

Nicolas Simon | Séverine Bagard

PHYSIQUE

MPSI-MP2I-PTSI

EXERCICES INCONTOURNABLES

4^e édition

DUNOD

l'intelligence

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

Table des matières

Outils mathématiques

1 Les équations différentielles linéaires	6
2 Les nombres complexes	14
3 Systèmes de coordonnées et analyse vectorielle	21

Ondes et signaux

4 Formation des images	40
5 Signaux électriques dans l'ARQS	83
6 Circuit linéaire du premier ordre	103
7 Oscillateurs libres et forcés	135
8 Filtrage linéaire	167
9 Propagation d'un signal	185
10 Champ magnétique et induction	210
11 Introduction à la physique quantique	246

Mouvements et interactions

12 Cinématique	264
13 Dynamique newtonienne	280
14 Mouvements de particules chargées	329
15 Mouvements dans un champ de force centrale	357
16 Moment cinétique et mouvement d'un solide	373

L'énergie : conversions et transferts

17	Bilans énergétiques et entropiques	394
18	Machines thermiques et changements d'états	427

Partie 1

Outils mathématiques

Outils mathématiques

1 Les équations différentielles linéaires	6
1.1 : Équation homogène du premier ordre	6
1.2 : Équation du premier ordre avec second membre	7
1.3 : Équation avec second membre fonction du temps	8
1.4 : Équation du deuxième ordre	11
2 Les nombres complexes	14
2.1 : Module et argument d'un nombre complexe	14
2.2 : Utilisation de la notation complexe	18
3 Systèmes de coordonnées et analyse vectorielle	21
3.1 : Base polaire	21
3.2 : Base sphérique	23
3.3 : Surface et volume élémentaires	24
3.4 : Produit vectoriel	28
3.5 : Dérivées partielles	30
3.6 : Opérateur gradient	33

Objectifs généraux développés

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique en classe de CPGE. Nous en avons rassemblé un certain nombre. Ce chapitre n'a cependant pas vocation à être étudié de façon linéaire. Il convient de s'y reporter au fur et à mesure que le besoin s'en fera sentir. Ces outils devront être maîtrisés progressivement, et acquis en fin d'année.

Nous commencerons par nous intéresser aux **équations différentielles**, auxquelles mène souvent la modélisation des phénomènes physiques et des lois qui en découlent. Lorsque la fonction et ses dérivées n'interviennent qu'à la puissance unité, l'équation différentielle est dite **linéaire**.

En physique, nous nous limiterons à des équations différentielles des premier et second ordres, avec ou sans second membre. Dans le cas d'équations différentielles avec second membre, la méthode de résolution couramment utilisée en physique n'est pas la méthode générale qui peut être exposée en mathématiques, mais une simplification de cette dernière, adaptée aux cas que nous rencontrons habituellement.

Dans le cas d'équations différentielles **non linéaires**, la méthode présentée n'est plus applicable. Il faut alors résoudre directement l'équation différentielle proposée dans son ensemble, par **séparation des variables**. Cette technique sera utilisée lors de la résolution d'exercices de mécanique.

Nous aborderons ensuite les **nombres complexes**, qui constituent un outil mathématique largement utilisé en physique, notamment en **électrocinétique**, en **mécanique**, en **méthode de résolution** de systèmes d'équations différentielles couplées...

Enfin les **systèmes de coordonnées** seront nécessaires notamment en mécanique, pour repérer la position d'un point M de l'espace. L'idée générale consiste à décomposer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ associé à ce point en trois vecteurs colinéaires aux trois vecteurs orientant les axes de base du système de coordonnées. Cette base sera, dans tous les cas, **orthonormée et directe**, de sorte que les opérateurs de base de l'analyse vectorielle (**produit scalaire**, **produit vectoriel**...) y soient facilement utilisables.

Nous rencontrerons deux types de bases ; la base **fixe** du système **cartésien** et les bases **mobiles** des systèmes **cylindrique** et **sphérique**.

Les équations différentielles linéaires

Exercice 1.1 : Équation homogène du premier ordre

Lors de la décharge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R , la fonction $u(t)$ décrivant les variations de la tension aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

avec $\tau = RC$. Résoudre cette équation différentielle en prenant comme condition initiale $u(t = 0) = E$.

• Analyse de l'énoncé

L'équation à résoudre est bien linéaire, car seules la fonction $u(t)$ et sa dérivée première $\frac{du}{dt}$ à la puissance 1 interviennent. Par ailleurs, elle est à coefficients constants et son second membre est nul. Une telle équation différentielle est appelée **équation homogène** ou encore équation sans second membre. Sa résolution est doublement importante à maîtriser, puisqu'elle constitue également la première étape de résolution dans le cas d'une équation différentielle linéaire avec second membre non nul.

L'équation étant du premier ordre (seule la dérivée première intervient), sa résolution va faire apparaître une constante d'intégration. Celle-ci sera déterminée en fin de résolution grâce à une condition, le plus souvent initiale (valeur de u à $t = 0$).

• Méthode de séparation des variables

Pour résoudre ce type d'équation homogène, on **sépare les variables**, c'est-à-dire que l'on réunit d'un même côté tout ce qui est en u et du , et de l'autre tout ce qui est en t et dt . Il ne reste plus alors qu'à intégrer chacun des deux membres.



La séparation des variables dans l'équation différentielle proposée mène à :

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln u = -\frac{t}{\tau} + K$$

où K est la constante d'intégration.

Bien que nous ayons écrit une primitive de chacun des membres, il n'est pas nécessaire de faire apparaître une constante d'intégration de chaque côté. On considère en fait que K contient ces deux constantes. On isole enfin la fonction $u(t)$ afin de déterminer la constante d'intégration par application de la condition initiale.



On passe alors à l'exponentielle :

$$u = e^{-\frac{t}{\tau}+K} = e^K \times e^{-\frac{t}{\tau}} = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On change le nom de la constante d'intégration en $\lambda = e^K$ pour alléger les notations.

• Détermination de la constante d'intégration

À ce stade, il ne reste plus qu'à utiliser la condition particulière fournie pour u ($u(0) = E$). La tension aux bornes d'un condensateur étant toujours une fonction continue du temps, nous n'avons pas à nous demander si cette valeur initiale est valable avant ou après la bascule de l'interrupteur.



La condition initiale fournie permet d'écrire :

$$u(0) = E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda e^{-\frac{0}{\tau}} = E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = E \quad \Rightarrow \quad u(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Exercice 1.2 : Équation du premier ordre avec second membre

Lors de la charge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R par un générateur idéal de f.é.m. E , la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec $\tau = RC$. Résoudre cette équation différentielle en prenant comme condition initiale $u(t = 0) = 0$.

• Analyse de l'énoncé

Nous nous trouvons de nouveau face à une équation différentielle linéaire à coefficients constants, avec cette fois un second membre non nul. La solution d'une telle équation différentielle, **linéaire**, s'écrit alors comme la somme de deux termes :

- la **solution générale de l'équation homogène** (c'est-à-dire de l'équation sans second membre, notée ESSM) associée, ci-après notée u_g ;
- une **solution particulière de l'équation complète**, cherchée sous la même forme que le second membre de l'équation différentielle, ci-après notée u_p .

Par *solution générale de l'ESSM*, on entend solution engageant la/les constante(s) d'intégration. Autrement dit, les conditions (initiales) fournies par l'énoncé ne doivent pas être injectées à ce stade, mais appliquées une fois établie l'expression finale de la solution (somme de la solution générale de l'ESSM, et de la solution particulière).

• Détermination d'une solution particulière de l'équation complète

Pour ce qui est de la solution particulière on rencontrera deux types d'équations différentielles : celles dont le second membre est une constante (comme c'est le cas ici) et celles dont le second membre est fonction du temps.

Dans le cas d'un **second membre constant**, on recherche la solution particulière u_p sous forme d'une constante satisfaisant à l'équation complète. Il s'agit donc finalement de la valeur adoptée par $u(t)$ en régime permanent, au bout d'une durée suffisamment longue pour pouvoir négliger les phénomènes transitoires (typiquement $\gg \tau$). On injecte ainsi $u_p = \text{cte}$ dans l'équation différentielle complète (toutes les dérivées s'annulent donc) et on en déduit u_p .

Dans le cas d'un **second membre dépendant du temps**, on utilise en général une méthode dite d'*identification* : on postule la solution particulière comme étant une fonction du temps du même type que le second membre. Ce dernier point, ainsi que ses limites d'application, sont détaillés dans l'exercice suivant.



Cette méthode s'applique uniquement aux équations différentielles linéaires.



La solution générale de l'ESSM $\frac{du_g}{dt} + \frac{u_g}{\tau} = 0$ s'écrit (cf. exercice précédent) :

$$u_g = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec λ une constante d'intégration.

Pour ce qui est de la solution particulière u_p on obtient, en reportant $u_p = \text{cte}$ dans l'équation différentielle complète :

$$\frac{du_p}{dt} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \Rightarrow \quad u_p = E \quad \Rightarrow \quad u(t) = u_g + u_p = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

• Détermination de la constante d'intégration

C'est bien à la somme de la solution générale de l'ESSM et de la solution particulière de l'équation complète que l'on applique la condition initiale.



On détermine enfin λ à l'aide de la condition initiale fournie par l'énoncé :

$$u(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda e^{-\frac{0}{\tau}} + E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -E$$

D'où finalement :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Exercice 1.3 : Équation avec second membre fonction du temps

On parle de filiation radioactive lorsqu'un noyau père radioactif X_1 se désintègre pour donner un noyau fils X_2 , lui-même radioactif et menant à un noyau X_3 stable. On note respectivement λ_1 et $\lambda_2 > \lambda_1$ les constantes radioactives associées aux noyaux X_1 et X_2 . Les nombres $N_1(t)$ et $N_2(t)$ de noyaux X_1 et X_2 présents à la date t , satisfont aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad \text{et} \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Déterminer les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en supposant qu'à $t = 0$ $N_1(0) = N_0$ et $N_2(0) = 0$.

• Analyse de l'énoncé

On a ici un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants à résoudre. La particularité de ce système provient du fait que la deuxième équation fait intervenir la solution de la première. On va donc commencer par résoudre la première, que l'on identifie comme une équation différentielle homogène, puis réécrire la deuxième équation différentielle en y injectant ce premier résultat, avant de la résoudre à son tour.



La première équation différentielle s'écrit (cf. exercices précédents) :

$$\frac{dN_1}{dt} + \lambda_1 N_1 = 0$$

La solution de cette équation différentielle a pour expression :

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

La deuxième équation différentielle devient alors :

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

On se retrouve donc à présent en présence d'une équation différentielle avec second membre fonction du temps. En appliquant la méthode exposée à l'exercice précédent, on commence par chercher la solution générale de l'ESSM associée.



La solution générale de l'ESSM associée à la deuxième équation différentielle s'écrit :

$$N_{2,g}(t) = \lambda e^{-\lambda_2 t}$$

avec λ constante d'intégration.

• Utilisation de la méthode d'identification

Le second membre est du type $Ae^{-\lambda_1 t}$. On va donc injecter une solution $N_{2,p}(t) = Be^{-\lambda_1 t}$ dans l'équation différentielle complète, et en déduire la valeur de la constante B . L'intérêt de cette méthode, comme nous allons le voir, tient au fait que la dépendance temporelle $e^{-\lambda_1 t}$ de $u_p(t)$ se simplifie lors de cette opération.



On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme : $N_{2,p}(t) = Be^{-\lambda_1 t}$. On a alors $\frac{dN_{2,p}}{dt} = -\lambda_1 Be^{-\lambda_1 t}$. En reportant dans l'équation différentielle étudiée, on obtient :

$$-\lambda_1 Be^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

On en déduit immédiatement, après simplification par $e^{-\lambda_1 t}$:

$$B = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

On peut finalement écrire la solution complète :

$$N_2(t) = \lambda e^{-\lambda_2 t} + N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

• Détermination de la constante d'intégration

Il ne reste alors plus qu'à injecter la condition initiale portant sur la fonction N_2 afin de déterminer la constante d'intégration λ .



Avec $N_2(t=0) = 0$, on obtient $\lambda = -N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, d'où la solution finale :

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]$$

• Méthode de variation de la constante



Il peut vous paraître un peu miraculeux de voir la dépendance temporelle de la solution particulière se simplifier ainsi avec cette méthode par identification... Le fait est que cette méthode est loin d'être générale, mais il se trouve qu'elle va le plus souvent donner un résultat avec les équations différentielles rencontrées en physique. Dans le cas où elle ne permet pas de conclure (simplification de la dépendance temporelle impossible, ou encore obtention d'une incohérence), il faut alors se ramener à la méthode générale de résolution des équations différentielles avec second membre (variable) : la **méthode de variation de la constante**.

En pratique, la méthode d'identification fonctionne toujours pour les seconds membres constants. Un cas où elle peut être mise en défaut est celui où le second membre est de la même forme que la solution générale de l'ESSM.

Considérons par exemple l'équation différentielle sur la fonction $f(t)$ suivante :

$$\frac{df}{dt} + af = Ae^{-at}$$

avec a et A , constantes non nulles.

La solution générale de l'ESSM s'écrit λe^{-at} , et est donc de la même forme que le second membre. Si l'on applique la méthode d'identification, c'est-à-dire si l'on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme Be^{-at} (B constante), on aboutit, en reportant dans l'équation différentielle complète à :

$$-aBe^{-at} + aBe^{-at} = Ae^{-at}$$

relation impossible si $A \neq 0$.

La méthode de variation de la constante est alors nécessaire. Cette méthode consiste à rechercher la solution particulière sous la forme $B(t) \times F(t)$, où $F(t)$ est de la même forme que la solution générale de l'ESSM et $B(t)$ une fonction (la constante "qui varie"...) à déterminer.

Dans notre cas, on recherche alors la solution particulière sous la forme $B(t)e^{-at}$. En reportant dans l'équation complète on arrive à :

$$\frac{dB}{dt}e^{-at} - aB(t)e^{-at} + aB(t)e^{-at} = Ae^{-at}$$

soit $\frac{dB}{dt} = A$, d'où $B(t) = A \times t + \text{cte}$. Il est bien sûr inutile d'introduire une nouvelle constante d'intégration puisqu'on recherchait **une** solution particulière.

Gardez toutefois à l'esprit que vous ne rencontrerez que très rarement, en physique, des situations où la méthode d'identification sera mise en défaut, et qu'il est donc le plus souvent inutile de compliquer la résolution mathématique par l'utilisation de la méthode la plus générale.

Exercice 1.4 : Équation du deuxième ordre

Lors du mouvement horizontal d'un point matériel M de masse m relié à un ressort de constante de raideur k et soumis à une force de frottement fluide de coefficient f , les variations temporelles de l'abscisse $x(t)$ du point matériel sont régies par l'équation différentielle suivante :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Déterminer l'expression de $x(t)$ en supposant $x(t=0) = L$ et $\dot{x}(t=0) = 0$. On écrira les différentes solutions possibles suivant les valeurs de f , mais on ne déterminera complètement la solution que pour $f = 2\sqrt{mk}$.

• Analyse de l'énoncé

Il s'agit ici de résoudre une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, homogène et du **second ordre**. Cette dernière caractéristique nous indique que deux constantes d'intégration vont apparaître lors de la résolution. Il faut donc toujours deux conditions (initiales) pour résoudre totalement ce type de problème. Généralement l'énoncé donne de manière plus ou moins explicite des conditions initiales sur la fonction recherchée d'une part, et sur sa dérivée d'autre part. Ceci n'est cependant pas indispensable ; par exemple deux conditions particulières portant sur la fonction proprement dite (et aucune sur la dérivée) peuvent tout à fait permettre de conclure...

• Écriture du polynôme caractéristique

On admet qu'une telle équation différentielle admet une solution de la forme $x(t) = Ae^{rt}$, avec A un réel non nul et r à priori complexe. Vous pouvez alors, en reportant cette expression supposée dans l'équation différentielle initiale, en déduire qu'elle est effectivement solution, à condition que le nombre complexe r satisfasse à l'équation du deuxième degré suivante, et soit donc une racine du **polynôme caractéristique** associé à l'équation différentielle :

$$mr^2 + fr + k = 0$$

La forme des solutions de l'équation différentielle dépend alors de la nature des solutions du polynôme caractéristique, autrement dit du signe de son discriminant Δ .

• Forme des solutions possibles

- si $\Delta > 0$, le polynôme caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 . La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec A et B deux constantes d'intégration.

- si $\Delta = 0$, le polynôme caractéristique admet une racine réelle double r . La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = e^{rt}(A + Bt)$$

avec A et B deux constantes d'intégration.

- si $\Delta < 0$, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\underline{r}_1$ et $\underline{r}_2$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = Ae^{\underline{r}_1 t} + Be^{\underline{r}_2 t}$$

avec A et B deux constantes d'intégration. En physique, on ne laissera généralement pas l'expression sous cette forme. En effet, les racines conjuguées s'écrivant respectivement $\underline{r}_1 = a + jb$ et $\underline{r}_2 = a - jb$, la solution peut se réécrire :

$$x(t) = e^{at} [Ae^{jbt} + Be^{-jbt}]$$

L'utilisation de la formule d'Euler ($e^{\pm jbt} = \cos(bt) \pm j \sin(bt)$) mène finalement à une solution de la forme :

$$x(t) = e^{at} [(A + B) \cos(bt) + j(A - B) \sin(bt)]$$

On écrira donc directement en physique la solution sous la forme :

$$x(t) = e^{at} [\underline{A}' \cos(bt) + \underline{B}' \sin(bt)]$$

avec $\underline{A}' = A + B$ et $\underline{B}' = j(A - B)$ deux constantes d'intégration complexes.



Le discriminant du polynôme caractéristique de l'équation différentielle proposée s'écrit ici : $\Delta = f^2 - 4mk$.

— si $f > 2\sqrt{mk}$, $\Delta > 0$ et les racines réelles du polynôme sont $r_{1,2} = -\frac{f}{2m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2m}$. On a alors :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t} \left[A e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t} + B e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t} \right]$$

— si $f = 2\sqrt{mk}$, $\Delta = 0$ et la racine double du polynôme est $r = -\frac{f}{2m} = -\sqrt{\frac{k}{m}}$. La solution générale de l'équation différentielle est donc de la forme :

$$x(t) = e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} (A + Bt)$$

On en déduit :

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} \left[-\sqrt{\frac{k}{m}}(A + Bt) + B \right]$$

Les deux conditions initiales données mènent alors à :

$$x(t=0) = L \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} \times 0} (A + B \times 0) = L \quad \Rightarrow \quad A = L$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} \times 0} \left[-\sqrt{\frac{k}{m}}(L + B \times 0) + B \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad B = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

— si $f < 2\sqrt{mk}$, $\Delta < 0$ et les racines complexes du polynôme sont :

$$r_{\pm} = -\frac{f}{2m} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}$$

On a alors :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t} \left[\underline{A}' \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right) + \underline{B}' \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right) \right]$$

Les nombres complexes

Exercice 2.1 : Module et argument d'un nombre complexe

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{H}(jx) = \frac{a}{(1-x^2) + jb}$$

où a et b sont deux constantes réelles et x une variable de $\mathbb{R}^+$. Déterminer le module H et l'argument φ de ce nombre complexe.

• Analyse de l'énoncé

Le nombre complexe présenté est exprimé comme le rapport de deux nombres complexes (a , réel, n'est jamais qu'un cas particulier de nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle). Son module est donc égal au rapport des modules des deux nombres et son argument est égal à la différence entre les arguments du numérateur et du dénominateur.

En physique on privilégiera souvent la présentation sous **forme exponentielle** (on dit encore **trigonométrique**) $He^{j\varphi}$ par rapport à la **forme algébrique** $\text{Re}(\underline{H}) + j\text{Im}(\underline{H})$. En effet, passer un rapport de nombres complexes sous forme algébrique (en multipliant le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur) alourdit inutilement les expressions.

• Détermination du module

Pour déterminer le module de $\underline{H}$ il faut distinguer les cas a positif ou négatif. En effet, le module d'un complexe est un nombre réel et positif. Le module du numérateur de $\underline{H}$ dépend donc du signe de a .



L'expression du module ne dépend en revanche pas du signe de b .



$$H = \frac{|a|}{\sqrt{(1-x^2)^2 + b^2}} = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)^2 + b^2}} & \text{si } a \geq 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{(1-x^2)^2 + b^2}} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

• Détermination de l'argument

La détermination de l'argument présente deux subtilités.

En premier lieu, il n'est défini qu'à 2π rad près ("modulo- 2π " comme disent nos ami.e.s mathématicien.ne.s). On sait en effet que l'argument $\arg(z) = \varphi$ d'un complexe est défini par la relation :

$$z = a + jb = |z|e^{j\varphi} = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

avec a et b réels, respectivement qualifiés de partie réelle ($a = \operatorname{Re}(z)$) et partie imaginaire ($b = \operatorname{Im}(z)$), et par suite :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \varphi = \frac{a}{|z|} \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}$$

On peut donc l'interpréter comme l'angle formé par segment liant l'origine du plan complexe au point d'affixe z , avec l'axe des abscisses porteur des nombres réels (cf. schéma page suivante). À chaque fois que l'argument augmente ou diminue de 2π , le segment effectue un tour complet (dans le sens direct ou dans le sens horaire, respectivement) et l'on se retrouve au même point. Deux complexes de même module et dont les arguments diffèrent d'un nombre entier de fois 2π sont donc égaux entre eux.

En second lieu, on voit immédiatement que cet argument vérifie l'égalité :

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{b}{a}$$

On peut être tenté.e d'en déduire la relation réciproque :

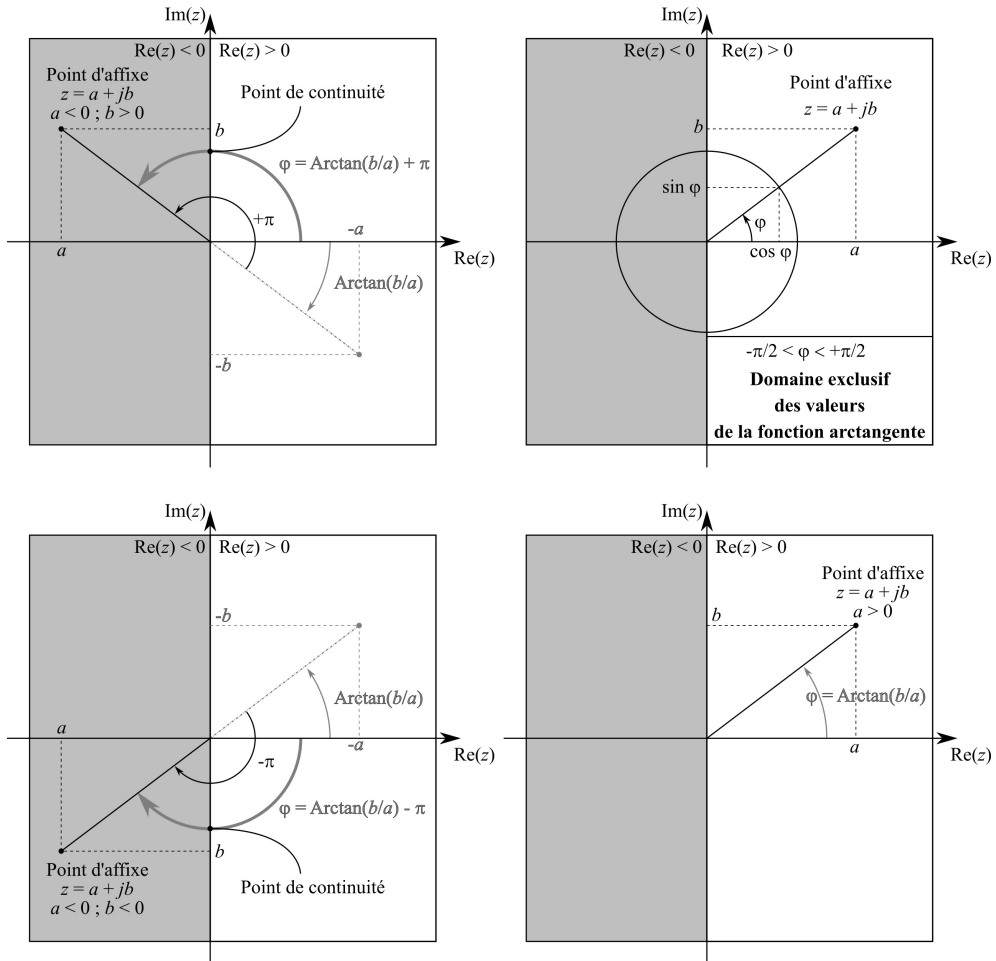
$$\varphi = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right]$$

mais ce serait aller un peu vite en besogne. En effet, la fonction arctangente associe à tout nombre réel un angle **compris dans l'intervalle** $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, dont le nombre en question est la tangente. Or ces valeurs couvrent un intervalle de π rad seulement, qui exclut donc d'office les arguments de tous les complexes situés dans la partie gauche du plan complexe, autrement dit tous les complexes à partie réelle négative.

Bon, voyons le bon côté des choses : dès lors que la partie réelle d'un complexe est positive, on peut exprimer son argument simplement comme :

$$\operatorname{Re}(z) = a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right]$$

Les choses se compliquent en revanche un peu si cette partie réelle est négative, puisque l'argument est cette fois compris dans l'intervalle $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ (cas où $b = \operatorname{Im}(z) < 0$) ou $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (cas où $b = \operatorname{Im}(z) > 0$), toujours modulo- 2π .



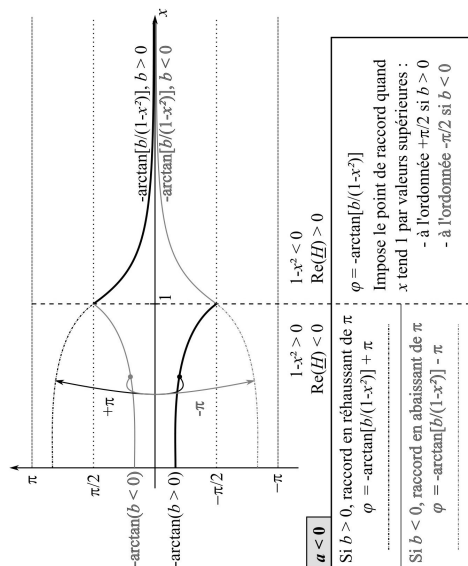
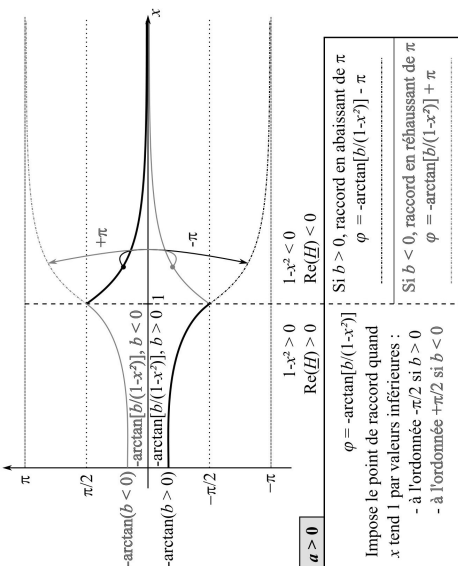
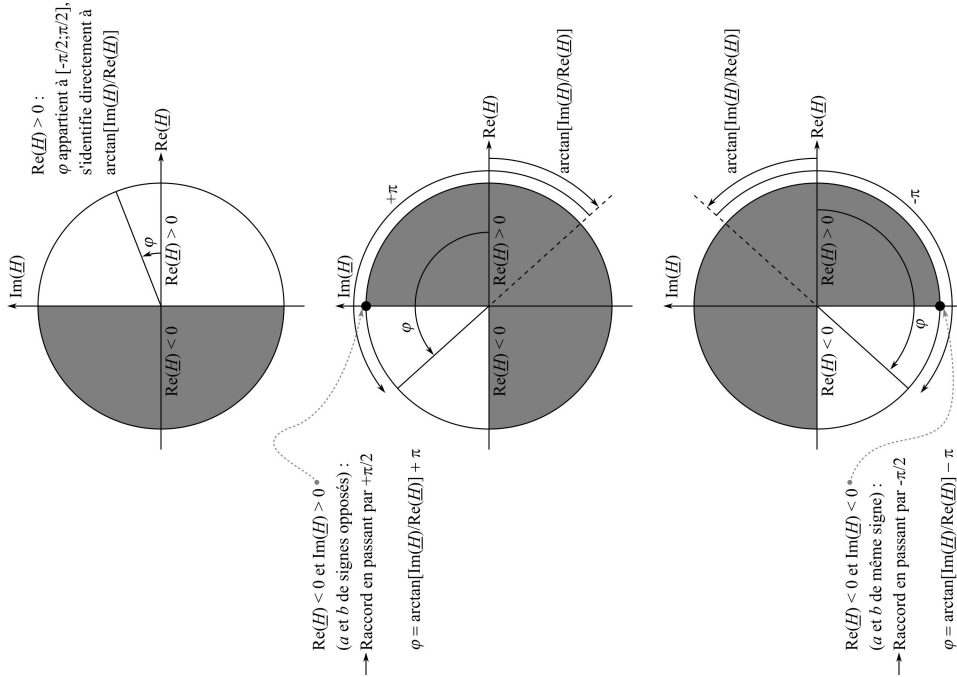
Dans ce cas, on utilise le fait que les arguments de deux points diamétralement opposés ont la même tangente : les parties réelle et imaginaire de l'un étant les opposés respectifs de celles de l'autre, leurs rapports seront égaux entre eux :

$$z' = -z \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a \\ b' = -b \end{cases} \Rightarrow \tan \varphi' = \frac{b'}{a'} = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan \varphi$$

On peut dès lors affirmer que l'argument d'un complexe à partie réelle négative se déduit de celui du complexe opposé, en lui ajoutant ou en lui retranchant π rad. Analytiquement, la chose s'interprète comme :

$$z' = -z \Leftrightarrow |z'|e^{j\varphi'} = e^{\pm j\pi}|z|e^{j\varphi} = |z|e^{j(\varphi \pm \pi)}$$

La question étant de savoir si l'on doit ajouter ou retrancher π . Mathématiquement parlant, les deux reviennent au même. Cependant lorsque l'argument est par exemple le déphasage imposé par une fonction de transfert $\underline{H}$ et que ce déphasage dépend d'une variable (mettons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$), on privilégiera l'option qui assure la continuité de la fonction $\varphi(x)$.



Ainsi :

- Dans le cas où $\operatorname{Re}(\underline{H})$ change de signe alors que $\operatorname{Im}(\underline{H}) > 0$, il est souhaitable que l'argument reprenne à $+\frac{\pi}{2}$ plutôt qu'à $-\frac{3\pi}{2}$. Dans ce cas, donc on préfère exprimer l'argument comme :

$$\operatorname{Re}(z) = a < 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = b > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right] + \pi$$

- Dans le cas où $\operatorname{Re}(\underline{H})$ change de signe alors que $\operatorname{Im}(\underline{H}) < 0$, il est souhaitable que l'argument reprenne à $-\frac{\pi}{2}$ plutôt qu'à $+\frac{3\pi}{2}$. Dans ce cas, donc on préfère exprimer l'argument comme :

$$\operatorname{Re}(z) = a < 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = b < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \left[\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right] - \pi$$



Commençons par multiplier le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur afin d'obtenir une expression sous la forme $\underline{H} = \operatorname{Re}(\underline{H}) + j\operatorname{Im}(\underline{H})$:

$$\underline{H} = \frac{a}{(1-x^2) + jb} \times \frac{(1-x^2) - jb}{(1-x^2) - jb} = \frac{1}{(1-x^2)^2 + b^2} \times [a(1-x^2) - jab]$$

Nous devons donc distinguer plusieurs cas :

- si $a(1-x^2) > 0$, autrement dit si $a > 0$ et $x < 1$, ou si $a < 0$ et $x > 1$:

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{b}{1-x^2} \right)$$

- si $a(1-x^2) < 0$, alors :

- si $-ab < 0$ (donc a et b de même signe, donc $b > 0$ et $x > 1$, ou $b < 0$ et $x < 1$) :

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{b}{1-x^2} \right) - \pi$$

- si $-ab > 0$ (donc a et b de signes opposés, donc $b > 0$ et $x < 1$, ou $b < 0$ et $x > 1$) :

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{b}{1-x^2} \right) + \pi$$

Exercice 2.2 : Utilisation de la notation complexe

On considère l'équation différentielle sur la fonction complexe $\underline{x}(t)$ suivante :

$$\frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

où m , Q , ω_0 et F_0 sont des constantes réelles positives.

Déterminer complètement une solution particulière de cette équation, cherchée sous la forme $\underline{x}(t) = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$.

- **Analyse de l'énoncé**

On demande ici de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle portant sur une fonction complexe $\underline{x}(t)$. La forme de la solution étant proposée par l'énoncé, il s'agit en fait de déterminer le **module** X_0 et l'**argument** φ de l'amplitude complexe de cette solution particulière de l'équation différentielle.

- **Dérivations en notation complexe**

L'intérêt de rechercher une solution complexe d'une équation différentielle sous la forme proposée est la simplification des opérations de dérivation (et d'intégration). Dériver revient à multiplier la fonction complexe par $j\omega$. Dériver une seconde fois revient à multiplier de nouveau par $j\omega$, d'où une double dérivation qui se traduit simplement par un facteur multiplicatif $-\omega^2$. Notons au passage qu'intégrer par rapport au temps reviendrait à une multiplication par $\frac{1}{j\omega}$.



Pour une solution écrite $\underline{x}(t) = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$, on a :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega \underline{x}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{x}$$



Si l'énoncé demande la recherche d'une solution dont la dépendance au temps est en $e^{-j\omega t}$, les opérateurs dérivation première et intégration deviennent des multiplications respectivement par $-j\omega$ et $-\frac{1}{j\omega}$; l'opérateur dérivée seconde est lui bien sûr inchangé.

• **Transformation de l'équation différentielle en équation algébrique**

En reportant la fonction $\underline{x}(t)$ et ses dérivées dans l'équation différentielle proposée, on aboutit à une équation algébrique dans laquelle le facteur $e^{j\omega t}$ intervient dans tous les termes, et l'on peut le simplifier. Par ailleurs, les opérations de dérivation faisant également apparaître l'amplitude complexe $X_0 e^{j\varphi}$ en facteur de tous les termes du membre de gauche, on obtient une équation portant sur celle-ci.



Le remplacement dans l'équation différentielle mène à :

$$-\omega^2 X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \frac{j\omega\omega_0}{Q} X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \omega_0^2 X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

Soit, après simplification par $e^{j\omega t}$, factorisation par $X_0 e^{j\varphi}$ et division :

$$X_0 e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$$

• **Identification du module et de l'argument de l'amplitude complexe**

On se trouve ainsi ramené au problème de l'exercice précédent.



Le module de l'amplitude complexe s'écrit :

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

et son argument :

$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\left[\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] & \text{si } \omega < \omega_0 \\ -\arctan\left[\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] - \pi & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

puisque $-\frac{\omega\omega_0}{Q}$, partie imaginaire du complexe conjugué du dénominateur, est forcément négative.