

**Cours
Exercices
et cas pratiques**

Thierry Alhalel

Introduction aux probabilités avec Python



DUNOD

Thierry Alhalel

Introduction aux probabilités avec Python

DUNOD

LES + EN

LIGNE



Pour aller plus loin et mettre toutes les chances de votre côté, des ressources complémentaires sont disponibles sur le site www.dunod.com.

Connectez-vous à la page de l'ouvrage (grâce aux menus déroulants, ou en saisissant le titre, l'auteur ou l'ISBN dans le champ de recherche de la page d'accueil).

Sur la page de l'ouvrage, sous la couverture, cliquez sur le lien « LES + EN LIGNE ».

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Illustration de couverture : © BEST-BACKGROUNDS – Shutterstock.com

L'auteur et les éditions Dunod remercient Jean-Marie Monier, professeur de mathématiques en classes préparatoires au lycée La Martinière-Monplaisir (Lyon), pour sa relecture attentive de l'ouvrage.

© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083250-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1	Les dénombrements	9
1.1	Dénombrements et théorie ensembliste	9
1.2	Permutations, arrangements et combinaisons	10
1.2.1	Permutations	10
1.2.2	Arrangements (on tient compte de l'ordre du tirage)	10
1.2.3	Combinaisons (on ne tient pas compte de l'ordre du tirage)	11
1.3	Petit résumé	12
1.4	Exercices de dénombrement	12
1.5	Exercices autour de la formule de Stirling	26
2	Probabilités générales	37
2.1	Description ensembliste	37
2.2	Probabilité d'un événement	39
2.3	Exercices sur les probabilités générales	41
2.4	Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes	49
2.5	Exercices sur les probabilités conditionnelles	51
3	Lois de probabilité discrètes	69
3.1	Variables aléatoires	69
3.1.1	Une définition	69
3.1.2	Une façon plus axiomatique de voir les choses	69
3.1.3	Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète	70
3.1.4	Fonction de répartition	71
3.1.5	Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète	71
3.2	Des exemples de lois discrètes	71
3.2.1	La loi uniforme discrète	71
3.2.2	La loi de Bernoulli $B(1, p)$	72
3.2.3	La loi binomiale $B(n, p)$	72
3.2.4	La loi hypergéométrique $H(N, n, p)$	73
3.2.5	La loi géométrique $G(p)$	74
3.2.6	La loi de Pascal $Pa(r, p)$	75
3.2.7	La loi de Poisson $P(m)$	76
3.2.8	La loi de Zipf	77
3.3	Exercices sur les lois discrètes	78

4	Lois de probabilité continues	103
4.1	Variables aléatoires continues	103
4.1.1	Une définition	103
4.1.2	Fonction de répartition	103
4.1.3	Caractéristiques d'une variable aléatoire continue	104
4.1.4	Covariance de deux variables aléatoires	104
4.2	Des lois continues	105
4.2.1	La loi uniforme continue	105
4.2.2	La loi exponentielle	106
4.2.3	La loi gaussienne ou normale	107
4.2.4	La loi log-normale	110
4.2.5	La loi de Pareto	111
4.3	Exercices sur les lois continues	112
5	Théorèmes limites	131
5.1	Inégalité de Tchebychev	131
5.2	La loi des grands nombres (faible)	132
5.3	Le théorème central limite	133
5.4	Exercices	134
6	Moments et fonctions caractéristiques	155
6.1	Distributions jointes	155
6.2	Changement de variable	155
6.3	Convolution	156
6.4	Moments d'ordre p	156
6.5	Fonction génératrice	157
6.6	Fonction caractéristique	157
6.7	Exercices	158
7	Méthode de Monte-Carlo et calcul intégral	171
7.1	Intégration numérique classique	171
7.1.1	La méthode des rectangles	171
7.1.2	La méthode des trapèzes	175
7.1.3	Le cas des intégrales multiples	178
7.2	La méthode de Monte-Carlo	179
7.2.1	Première ébauche : une estimation du nombre π	179
7.2.2	Méthode de Monte-Carlo pour le calcul des intégrales	181
7.2.3	Méthode de Monte-Carlo avec une distribution générale $p(x)$	182
7.3	Exercices	183
8	Générateurs congruentiels linéaires et hasard	211
8.1	Le hasard en informatique	211
8.2	Les générateurs congruentiels linéaires	212
8.2.1	Principe	212
8.2.2	Les critères de Knuth	213
8.2.3	Des exemples de GCL	213

8.3	Les tests de qualité	214
8.3.1	Le test de la moyenne	214
8.3.2	le test du χ^2	214
8.3.3	Tests spectraux	217
8.3.4	Test de Kolmogorov-Smirnov	217
8.3.5	Les générateurs réellement utilisés en informatique	219
8.4	Utiliser un générateur uniforme pour obtenir une autre loi	219
8.4.1	Le cas des lois discrètes	219
8.4.2	Le cas des lois continues	220
8.5	Exercices	221

Introduction générale

Cet ouvrage traite des probabilités au niveau L (licence) et s'adresse aussi bien aux étudiants de licence que d'IUT ou de BTS. Il regroupe des exercices par thème, comme le schématise la figure ci-dessous.

Chaque chapitre est constitué de rappels de cours puis d'exercices de difficulté croissante. Certains d'entre eux sont traités avec l'aide de la programmation en langage python3. Les deux derniers chapitres sont exclusivement construits autour de la thématique python.

Nous supposons que le lecteur est familier de ce langage. Vous trouverez de nombreux codes python dans le corps du texte. Ils sont aussi accessibles sur le site de Dunod.

Ce livre s'adresse aux étudiants qui veulent se spécialiser en mathématiques ou en informatique, ainsi qu'à ceux qui s'orientent vers la physique, la chimie, voire la biologie.

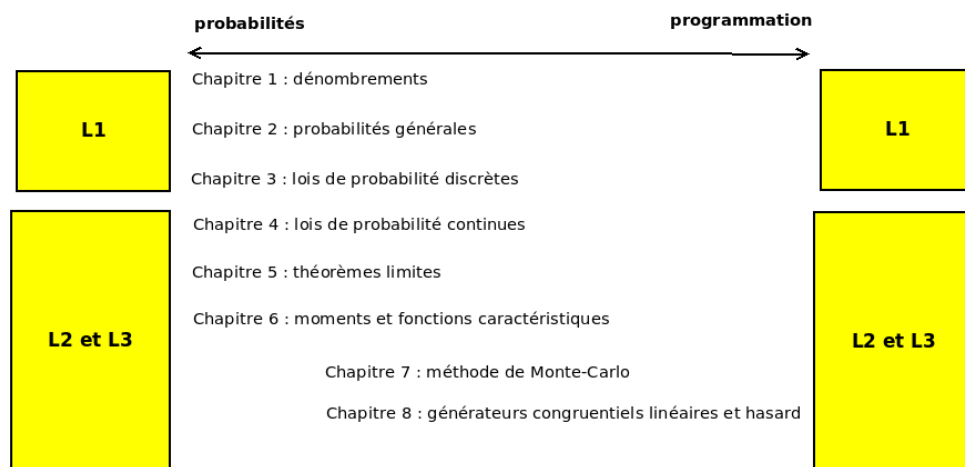


FIGURE 1 – Une organisation possible des chapitres selon les années L1/L2/L3 avec la dominante probabilités / programmation

Les programmes ont été développés et testés à la fois sous les environnements linux et windows 7 :

- avec **geany** et **scite** en linux mint,
- avec **spyder3** en windows 7.

La simplicité d'usage de python3 permet de sortir des sentiers battus des calculs de probabilité, et de tester des problèmes moins habituels : très grands dénombrements, problème de Monty Hall, générateurs congruentiels linéaires, méthode de Monte-carlo, en faisant un large usage des représentations graphiques.

Le lecteur ne trouvera pas de chapitre dédié aux chaînes de Markov, par manque de place. Cette omission sera peut-être corrigée, dans une future édition, si la présente rencontre un large public.

On peut considérer que les chapitres 1, 2 et 3 correspondent plus à un programme de probabilité de première année, tandis que les suivants peuvent s'étager sur les années 2 et 3 de la licence et du BUT (Bachelor Universitaire de Technologie).

Nous souhaitons bon courage et bonne programmation au lecteur, la probabilité n'est pas nulle que vous vous amusiez, peut-être autant que l'auteur.

Chapitre 1

Les dénombrements

1.1 Dénombrements et théorie ensembliste

Dénombrer les cas possibles c'est mettre en correspondance l'ensemble E des événements qui nous intéressent avec une partie de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Le cas le plus simple est lorsque l'ensemble E est fini :

1. On dit que l'ensemble E est fini si on peut le mettre en bijection avec un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Autrement dit, on peut numérotter de 1 jusqu'à n les éléments distincts de E .
2. Le cardinal de E est son nombre d'éléments n , ce que l'on note $|E|$.
3. L'ensemble formé de tous les sous-ensembles de E est appelé l'ensemble des parties de E , ce que l'on note $P(E)$. Par exemple, si E contient deux éléments distincts : $E = \{x, y\}$, l'ensemble des parties de E possède quatre éléments :

$$P(E) = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \emptyset\}$$

On note ici $\emptyset$ l'ensemble vide (c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient rien).

4. Si A est une partie de E , son complémentaire $\bar{A}$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

Le complémentaire de l'ensemble E tout entier est l'ensemble vide $\emptyset : \bar{E} = \emptyset$.

5. La réunion (ou union) de deux ensembles A et B est notée $A \cup B$, elle est formée des éléments qui appartiennent à A ou B .

On dit que $\cup$ est une **loi de composition interne** (dans l'ensemble des parties de E) car si A et B appartiennent à $P(E)$, alors $A \cup B \in P(E)$.

On liste les propriétés suivantes de la loi de composition interne $\cup$:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = A \cup B \cap C$ (propriété d'**associativité** de la loi)
- $A \cup B = B \cup A$ (propriété de **commutativité** de la loi)
- $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ ($\emptyset$ est l'**élément neutre** de la loi)
- $A \cup A = A$ ($\cup$ est dite **idempotente**)

6. L'intersection de deux ensembles A et B est notée $A \cap B$, elle est formée des éléments qui appartiennent à A et B en même temps. On peut vérifier que $\cap$ est aussi une loi de composition interne pour $P(E)$, et possède des propriétés similaires à l'union. (Cette fois $\emptyset$ est l'élément neutre de la loi de composition interne $\cap$).

7. Une famille finie de parties non vides (A_i) (avec $i = 1, 2, \dots, n$) d'un ensemble E réalise une **partition** de E si et seulement si deux conditions sont remplies :

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E$$

8. Si E est un ensemble fini comportant n éléments, alors on sait que le **cardinal** de l'ensemble des parties $P(E)$ de E est :

$$|P(E)| = 2^n$$

9. Si une famille finie de parties non vides (A_i) (avec $i = 1, 2, \dots, n$) d'un ensemble E est une partition de E , alors on a :

$$|E| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

1.2 Permutations, arrangements et combinaisons

1.2.1 Permutations

On dispose d'un ensemble E contenant $n \geq 1$ éléments. On considère un réarrangement des n éléments (supposés discernables). Ce réarrangement est aussi appelé permutation des n éléments. Il y a en tout $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 2 \times 1$ permutations possibles pour un ensemble de n éléments.

On dit aussi qu'une permutation de l'ensemble E est une bijection de E dans E .

On rappelle aussi que $0! = 1! = 1$

1.2.2 Arrangements (on tient compte de l'ordre du tirage)

On dispose d'un ensemble E contenant $n \geq 1$ éléments distincts. On choisit $p \leq n$ éléments parmi les n éléments et l'ordre dans lequel on les obtient est important. On considère qu'il **n'y a pas de répétition**, c'est à dire que le tirage est sans remise.

On appelle arrangement la liste ordonnée obtenue, et le nombre total d'arrangements distincts est noté A_n^p .

Lorsqu'on tire le premier élément, il y a n choix possibles, pour le deuxième élément il y a $n-1$ choix possibles et ainsi jusqu'au p -ième tirage. On a donc la relation :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On dit aussi que A_n^p est le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Remarque : la formule des arrangements se généralise aussi au cas $p = 0$.