petits) serait d'introduire $a_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2}$. On peut ainsi espérer montrer que la différence entre u_n et a_n tend vers 0. L'intérêt étant que $a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

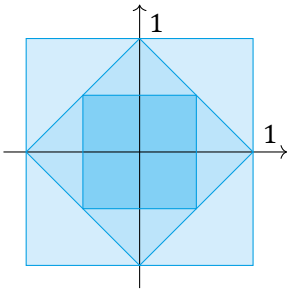
Pour majorer simplement $|u_n - a_n|$, on peut utiliser la majoration (obtenue par inégalité de Taylor-Lagrange) :

$$\left|\sin(x) - x\right| \leqslant \frac{1}{6}|x|^3.$$

CORRECTIONS

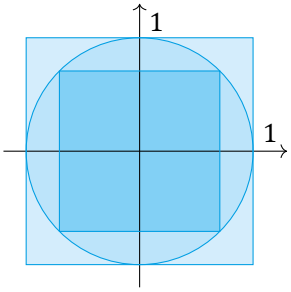
Espaces vectoriels normés

3



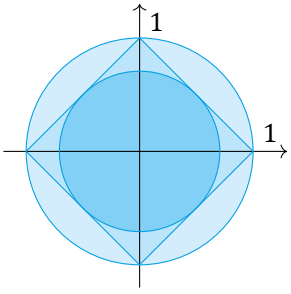
$$\overline{B}_\infty\left(0,\tfrac{1}{2}\right) \subset \overline{B}_1(0,1) \subset \overline{B}_\infty(0,1)$$

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2\|x\|_\infty$$



$$\overline{B}_\infty\left(0,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \subset \overline{B}_2(0,1) \subset \overline{B}_\infty(0,1)$$

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_\infty$$



$$\overline{B}_\infty\left(0,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \subset \overline{B}_1(0,1) \subset \overline{B}_2(0,1)$$

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_2$$

Ces figures illustrent le fait que, dans $\mathbb{R}^2$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes (en fait, sur $\mathbb{R}^2$, toutes les normes sont équivalentes).

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3} \end{cases}.$$

On posera pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et pour une colonne $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\|C\|_\infty = \max(|a|, |b|)$.

1) Préciser une matrice carrée A et une matrice colonne B telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B.$$

2) Déterminer l'unique matrice colonne L vérifiant $AL + B = L$.

3) Montrer que pour toute colonne X, on a $\|AX\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|X_n - L\|_\infty \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \|X_0 - L\|_\infty.$$

5) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{4}{7}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{1}{14}$.

Exercice 2

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$N(x, y) = \max(|x|, |x + y|).$$

1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Représenter la boule unité centrée à l'origine pour cette norme.

3) En notant $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$, démontrer pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x, y) \leqslant 2N_\infty(x, y) \quad \text{et} \quad N_\infty(x, y) \leqslant 2N(x, y).$$

Exercice 3

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé .
Montrer que pour tous x et y dans E :

$$\|x\| + \|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x + y\|.$$

Exercice 4

Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, x et y deux vecteurs non nuls de E.
Montrer :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2}{\|x\|}\|x - y\|.$$

Exercice 5 ⋆

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad N_\infty(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1) Montrer que N est une norme sur E.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(\pi n x).$$

   a) Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N(f_n)$ en fonction de n.
   b) Vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E pour la norme N_∞ et ne converge pas vers 0_E pour la norme N.

3) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que :

$$\forall f \in E, \quad N(f) \leqslant C N_\infty(f).$$

4) Montrer que :

$$\forall f \in E, \quad N_\infty(f) \leqslant N(f).$$

Indication : On remarquera que pour $x \in [0, 1]$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie A de E, on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

1) Pour toutes parties A et B de E, montrer que si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2) Pour toute partie A de E, montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert.

Exercice 7

Soient a et b deux éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.
On note $\overline{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$.
Montrer que pour tous r et $R \in]0, +\infty[$:

$$\|b-a\| \leqslant R-r \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R).$$

D'après Centrale-Supélec

Exercice 8 ⋆

Soient (E,d) un espace métrique et F un fermé de E. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \bigcup_{x\in F} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est un ouvert contenant F.
2) Montrer que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

Exercice 9 ⋆

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, soit A une partie non vide de E.
Pour $x \in E$, on pose $\delta_A(x) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$ (appelée *distance* de x à A).

1) Montrer que pour $x \in E$, on a :
$\delta_A(x) = 0$ si, et seulement si, x est adhérent à A.
2) Montrer que δ_A est 1-lipschitzienne de $(E, \|\ \|)$ dans $(\mathbb{R}, |\ |)$.
3) Vérifier que les questions précédentes entraînent en particulier que l'adhérence de A est une partie fermée de E.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 10

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé.
L'adhérence d'une boule ouverte de rayon $r > 0$ est-elle la boule fermée de même centre et même rayon ?

Exercice 11

Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}$.
Montrer que $U \times V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie ?
Qu'en est-il avec des fermés non vides ?

Exercice 12

Soient E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On envisage les trois propositions suivantes :

(i) « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge »
(ii) « les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent »
(iii) « les trois suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent »

1) Les propositions (i) et (ii) sont-elles équivalentes ?
2) Les propositions (i) et (iii) sont-elles équivalentes ?

D'après Mines-Ponts

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Existe-t-il une norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\|AB\| = \|A\|\|B\|$$

pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 14 ⋆

Soient E un espace vectoriel réel, N_1 et N_2 deux normes sur E et B_1 (resp. B_2) la boule fermée de centre 0_E et de rayon 1 au sens de N_1 (resp. B_2).

1) Les propositions « $B_1 = B_2$ » et « $N_1 = N_2$ » sont-elles équivalentes ?
2) A-t-on la même conclusion avec des boules ouvertes ?

CORRECTIONS

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

2) On résout $AL + B = L$, d'inconnue $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$:

$$(A - I_2)L = -B \iff \begin{cases} -\frac{5}{6}\ell_1 + \frac{1}{3}\ell_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\ell_1 - \frac{2}{3}\ell_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -\frac{5}{6}\ell_1 + \frac{1}{3}\ell_2 = -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{6}\ell_1 + 0\ell_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

On en déduit que l'unique solution est $L = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

3) Avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a $AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \end{pmatrix}$, donc $\|AX\|_\infty = \max\left(\left|\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b\right|, \left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right|\right)$.

Rappel : Pour tous réels a, b et m, on a l'équivalence suivante :

$$m \leqslant \max(|a|, |b|) \iff (m \leqslant |a| \quad \text{et} \quad m \leqslant |b|).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire :

$\left|\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b\right| \leqslant \frac{1}{6}|a| + \frac{1}{3}|b| \leqslant \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\|X\|_\infty = \frac{1}{2}\|X\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$,

$\left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right| \leqslant \frac{1}{2}|a| + \frac{1}{3}|b| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\|X\|_\infty = \frac{5}{6}\|X\|_\infty$.

Donc, pour toute colonne $X = \binom{a}{b}$, $\|AX\|_\infty = \max\left(\left|\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b\right|, \left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right|\right) \leqslant \frac{5}{6}\|X\|_\infty$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: « $\|X_n - L\|_\infty \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n \|X_0 - L\|_\infty$ ».

- Initialisation

  $\mathcal{P}_0$ est vraie, car $(5/6)^0 = 1$.
- Hérédité

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

  On a $X_{n+1} - L = AX_n + B - (AL + B) = A(X_n - L)$, d'où $\|X_{n+1} - L\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\|X_n - L\|_\infty$ d'après la question précédente.

  Donc d'après $\mathcal{P}_n$: $\|X_{n+1} - L\|_\infty \leqslant \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \|X_0 - L\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \|X_0 - L\|_\infty$.

  Par conséquent, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) On a $\lim\limits_{n\to\infty} (5/6)^n = 0$, car $5/6 \in [0, 1[$, donc par encadrement $\|X_n - L\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

D'où $X_n = \binom{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L = \binom{4/7}{-1/14}$, donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 4/7$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -1/14$.

Exercice 2

1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, u et v dans $\mathbb{R}^2$. On note $u = (x, y)$, $v = (x', y')$.

- Positivité et cas de nullité

  $N(u) = \max(|x|, |x + y|) \geqslant 0$, car $0 \leqslant |x| \leqslant \max(|x|, |x + y|)$.

  Si $N(u) = 0$, alors ($|x| \leqslant 0$ et $|x + y| \leqslant 0$), donc $x = 0$, puis $y = 0$. D'où $u = 0_{\mathbb{R}^2}$.
- Homogénéité

  $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$ et $\max(|\lambda||x|, |\lambda||x + y|) = |\lambda| \max(|x|, |x + y|)$, car $|\lambda| \geqslant 0$.

  Donc $N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u)$.
- Inégalité triangulaire

  $u + v = (x + x', y + y')$, donc $N(u + v) = \max(|x + x'|, |x + x' + y + y'|)$.

  Or, $|x + x'| \leqslant |x| + |x'| \leqslant N(u) + N(v)$

  et $|x + x' + y + y'| \leqslant |x + y| + |x' + y'| \leqslant N(u) + N(v)$.

  Donc $N(u + v) \leqslant N(u) + N(v)$.

On a montré que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.