

HATIER
CRPE

CONCOURS
2025 et **2026**

M1 • M2

Préparez-vous
dès la première année !

Maths



ÉPREUVE ÉCRITE
D'ADMISSIBILITÉ

Roland Charnay • Michel Mante



Des cours complets



La méthodologie de l'épreuve



Des exercices et annales corrigés

À jour
DES NOUVEAUX
PROGRAMMES



28 tutos
VIDÉOS
+ sujets corrigés
EN LIGNE



HATIER CONCOURS

CONCOURS DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DISCIPLINAIRE

DIRECTEURS DE COLLECTION

Micheline Cellier

Roland Charnay

Michel Mante

AUTEURS

Roland Charnay

Michel Mante

Agrégés de Mathématiques

Avec la collaboration de **Bernard Anselmo**

Professeur certifié de Mathématiques (ESPE – Académie de Lyon)

Retrouvez des exercices corrigés du concours  hatier-clic.fr/23crpeT1maths00

www.concours-hatier.com



LES TUTOS DES FICHES MÉTHODES

CHAPITRE 1	
Écrire en base b un nombre écrit en base dix	26
CHAPITRE 4	
Chercher tous les diviseurs d'un nombre n	85
Chercher si un nombre naturel n est un nombre premier	90
Décomposer un nombre naturel n en produit de facteurs premiers	91
CHAPITRE 5	
Réduire deux fractions au même dénominateur	113
Écrire sous forme fractionnaire un nombre rationnel positif donné sous forme décimale comportant une suite périodique	131
CHAPITRE 6	
Mettre un problème en équation	176
Formules et équations	182
CHAPITRE 8	
Écrire une formule avec le cas de collage spéciaux	207
CHAPITRE 9	
Construire un diagramme circulaire	218
CHAPITRE 10	
Partager selon un ratio	250
Chercher une grandeur proportionnelle à plusieurs autres grandeurs	252
CHAPITRE 11	
Trouver la vitesse moyenne, la distance ou la durée d'un parcours	269
Appliquer, calculer un pourcentage, retrouver une quantité	272
Pourcentage et augmentation	275
Échelle	280
CHAPITRE 12	
Calculer la probabilité d'un événement	308
CHAPITRE 13	
Représenter graphiquement une fonction affine	326
CHAPITRE 14	
Calculer l'aire d'une surface	346
CHAPITRE 15	
Rédiger un programme de tracé d'une figure géométrique	381
CHAPITRE 17	
Démontrer en géométrie	425
CHAPITRE 18	
Calculer une longueur en utilisant le théorème de Pythagore	444
Démontrer qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore	446
Utiliser le théorème de Thalès pour calculer une longueur	447
Démontrer que deux droites sont parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès	449
CHAPITRE 19	
Calculer une longueur avec la trigonométrie	462
Calculer la mesure d'un angle avec la trigonométrie	464
CHAPITRE 21	
Calculer une longueur en utilisant les triangles semblables	514

SOMMAIRE

L'ÉPREUVE DU CRPE	9
INTRODUCTION	14

PARTIE 1 NOMBRES ET CALCUL

CHAPITRE 1 Les nombres entiers naturels – Les systèmes de numération	19
1. Systèmes de numération de type additif	21
2. Systèmes de numération de type positionnel	22
3. Numération de position de base quelconque	25
FM 1 > Écrire en base dix un nombre donné en base b	26
FM 2 > Écrire en base b un nombre donné en base dix	26
4. Numération orale	28
5. Désignation des nombres en lettres	29
6. Comparaison et rangement des nombres entiers naturels	30
FM 3 > Comparer des nombres entiers naturels et les ranger	30
CHAPITRE 2 Le calcul sur les nombres entiers naturels	45
1. Les quatre opérations	46
2. Propriétés des opérations	50
3. Algorithmes usuels de calcul des opérations (appelés aussi techniques opératoires)	53
FM 1 > Calculer une addition posée	53
FM 2 > Calculer une soustraction posée	54
FM 3 > Calculer une multiplication posée	56
FM 4 > Calculer une division posée	57
CHAPITRE 3 Les méthodes de dénombrement	73
1. Qu'est-ce que dénombrer ?	73
2. Comment dénombrer ?	74
FM 1 > Dénombrer à l'aide d'un tableau à double entrée	74
FM 2 > Dénombrer avec un arbre de choix	75
FM 3 > Faire preuve de méthode et d'organisation	76
CHAPITRE 4 Multiples, diviseurs, nombres premiers	83
1. Multiples et diviseurs d'un nombre naturel	84
FM 1 > Chercher tous les diviseurs d'un nombre n	85
2. Critères de divisibilité	88
3. Nombres premiers	89
FM 2 > Chercher si un nombre naturel n est premier	90
FM 3 > Décomposer un nombre naturel n en produit de facteurs premiers	91
FM 4 > Chercher tous les diviseurs d'un nombre n	92
FM 5 > Chercher le nombre de diviseurs d'un nombre n	92
4. Multiples et diviseurs communs à deux nombres	93
FM 6 > Trouver le ppcm de deux nombres	93
FM 7 > Trouver le pgcd de deux nombres	94

5. Nombres naturels premiers entre eux	95
FM 8 > Déterminer si un nombre a est un diviseur d'un nombre b	96
6. Synthèse	96
CHAPITRE 5 Les nombres rationnels et les nombres décimaux positifs	109
1. L'ensemble $\mathbb{Q}^+$ des nombres rationnels positifs	111
FM 1 > Reconnaître si deux fractions sont égales	112
FM 2 > Trouver une fraction égale à une fraction	112
FM 3 > Réduire deux fractions au même dénominateur	113
FM 4 > Obtenir la fraction irréductible égale à une fraction (simplifier une fraction)	114
FM 5 > Comparer deux fractions	115
FM 6 > Trouver la partie entière d'une fraction	118
2. L'ensemble $\mathbb{D}^+$ des nombres décimaux positifs	121
FM 7 > Reconnaître si une fraction représente un nombre décimal	123
FM 8 > Comparer des nombres décimaux et les ranger	125
3. Écritures fractionnaires et écritures décimales	129
FM 9 > Écrire sous forme décimale un nombre rationnel non décimal	130
FM 10 > Écrire sous forme fractionnaire un nombre rationnel positif donné sous forme décimale comportant une suite périodique	131
CHAPITRE 6 Nombres réels – Puissances et racines carrées	147
1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels	148
2. Calcul sur les nombres réels	153
3. Les puissances	155
4. Les racines carrées	157
5. Règles de priorité et opérations sur les nombres réels	159
CHAPITRE 7 Généralités sur le calcul littéral. Équations – inéquations	167
1. Calcul littéral	169
2. Équations	174
FM 1 > Résoudre une équation du 1 ^{er} degré à une inconnue	175
FM 2 > Résoudre une équation-produit du second degré	176
FM 3 > Mettre un problème en équation	176
FM 4 > Résoudre un système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues	179
3. Inéquations	181
4. Formules et équations	182
5. À propos de l'égalité	183
CHAPITRE 8 Initiation au tableur	203
1. Écrire une formule pour effectuer un calcul	203
2. Construire une représentation graphique	208
PARTIE 2 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS	
CHAPITRE 9 Représentation de données et statistiques	213
1. Représentation de données numériques	214
FM 1 > Construire un diagramme circulaire	218
2. Statistiques	220
FM 2 > Calculer la médiane d'une série statistique	224
CHAPITRE 10 Proportionnalité	235
1. Suites de nombres proportionnelles	236
FM 1 > Reconnaître si deux suites de nombres sont proportionnelles	242

2. Problèmes de proportionnalité	244
FM 2 > Chercher une « quatrième proportionnelle »	244
FM 3 > Comparer des proportions	247
FM 4 > Partager selon un ratio	250
FM 5 > Chercher une valeur d'une grandeur proportionnelle à plusieurs autres grandeurs	252
FM 6 > Chercher une valeur d'une grandeur inversement proportionnelle à une autre grandeur	254
CHAPITRE 11 Applications de la proportionnalité	267
1. Vitesse moyenne	268
FM 1 > Trouver la vitesse moyenne, la distance ou la durée d'un parcours	269
2. Pourcentage	271
FM 2 > Appliquer un pourcentage	272
FM 3 > Calculer un pourcentage	273
FM 4 > Retrouver une quantité à laquelle a été appliqué un pourcentage	273
FM 5 > Calculer le résultat d'une augmentation ou diminution donnée en pourcentage	275
FM 6 > Calculer un pourcentage d'augmentation ou de diminution	276
FM 7 > Calculer la valeur avant une augmentation ou une diminution en pourcentage	277
3. Échelle	279
FM 8 > Trouver une distance dans la réalité	280
FM 9 > Trouver une distance sur une carte	280
FM 10 > Trouver une échelle	281
CHAPITRE 12 Probabilités	301
1. Expérience aléatoire et évènement	302
2. Probabilité	302
3. Évènements particuliers	306
FM > Calculer la probabilité d'un évènement	308
CHAPITRE 13 Notion de fonction numérique. Fonction linéaire et fonction affine	319
1. Notion de fonction numérique	320
2. Fonction linéaire	322
FM 1 > Représenter graphiquement une fonction linéaire	324
3. Fonction affine	325
FM 2 > Représenter graphiquement une fonction affine	326
FM 3 > Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant deux points de sa représentation graphique	327
FM 4 > Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant sa représentation graphique	328

PARTIE 3 GRANDEURS ET MESURES

CHAPITRE 14 Grandeurs et mesures	339
1. Périmètre de surfaces	341
2. Aire	343
FM 1 > Convertir des unités d'aires	344
FM 2 > Calculer l'aire d'une surface	346
3. Volume	350
FM 3 > Convertir des unités de volumes	351
4. Autres grandeurs	354

CHAPITRE 15 Droite, segment, cercle, perpendicularité, parallélisme	375
1. Droite, demi-droite, segment	376
2. Cercle, disque	377
3. Droites perpendiculaires	377
FM 1 > Tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné	378
4. Droites parallèles	379
FM 2 > Tracer une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné	379
5. Construire, décrire une construction géométrique	380
FM 3 > Rédiger un programme de tracé d'une figure géométrique	381
6. Tangente à un cercle	382
7. Médiatrice d'un segment	383
FM 4 > Tracer la médiatrice d'un segment	384
8. Cercle circonscrit à un triangle	385
CHAPITRE 16 Angles, polygones	393
1. Angles	394
FM 1 > Tracer la bissectrice d'un angle	395
2. Polygones	398
FM 2 > Tracer un polygone régulier sans rapporteur	399
3. Triangles	400
FM 3 > Calculer la mesure d'un angle	401
4. Quadrilatères	405
5. Logiciels de géométrie dynamique	408
CHAPITRE 17 Démonstration en géométrie plane	423
1. Une méthode de preuve spécifique : la démonstration	424
FM 1 > Le chainage avant	425
FM 2 > Le chainage arrière	425
2. Propriété et réciproque	427
3. Principales propriétés pour quatre démonstrations les plus fréquemment demandées au concours	428
FM 3 > Démontrer que deux droites sont perpendiculaires ou qu'un triangle est rectangle	429
FM 4 > Démontrer que deux droites sont parallèles	430
FM 5 > Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment	431
FM 6 > Démontrer que trois points sont alignés	433
CHAPITRE 18 Théorèmes de Pythagore et de Thalès	443
1. Théorème de Pythagore	444
2. Théorème de Thalès	446
FM 1 > Calculer la longueur d'un segment	449
CHAPITRE 19 Trigonométrie dans le triangle rectangle	459
1. Formules de trigonométrie	460
2. Calcul d'une longueur	462
FM 1 > Calculer une longueur avec la trigonométrie	462
3. Calcul de la mesure d'un angle dans un triangle rectangle	464
FM 2 > Calculer la mesure d'un angle avec la trigonométrie	464
CHAPITRE 20 Transformations	475
1. Symétrie axiale (ou symétrie orthogonale par rapport à une droite)	477
FM 1 > Tracer le symétrique d'un point par rapport à une droite	478

FM 2 > Chercher le(s) axe(s) de symétrie d'une figure	481
2. Symétrie centrale (ou symétrie par rapport à un point)	482
FM 3 > Tracer le symétrique d'un point par rapport à un point	482
FM 4 > Chercher le centre de symétrie d'une figure	484
3. Translation	486
4. Rotation	486
FM 5 > Tracer l'image d'un point par une rotation	487
5. Agrandissement et réduction d'une figure	488
FM 6 > Construire l'agrandissement ou la réduction d'une figure	489
FM 7 > Tracer l'image d'un point par une homothétie	491
6. Homothétie de rapport positif	491
CHAPITRE 21 Triangles isométriques, triangles semblables	509
1. Triangles isométriques	510
2. Triangles semblables	512
CHAPITRE 22 Géométrie dans l'espace	523
1. Solides	525
2. Représentation d'un solide	528
3. Patrons de solides	530
4. Orthogonalité et parallélisme dans l'espace	533
5. Section d'un solide par un plan	536
6. Repères	537
PARTIE 5 ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION	
CHAPITRE 23 Algorithmique et programmation	553
1. Présentation du logiciel Scratch	553
2. Programmer avec Scratch	554
3. Dessiner avec Scratch	559

MODE D'EMPLOI

Objectifs

- Identifier et utiliser les caractéristiques d'un système de numération et, en particulier, celles du système de numération décimale (écriture des nombres naturels en base dix).
- Passer de l'écriture d'un nombre naturel dans un système à son écriture dans un autre système.
- Comparer deux nombres écrits en chiffres ou en lettres.

FICHES MÉTHODE

1. Écrire en base dix un nombre donné en base b 26
2. Écrire en base b un nombre donné en base dix 26
3. Comparer des nombres entiers naturels et les ranger 30

Tester ses connaissances

Indiquer la ou les bonnes réponses en les justifiant.

- QCM 1** Dans le nombre 2 305,
- A. le nombre de dizaines est 0.
 - B. le nombre de dizaines est 230.
 - C. le nombre de milliers est 2.
 - D. le chiffre des milliers est 2.
- QCM 2** Je suis un nombre naturel. Mon nombre de centaines est 23 et mon chiffre des unités est 5. Qui suis-je ?
- A. 235
 - B. 7 235
 - C. 2 305
 - D. 23 005
 - E. 72 305
- QCM 3** Combien de mots sont nécessaires pour exprimer oralement tous les nombres de 0 jusqu'à 100 (0 et 100 compris) ?
- A. 22
 - B. 17
 - C. 24
 - D. 20
 - E. 26
- QCM 4** Combien y a-t-il de « 0 » dans l'écriture chiffrée du nombre « mille-milliards-vingt-millions-sept-cents » ?
- A. 7
 - B. 8
 - C. 9
 - D. 10
 - E. 13
- QCM 5** Le nombre X a 6 pour chiffre des milliers, le nombre Y est quatre-mille-quatre-vingt-dix, le nombre Z comporte 47 centaines. Quel est le rangement correct ?
- A. $X < Y < Z$
 - B. $Y < Z < X$
 - C. $Z < Y < X$
 - D. $Y < X < Z$

Au début de chaque chapitre : les **objectifs** à atteindre par les candidats.

La liste des **fiches méthodes** du chapitre pour les savoir-faire à maîtriser.

Un **test** pour faire le point sur ses acquis, ses difficultés, ses manques par rapport au sujet abordé. Sous forme de **QCM** pour s'entraîner à répondre à ce type de question.

L'**aide** indique l'endroit où les connaissances testées sont traitées dans le cours.

Les **réponses** au QCM.

La partie « **Le cours** » (sur fond bleu).

Des **exemples** aident à l'appropriation de ces notions importantes.

Au fur et à mesure du cours, le **corrigé** détaillé des QCM.

Les **notions importantes** qu'il faut retenir (sur fond jaune).

De nombreux **exercices d'entraînement** permettent au candidat de stabiliser la compréhension des notions abordées. La page de leur **corrigé** figure en marge.

Les **fiches méthode** présentent les principaux savoir-faire à maîtriser sous forme d'un tableau : la **colonne de gauche** : chaque étape du savoir-faire est détaillée ; la **colonne de droite** : chacune de ces étapes est exemplifiée.

LE COURS **AU CONCOURS**

Exemples : Dans l'écriture de 213, 425, 672 ou 2 987, le chiffre « 2 » n'a pas la même valeur :

- le « 2 » de 213 vaut 2 centaines
- le « 2 » de 425 vaut 2 dizaines
- le « 2 » de 672 vaut 2 unités
- le « 2 » de 2 987 vaut 2 milliers.

B. La méthode de groupements est régulière.
Tout groupement contient toujours le même nombre d'éléments et peut être échangé contre l'unité supérieure.
La valeur de cet échange s'appelle la **base** : en base dix, on peut échanger une dizaine contre dix unités, une centaine contre dix dizaines, etc.

C. Le nombre de signes différents qui permet l'écriture des nombres est égal à la base.
Ainsi, chaque rang n'est occupé que par un seul signe et non par une composition de signes.

Exemples :

- en base dix, nous disposons ainsi de dix chiffres : 0, 1, 2, ..., 9
- en base deux, deux chiffres suffisent : 0 et 1
- en base vingt, il faudrait vingt signes différents, etc.

D. Un des signes a pour fonction de signaler l'absence de groupement à un certain rang : c'est le zéro.

Exemple : Dans 102, le « 0 » indique qu'il n'y a pas de dizaine restante après le groupement des dizaines en centaines. Il n'y a pas « zéro dizaine », affirme le croquet beaucoup d'élèves, mais dix dizaines qui ont été groupées pour faire une centaine. Le chiffre des dizaines de 102 est bien « 0 », mais le nombre de dizaines est « dix ».

Corrigé QCM 2 : 2 305 est le seul nombre de la liste qui comporte 23 centaines et a 5 pour chiffre des dizaines. D'autres nombres que ceux de la liste auraient pu convenir comme 2 315 ; 2 325...

2. Décompositions associées à l'écriture d'un nombre

A. Décompositions dans le système décimal

À chaque écriture en chiffres peut être associée une décomposition qui utilise des puissances de 10.

Entraînement 11

Un nombre contient 2 453 dizaines de milliers. Son écriture comporte deux fois le chiffre « 0 ». Son chiffre des dizaines est 3 et son chiffre des centaines est le double de son chiffre des milliers.

- a. Quel est le nombre de millions de ce nombre ?
- b. Quel est son nombre de milliers ?
- c. Comment ce nombre se lit-il ?

Comparaison et rangement des nombres entiers naturels

L'écriture des nombres en chiffres facilite leur comparaison.

FICHE MÉTHODE 3 Comparer des nombres entiers naturels et les ranger.

→ Comparer et ranger les nombres suivants :

27 506 9 634 9 098 27 605 102 020

1. Trouver le rang de plus grande valeur pour l'ensemble des nombres.
Comparer les chiffres pour ce rang (en l'absence de chiffre pour l'un des nombres, considérer que le chiffre est 0).
Le plus grand nombre est celui qui a le chiffre de plus grande valeur pour le rang considéré.
Pour les nombres qui comportent des chiffres identiques au rang considéré, passer à l'étape 2.

Pour faciliter la tâche, imaginer que les nombres sont écrits les uns sous les autres, en alignant les chiffres de même rang dans la même colonne :

27 506	102 020
9 634	
9 098	
27 605	
102 020	

102 020 est le seul à comporter un chiffre autre que 0 au rang des centaines de milliers : c'est donc le plus grand de la série.

2. Faire le même travail au rang immédiatement inférieur.
- 27 506 et 27 605 comportent tous deux un chiffre autre que 0 au rang des dizaines de milliers. Ils sont donc supérieurs à 9 634 et à 9 098.

C'est l'émergence des numérations de position qui est à l'origine de l'invention du zéro.

QCM 2, p. 19

Consigne p. 34

Corrigés

Entraînement 1
 = 1 810

Entraînement 2
 360 =  3 019 = 

Entraînement 3
 a. 360 = CCCLX et 3 019 = MMMXIX ou MMMXVIII.
 b. CMVI = 906.

Entraînement 4
 2 030 ; 2 031 ; 2 032 ; 2 033 ; 2 034 ; 2 035 ; 2 036 ; 2 037 ; 2 038 ; 2 039.

Entraînement 5
1. Expression du nombre de points en base cinq
 Plusieurs méthodes sont possibles pour exprimer le nombre de points en base cinq.

MÉTHODE 1 : En faisant des groupements effectifs
 • On commence par grouper les éléments par cinq :



Il reste quatre éléments qui n'ont pas pu être groupés et qui donnent le chiffre des unités : 4.

• On groupe de nouveau les paquets de cinq par cinq :



On obtient deux « grands paquets » du deuxième ordre, qui correspondent chacun à 25 unités. Il reste trois paquets de cinq qui n'ont pas été groupés ; ce sont trois « cinquaines » (mot qui n'existe pas mais qui permet de mieux comprendre l'analogie avec notre système à base dix).

32

Chaque **exercice d'entraînement** est corrigé de façon détaillée à la fin du cours.

Si nécessaire, plusieurs **méthodes** sont présentées.

LE COURS **AU CONCOURS**

AU CONCOURS Les nombres entiers naturels – Les systèmes de numération

Exercice 1
 Existe-t-il une base a de numération de position dans laquelle : $\overline{82}^a = 3 \times \overline{28}^a$?

Exercice 2
 Existe-t-il une base b de numération de position dans laquelle : $\overline{23}^b + \overline{53}^b = \overline{80}^b$?

Exercice 3
 On a utilisé 6 869 caractères d'imprimerie (chiffres) pour numérotter les pages d'un dictionnaire. Combien de pages ce dictionnaire contient-il ?
 Toutes les pages sont numérotées une fois et une seule, la première portant le n° 1 ; cette numérotation se fait en base dix.

Exercice 4
 a. Écrire en base douze le nombre qui s'écrit 144 en base dix.
 b. Écrire en base dix le nombre qui s'écrit 1000 en base douze.
 c. On désigne par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a , b , les douze chiffres utilisés en base douze. Écrire en base dix :
 – les trois nombres qui s'écrivent respectivement a , b , $\overline{ab}$ en base douze ;
 – le produit de a par b .

Corrigé p. 37
Corrigé p. 37
Corrigé p. 37
Corrigé p. 37

La partie « **Au concours** » (en rouge).
 À la fin de chaque chapitre, des énoncés d'exercices de concours sont proposés.

Corrigés

Exercice 1
 Cherchons d'abord combien de nombres s'écrivent avec 4 chiffres : il y en a 9 000.
 En effet, de 1 à 9 999, il y a 9 999 nombres parmi lesquels 999 s'écrivent avec moins de 4 chiffres (ceux de 1 à 999).
 Puis, parmi les nombres de 4 chiffres, cherchons combien s'écrivent sans utiliser le chiffre 0.
 Pour répondre à cette question, on peut imaginer un arbre de choix.



Pour chaque ordre d'unités (milliers, centaines, dizaines, unités), il y a 9 possibilités (chiffres de 1 à 9) indépendantes les uns des autres. Le nombre total de nombres qui s'écrivent avec 4 chiffres, sans 0, est donné par le calcul : $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 = 6\,561$.
 Comme $9\,000 - 6\,561 = 2\,439$, il y a 2 439 nombres de 4 chiffres qui s'écrivent avec le chiffre 0.

Exercice 1
 Dans ce type de problème, il faut se demander s'il n'est pas plus simple de répondre à la question « contraire », à savoir ici, chercher combien de nombres de 4 chiffres s'écrivent sans utiliser le chiffre 0.

Les **exercices** de concours sont corrigés à la suite des énoncés.

De nombreux **commentaires** ou **conseils** méthodologiques accompagnent ces corrigés. Certains commentaires attirent l'attention du lecteur sur des erreurs à éviter.

L'ÉPREUVE DU CRPE

Dans cet ouvrage, nous traitons l'ensemble des notions mathématiques enseignées aux cycles 3 et 4. Mais nous avons aussi choisi de présenter quelques notions supplémentaires. Deux raisons justifient ce choix :

- Ces notions ont un lien avec des connaissances enseignées à l'école primaire. C'est par exemple le cas de la numération, du PGCD et PPCM.
- Ces notions peuvent faciliter la résolution de certaines démonstrations ou calculs. C'est le cas des propriétés du triangle rectangle et de son cercle circonscrit, des systèmes d'équations, des calculs avec les racines carrées. Il va de soi qu'un correcteur ne peut en aucun cas sanctionner un candidat qui utilise une propriété ou une notion qui n'est pas au programme du cycle 4

1. Le concours de recrutement des professeurs des écoles

Les épreuves du concours de recrutement de professeurs des écoles (CRPE) ont été définies dans l'arrêté du 25 janvier 2021 fixant les modalités d'organisation de ce concours à compter de la session 2022. Nous reproduisons ci-dessous la partie de l'arrêté qui concerne les épreuves de mathématiques.

1.1. Épreuves d'admissibilité

Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège.

L'épreuve écrite de mathématique (3 h, coefficient 1) est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat. L'épreuve est notée sur 20. Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire.

1.2. Épreuves d'admission

L'épreuve de leçon (1 h, coefficient 4) porte successivement sur le français et les mathématiques. Elle a pour objet la conception et l'animation d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune de ces matières, permettant d'apprécier la maîtrise disciplinaire et la maîtrise des compétences pédagogiques du candidat. Le jury soumet au candidat deux sujets de leçon, l'un dans l'un des domaines de l'enseignement du français, l'autre dans celui des mathématiques, chacun explicitement situé dans l'année scolaire et dans le cursus de l'élève.

Afin de construire le déroulé de ces séances d'enseignement, le candidat dispose en appui de chaque sujet d'un dossier fourni par le jury et comportant au plus quatre documents de nature variée : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes...

Le candidat présente successivement au jury les composantes pédagogiques et didactiques de chaque leçon et de son déroulement. Chaque exposé est suivi d'un entretien avec le jury lui permettant de faire préciser ou d'approfondir les points qu'il juge utiles, tant sur les connaissances disciplinaires que didactiques.

Durée de préparation : deux heures ; **durée de l'épreuve** : une heure (français : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette première partie ; mathématiques : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette seconde partie).

L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire.

2. Conseils pour préparer l'épreuve de mathématiques

Comme l'indique le texte officiel, les connaissances mathématiques à acquérir sont de niveau collège. Il faut y ajouter notamment des connaissances sur les systèmes de numération dont l'apprentissage occupe une place importante à l'école primaire.

2.1. Organisation de l'ouvrage

Cet ouvrage comporte 23 chapitres répartis sur 5 thèmes : **Nombres et calcul**, **Organisation et gestion de données, fonctions**, **Grandeurs et mesures**, **Espace et géométrie** et **Algorithmique et programmation**.

Chaque chapitre est organisé de la façon suivante :

Tester ses connaissances

Les questions proposées sous forme de **QCM** permettent au candidat de situer ses acquis, ses difficultés et ses manques sur le sujet considéré. Les réponses sont données à la fin de la partie et sont corrigées de façon détaillée dans le cours.

LE COURS

Détaillé, il est émaillé d'exercices d'entraînement dont les corrigés sont fournis à la fin du cours. Cela permet au candidat de tester immédiatement sa compréhension des notions abordées. Les principaux savoir-faire à maîtriser sont présentés sous forme de fiches méthode. Les étapes de ces savoir-faire sont clairement explicitées et exemplifiées.

AU CONCOURS

Les exercices du type de ceux donnés au concours sont accompagnés d'un corrigé détaillé et commenté. Des conseils méthodologiques sont fournis pour les questions classiques.

2.2. Comment utiliser cet ouvrage

Nous vous conseillons vivement de commencer l'étude d'un chapitre en répondant aux questions posées dans **Tester ses connaissances**. Même si, en général, les réponses peuvent être données rapidement, prenez un temps suffisant pour affronter ces questions et ne vous laissez pas tenter par la lecture du corrigé dès le premier blocage ! Même si vous n'arrivez pas à répondre aux questions proposées, le fait d'avoir cherché vous permettra de mieux assimiler le corrigé donné dans le Cours.

Prenez connaissance du **Cours** le crayon à la main et n'hésitez pas à revenir en arrière si nécessaire. Assurez-vous d'avoir bien compris ce qui est énoncé. N'oubliez pas que la compréhension est un facteur essentiel de la mémorisation et de l'utilisation des connaissances. Les exercices d'entraînement placés au fil du cours vous permettront de stabiliser vos connaissances.

La partie **Au concours** permettra un transfert de vos connaissances dans des situations plus complexes. Les nombreux conseils méthodologiques placés tout au long des corrigés vous aideront répondre aux questions.

3. Conseils pour le jour de l'épreuve

3.1. Bien gérer son temps

Il est essentiel de gérer convenablement son temps. Chaque année, après l'épreuve, des candidats se désolent de ne pas avoir eu assez de temps pour traiter des questions qu'ils savaient parfaitement résoudre parce qu'ils avaient consacré trop de temps à sécher sur certaines autres.

Pour éviter cette situation, généralement catastrophique, voici **quatre conseils** :

- **Toujours commencer par lire l'intégralité du sujet** de façon à identifier les questions auxquelles vous pensez pouvoir répondre. Ce sont les questions par lesquelles vous allez commencer.
- **Ne pas hésiter à sauter certaines questions** que vous n'arrivez pas à traiter immédiatement. Dans ce cas, vous laisserez de la place pour y revenir éventuellement plus tard. Par contre, ne disséminez pas les réponses aux différentes questions d'un même exercice au milieu d'autres exercices, elles risquent de ne jamais être corrigées. En effet, sachez que les correcteurs ne mettent aucune annotation ou appréciation sur la copie.
- **Ne pas tout écrire au brouillon**, mais mener en parallèle le travail au brouillon et la rédaction dès qu'une solution émerge de façon sure.
- **Gérer son temps** en tenant compte du nombre de points accordés à chaque question.

3.2. Conseils concernant les questions mathématiques

- **Avant de commencer à résoudre un exercice ou un problème de mathématiques, le relire à nouveau dans son intégralité.** C'est important car l'enchaînement des questions peut vous aider à découvrir certaines solutions. Ne pas oublier non plus que, très souvent, les réponses aux questions précédentes servent à répondre aux questions suivantes et qu'il est possible de s'en servir même si vous n'avez pas su les traiter.
- **Il est essentiel de systématiquement justifier les réponses.** Ce sont souvent sur des critères de rigueur de rédaction que se font les différences entre les candidats. Ne pas oublier que plus une réponse est simple, plus les correcteurs sont exigeants sur les critères de rédaction.
- **Rédiger avec précision, notamment être attentif aux notations mathématiques.**

Voici quelques exemples d'erreurs d'écriture fréquemment rencontrées dans les copies :

Ne pas écrire...	mais écrire...	car...
$[AB] = [CD]$	$AB = CD$	AB et CD désignent les longueurs des segments, alors que $[AB]$ et $[CD]$ désignent les segments eux-mêmes.
I est le milieu de (AB)	I est le milieu de $[AB]$	(AB) désigne une droite... qui n'a donc pas de milieu.
(d) est la médiatrice de (CD)	(d) est la médiatrice de $[CD]$	On ne peut pas parler de médiatrice d'une droite, mais seulement de médiatrice d'un segment

De même, dans une rédaction, il vaut mieux éviter de mélanger le texte et les notations abrégées.

Ainsi « $\{AB\}$ est // à $\{CD\}$ » est à éviter et il faut lui préférer :

- soit « $\{AB\}$ est parallèle à $\{CD\}$ » ;
- soit « $\{AB\} // \{CD\}$ ».

3.3. Comment répondre à un QCM ?

Deux stratégies peuvent être mobilisées pour répondre à un QCM :

- **1^{re} stratégie** : faire l'exercice, sans tenir compte des réponses proposées, puis identifier la « bonne » réponse parmi celles-ci ;
- **2^e stratégie** : partir des réponses proposées et éliminer celles qui ne conviennent pas.

Exemples :

L'égalité : $\overline{32} + \overline{14} = \overline{50}$ est vraie pour la base : **A.** 5 **B.** 4 **C.** 7 **E.** 6

• **1^{re} stratégie** : On appelle x la base possible (donc $x > 5$) et on traduit l'égalité à l'aide de x :

$$3x + 2 + x + 4 = 5x + 0 \quad \text{et} \quad \text{on trouve } x = 6.$$

• **2^e stratégie** : On part des réponses : 5 et 4 ne peuvent pas être des bases car la base est toujours strictement supérieure à chacun des chiffres.

On essaie de voir si 7 convient : En base 7 :
$$\begin{array}{l} \overline{32} + \overline{14} = 3 \times 7 + 2 + 1 \times 7 + 4 = 34 \\ \overline{50} = 5 \times 7 = 35. \end{array}$$

Donc 7 ne convient pas, **la bonne réponse est 6.**

Ce qu'il faut vérifier par :
$$\begin{array}{l} \overline{32} + \overline{14} = 3 \times 6 + 2 + 1 \times 6 + 4 = 30 \\ \overline{50} = 5 \times 6 = 30. \end{array}$$

INTRODUCTION

Le programme de mathématiques du cycle 4 est structuré selon cinq thèmes :

- nombres et calcul
- organisation et gestion de données, fonctions
- grandeurs et mesures
- espace et géométrie
- algorithmique et programmation

Nous avons choisi de reprendre cette structuration pour l'organisation des chapitres de cet ouvrage. Les textes qui suivent présentent chacun de ces thèmes en cherchant à caractériser les concepts abordés, à leur donner du sens, parfois en faisant référence à des repères historiques. Chaque texte se termine par une rapide présentation des contenus traités dans les différents chapitres relatifs au thème.

Nombres et calculs (chapitres 1 à 8)

Les premiers nombres utilisés au cours de l'histoire humaine ont été **les nombres naturels**. Ils ont été d'abord utilisés pour exprimer des quantités (nombre de bêtes dans un troupeau, par exemple), puis des grandeurs (comme des mesures de longueurs ou de masses, une longueur ou une masse étant choisie comme unité), ainsi que pour repérer un élément dans une liste rangée (4^e jour après la pleine lune, par exemple).

Toute grandeur d'un objet (sa longueur, par exemple) ne s'obtient pas toujours en reportant un nombre entier de fois l'unité choisie. Ce constat a conduit à deux évolutions : l'une consiste à utiliser plusieurs unités (comme dans les expressions *3 pieds 6 pouces*, *4 m 25 cm* ou *2 h 34 min 20 s*), l'autre à fractionner l'unité choisie, par exemple en 2, puis en 4, puis en 8... pour obtenir des expressions comme *2 unités + 1/2 unité + 3/8 unité*. Cette dernière évolution, déjà utilisée dans l'Égypte ancienne, a conduit à l'émergence des **nombres rationnels positifs** (exprimables par des fractions de nombres entiers).

Les mathématiciens de l'Antiquité ont ensuite mis en évidence que les nombres rationnels ne suffisent pas, en théorie, à exprimer toute mesure, notamment celle de la diagonale du carré de côté 1, ce qui a conduit à la notion de **nombre irrationnel**, puis de **nombre réel**. La volonté de rendre la soustraction possible et de pouvoir graduer une droite de part et d'autre du repère 0 a amené à l'idée de **nombre relatif (positif ou négatif)** pour toutes les catégories de nombres évoquées.

L'intérêt des nombres réside également dans la possibilité qu'ils offrent d'anticiper des résultats sur des expériences avant même qu'elles ne soient réalisées, par exemple de pouvoir connaître le périmètre ou l'aire d'un champ rectangulaire en mesurant uniquement sa longueur et sa largeur. C'est ce que permet le **calcul** sur les différents types de nombres : addition, soustraction, multiplication, division. **Des procédures de calcul, mental ou écrit**, ont été élaborées au cours des temps, rendues possibles en exploitant **les propriétés des différentes opérations**.

La difficulté à résoudre certains problèmes en utilisant des méthodes purement arithmétiques (calcul avec les nombres) a conduit à envisager de calculer sur des nombres « inconnus ». C'est l'objet du **calcul littéral** et des notions d'**équation** et d'**inéquation**. Ce calcul sur des nombres « inconnus » représentés

par des lettres permet également **d'établir des formules** (aire du triangle, relation entre distance, durée et vitesse, etc.) ou encore de **prouver la validité de conjectures portant sur les nombres** (par exemple, si la somme des chiffres d'un nombre est un multiple de 9, le nombre est lui-même un multiple de 9).

Dans cette partie, sont développées les connaissances et les compétences relatives :

- aux différents types de nombres : nombres entiers naturels et nombres entiers relatifs, nombres rationnels (nombres décimaux en particulier) et nombres réels ;
- aux systèmes de numération permettant d'exprimer les nombres à l'aide de chiffres ou de mots ;
- aux calculs portant sur ces nombres : propriétés des opérations et procédures de calcul ;
- à des éléments d'arithmétique élémentaire : notions de multiple, de diviseur, de nombre premier... ;
- au calcul littéral et à la résolution d'équations ou d'inéquations ;
- à l'usage d'un tableur.

Organisation et gestion de données, fonctions (chapitres 9 à 13)

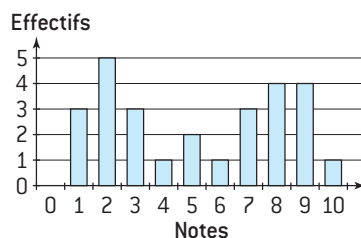
Décrire des phénomènes, y repérer des paramètres et formuler les lois qui régissent leurs variations simultanées, **anticiper** leur évolution est inhérent à la pratique et à l'utilisation des mathématiques. Les mathématiciens ont créé de nombreux outils pour modéliser ces phénomènes. La proportionnalité et les fonctions, étudiées dans les chapitres 10 et 13, en sont des exemples. La proportionnalité permet, par exemple, de prévoir l'allongement d'un ressort en fonction de la masse qui lui est suspendue.

Une approche de certains phénomènes conduit à recueillir une masse de données numériques et à les organiser pour tenter de « les faire parler ». En effet, des données numériques brutes sont souvent difficiles à interpréter. Prenons un exemple avec les notes sur 10 obtenues par les élèves d'une classe à un devoir de maths (ce n'est qu'un exemple !) :

7 ; 2 ; 2 ; 6 ; 8 ; 2 ; 1 ; 2 ; 1 ; 9 ; 8 ; 7 ; 2 ; 1 ; 7 ; 8 ; 10 ; 3 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9 ; 3 ; 4 ; 9 ; 10 ; 5 ; 2 ; 9 ; 7.

Présentées ainsi, ces données sont très peu « parlantes » : on voit seulement qu'il y a de bonnes notes, pas mal de notes faibles et des notes moyennes... Si on rassemble ces notes dans un tableau à double entrée ou qu'on les présente à l'aide d'un graphique, on commence à avoir une vision plus précise de la distribution des notes.

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	0	3	5	3	1	2	1	3	4	4	1



On constate, grâce à ces présentations, qu'il y a un lot de notes faibles, un lot de notes fortes et peu de notes moyennes. Il y a donc une forte hétérogénéité des élèves dans cette classe au niveau des résultats en mathématiques (au moins sur ce devoir !)

On peut aller plus loin dans l'analyse grâce à ce qu'on appelle les indicateurs statistiques (cf. chap. 9).

Ainsi, la **statistique** est « la discipline qui étudie des phénomènes à travers la collecte de données, leur traitement, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre ces données compréhensibles par tous » (d'après Wikipédia).

Depuis la plus haute antiquité, les humains ont cherché à collecter des données (nombres de bêtes, quantités de récolte, nombre de personnes d'une population, etc.), mais c'est seulement au début du XVII^e siècle que ces données servent d'appui pour des prévisions avec, entre autres, les tables de mortalité. Ces premières études statistiques commencent à entrer dans le champ des mathématiques en lien avec les premiers travaux de probabilité de Fermat ($\approx 1602-1665$), Pascal (1623-1662) et Bayes (1702-1761).

Les **probabilités** constituent la partie des mathématiques qui s'intéresse à ce qu'on appelle des expériences aléatoires, c'est-à-dire à des expériences pour lesquelles on connaît l'ensemble des résultats possibles, sans pour autant savoir quel sera le résultat obtenu quand on mène une expérience particulière. Certes, on ne connaît pas chaque résultat mais, pour certains d'entre eux, on peut mesurer « la chance » de l'obtenir. C'est l'enjeu du calcul des probabilités. Ce sont les jeux de hasard qui ont permis, au milieu du XVII^e siècle, le développement de cette branche des mathématiques.

Dans cette partie vous trouverez :

- des outils de présentation des données statistiques (diagramme et courbe) et un certain nombre de paramètres pour analyser ces données (chapitre 9) ;
- les notions de base des probabilités (chapitre 12) ;
- les connaissances essentielles sur la proportionnalité (chapitres 10 et 11) et sur les fonctions (chapitre 13).

Grandeurs et mesures (chapitre 14)

Pour agir dans leur environnement ou pour pratiquer des échanges, les humains ont été amenés à considérer certains caractères des objets qui permettent de les comparer : tel objet est plus long ou plus lourd que tel autre, telle surface est plus étendue que telle autre, tel récipient peut contenir plus d'eau que tel autre, tel athlète est plus rapide que tel autre, etc. Ils ont ainsi défini des **grandeurs** : la longueur, la masse, l'aire, la contenance, la vitesse, etc.

La pratique de la comparaison d'objets ou de phénomènes d'un certain point de vue est donc à la base du concept de grandeur. Mais cette pratique de comparaison ne suffit pas, par exemple lorsqu'il s'agit des longueurs de deux objets éloignés l'un de l'autre.

L'idée de quantifier les grandeurs, c'est-à-dire de leur attribuer une valeur numérique, est donc apparue très tôt, contribuant au développement des différents nombres. Pour cela, il faut choisir une unité et la reporter pour obtenir un objet de même grandeur. En dénombrant les reports de l'unité, on obtient **un nombre qui est la mesure** de cette grandeur.

Cette mesure dépend de l'unité choisie. Par exemple, avec le centimètre pour unité, la mesure de tel segment s'exprime par le nombre 215 (on dit que la longueur du segment est 215 cm), alors que si on choisit le mètre pour unité, la mesure du même segment s'exprime par le nombre 2,15 (on dit que la longueur du segment est 2,15 m). La longueur du segment n'a pas changé, ce qui se traduit par $215 \text{ cm} = 2,15 \text{ m}$ alors que $215 \neq 2,15$.

Le report de l'unité pour obtenir la mesure d'une grandeur s'est révélé vite fastidieux, voire impossible, ce qui a conduit à l'invention d'**instruments de mesure** (double-décimètre, chaîne d'arpenteur, compteur kilométrique, balance Roberval, pèse-lettres, peson à ressort, balance électronique...) et à l'élaboration de **formules** qui, par le biais du calcul, permettent d'exprimer une grandeur en fonction d'autres grandeurs : le périmètre ou l'aire d'un cercle en fonction de son rayon, la vitesse d'un véhicule en fonction de la distance parcourue et de la durée du parcours, etc.

Dans cette partie sont développées les connaissances et les compétences relatives aux principales grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes, angles) et non géométriques (durées, masses) :

- relations entre unités pour une même grandeur et conversions liées à des changements d'unités ;
- formules donnant le périmètre, l'aire ou le volume de surfaces et de solides étudiés à l'école et au collège ;
- effets de l'agrandissement ou de la réduction d'une surface ou d'un solide sur son aire ou son volume.

Géométrie (chapitres 15 à 22)

Étymologiquement, « géométrie » vient de « géo », qui signifie « terre » et « métrie », qui renvoie à mesure. Ainsi, la géométrie serait la science de la mesure de la terre (des terrains).

Historiquement, cette science est née en Égypte et en Mésopotamie il y a 4 000 ans, pour effectivement résoudre des problèmes de mesures (retracer les limites des champs après les crues du Nil) ou répondre à des questions liées à l'astronomie. Il y a donc, à l'origine, un lien fort entre la géométrie et la mesure.

Mais la géométrie ne se limite pas à des problèmes de mesure. Elle est devenue une théorie plus large qui permet de **modéliser l'espace sensible** et, ainsi, de résoudre des problèmes pratiques qu'on ne peut pas résoudre de façon pragmatique (par exemple : comment déterminer la hauteur d'un arbre sachant que je ne peux pas l'abattre, ni monter à son sommet ?).

Elle pose également des **problèmes théoriques**. Pour les résoudre, la géométrie s'est dotée d'un certain nombre de concepts qu'on peut partager en deux catégories :

- des **objets géométriques**, dont les plus connus sont : point, droite, segment, demi-droite, droites particulières (*médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle, hauteur d'un triangle, médiane d'un triangle*), triangle, triangles particuliers (*rectangle, équilatéral, isocèle*), polygone, quadrilatère, quadrilatères particuliers (*trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré*), cercle, disque, polyèdre, polyèdre particulier (*cube, pavé, prisme droit, pyramide, cône, sphère*), angle, angles particuliers (*droit, plat*)...
- des **relations** entre ces objets géométriques : l'appartenance, l'alignement et le repérage pour les points, le parallélisme et la perpendicularité pour les droites, l'égalité de longueurs pour les segments, les transformations géométriques pour notamment les polyèdres, cercles...

Les objets géométriques sont des objets idéaux qui sont caractérisés par **des propriétés**, qui permettent de les définir (par exemple : un parallélogramme est un quadrilatère qui a des côtés opposés parallèles 2 à 2) et d'établir des liens entre eux (par exemple : si deux droites sont perpendiculaires à une même 3^e droite, alors elles sont parallèles entre elles).

Ces propriétés servent à valider, de façon théorique, des conjectures que l'on peut établir à partir d'observations faites sur des dessins géométriques. Ces validations théoriques, qui s'appuient sur des propriétés, sont appelées des **démonstrations**.

Les objets géométriques (figures, solides) sont représentés par des **dessins**. Suivant les exigences de la situation dans laquelle on doit utiliser ces objets géométriques, on peut réaliser ces dessins à main levée, à l'aide d'**instruments géométriques** (règle, équerre, compas...) ou d'un **logiciel de géométrie dynamique**.

À ces objets et relations sont associés un **vocabulaire** (droite, hauteur, segment...), des **expressions** (la droite perpendiculaire à ... qui passe par ...) et un **codage** particulier (codage des segments de même longueur, de la perpendicularité).

Dans cette partie :

- nous ferons le point sur les principaux objets et relations géométriques de la géométrie plane et de l'espace (chapitres 14, 15, 19 et 21) en donnant leur définition, le vocabulaire qui leur est associé, leurs représentations, leurs propriétés ;
- nous porterons une attention particulière à la démonstration en géométrie (chapitre 16) et sur les principaux théorèmes de la géométrie, comme ceux de Pythagore et de Thalès (chapitres 17, 18 et 20).

Algorithmique, programmation (chapitre 23)

Les ordinateurs sont capables d'exécuter extrêmement rapidement des multitudes de tâches calculatoires simultanément. Depuis quelques années, ils sont également capables de résoudre des tâches très complexes (reconnaissance d'images, reconnaissance faciale...) et même d'apprendre par eux-mêmes (apprentissage profond – *deep learning*). Mais tout cela n'est possible que si on leur communique des **programmes**. Ces programmes sont élaborés à partir d'**algorithmes**.

Un algorithme est une suite ordonnée d'instructions qui vise à atteindre une catégorie de buts, à partir de données. Voici des exemples de **catégories de buts** en mathématique : tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, résoudre une équation du 1^{er} degré à une inconnue, calculer la moyenne d'une série statistique...

Les **instructions** sont, en mathématique, des savoir-faire. Par exemple, pour le but « résoudre une équation du 1^{er} degré à une inconnue », les savoir-faire sont : simplifier une expression littérale, identifier l'opposé de nombres et d'expressions littérales... À noter que ces savoir-faire peuvent eux-mêmes être « algorithmisés ». Les fiches méthodes présentées dans cet ouvrage sont des exemples d'algorithmes.

Mais on ne peut pas communiquer un algorithme à un ordinateur comme on le ferait à une personne : il faut en faire une traduction, afin que l'ordinateur puisse l'exécuter. Cette traduction se fait à partir d'un **langage**. Il y a de nombreux langages informatiques ; les plus connus sont le langage C, C++, Java, Python. Chaque langage a une syntaxe particulière, qu'il faut apprendre et mémoriser. C'est une source de difficulté pour les débutants.

La **programmation** est l'ensemble du processus qui consiste à concevoir et à transmettre à un ordinateur **dans le langage** choisi la liste des instructions (**appelée algorithme**) qu'il doit exécuter pour atteindre un but fixé.

Pour une initiation à la programmation, le logiciel SCRATCH (créé par une équipe du *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) présente au moins trois intérêts :

- il n'y a pas de difficulté de syntaxe, car les instructions sont des blocs que l'on déplace les uns en dessous des autres ;
- il est libre de droit et utilisable en ligne ;
- il a un caractère ludique qui incite les élèves à se l'approprier.

Il est actuellement utilisé dans de très nombreuses écoles et au collège.

Dans cette partie, vous trouverez une initiation à la programmation par le biais du logiciel Scratch. Il s'agira en particulier d'apprendre à utiliser des boucles, des instructions conditionnelles et des variables informatiques.

Les nombres entiers naturels – Les systèmes de numération

Objectifs

- Identifier et utiliser les caractéristiques d'un système de numération et, en particulier, celles du système de numération décimale (écriture des nombres naturels en base dix).
- Passer de l'écriture d'un nombre naturel dans un système à son écriture dans un autre système.
- Comparer deux nombres écrits en chiffres ou en lettres.

FICHES MÉTHODE

- 1 > Écrire en base dix un nombre donné en base b 26
- 2 > Écrire en base b un nombre donné en base dix. 26
- 3 > Comparer des nombres entiers naturels et les ranger. 30



Tester ses connaissances

Indiquer la ou les bonnes réponses en les justifiant.

QCM 1 Dans le nombre 2 305,

- A.** le nombre de dizaines est 0.
B. le nombre de dizaines est 230.
C. le nombre de milliers est 2.
D. le chiffre des milliers est 2.

aide

§2.3 p. 24

QCM 2 Je suis un nombre naturel. Mon nombre de centaines est 23 et mon chiffre des unités est 5. Qui suis-je ?

- A.** 235 **B.** 7 235 **C.** 2 305 **D.** 23 005 **E.** 72 305

aide

§2.1 p. 22

QCM 3 Combien de mots sont nécessaires pour exprimer oralement tous les nombres de 0 jusqu'à 100 (0 et 100 compris) ?

- A.** 22 **B.** 17 **C.** 24 **D.** 20 **E.** 26

aide

§4.1 p. 28

QCM 4 Combien y a-t-il de « 0 » dans l'écriture chiffrée du nombre « mille-milliards-vingt-millions-sept-cents » ?

- A.** 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10 **E.** 13

aide

§4.2 p. 29

QCM 5 Le nombre X a 6 pour chiffre des milliers, le nombre Y est quatre-mille-quatre-vingt-dix, le nombre Z comporte 47 centaines. Quel est le rangement correct ?

- A.** $X < Y < Z$ **B.** $Y < Z < X$ **C.** $Z < Y < X$ **D.** $Y < X < Z$

aide

§6 p. 31

1. B, C, D 2. C 3. C 4. D 5. B



LE COURS

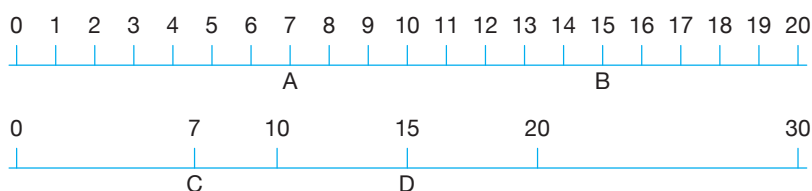
Les nombres naturels sont principalement utilisés pour dénombrer des unités et en exprimer la quantité. L'ensemble des nombres naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

La liste des nombres naturels est infinie. Chaque nombre, sauf évidemment 0, peut être obtenu en ajoutant 1 au nombre précédent.

Les nombres naturels permettent également de repérer des positions dans une liste rangée ou sur une demi-droite régulièrement graduée.

Sur les demi-droites ci-dessous préalablement graduées de 1 en 1 et de 10 en 10, on a placé les nombres 7 et 15 en face des points A et B (sur la première demi-droite) et en face des points C et D (sur la deuxième demi-droite). On dit que 7 est l'abscisse du point A sur la première droite et du point C sur la deuxième demi-droite.



Tous les points d'une demi-droite graduée ne peuvent pas être repérés par un nombre entier naturel.

Un système de numération permet d'écrire les nombres naturels, en totalité ou en partie. L'intention générale est de pouvoir écrire le plus possible de nombres naturels en utilisant un nombre fini de chiffres.

Il est caractérisé par un ensemble de symboles (appelés chiffres) et de procédés d'assemblage de ces symboles.

Dans l'histoire, deux grands types de systèmes de numération ont été utilisés : **les systèmes de type additif** et **les systèmes de type positionnel**.

L'efficacité d'un système peut être jugée au travers de trois préoccupations :

- le système permet-il d'écrire tous les nombres entiers naturels ou seulement une partie d'entre eux ?
- permet-il de comparer facilement ou non les nombres entre eux ?
- permet-il de calculer facilement pour les 4 opérations principales ?

L'expression orale des nombres et leur écriture en lettres sont, elles, d'une plus grande complexité et varient aujourd'hui, dans leurs principes, suivant les langues et les pays.

➤ La question de la comparaison des nombres entiers naturels est abordée au §6 de ce chapitre (p. 30).
➤ La question du calcul sur les nombres entiers est traitée dans le chapitre suivant.

1 Systèmes de numération de type additif

Le principe des systèmes de numération de type additif peut être illustré par deux exemples : le système égyptien et le système romain.

1 1. Système égyptien

Les chiffres égyptiens (vers 3000 avant notre ère) ont la forme de hiéroglyphes.

	Le bâton évoque l'unité
	L'anse de panier évoque la dizaine.
	Le rouleau de papyrus ou la corde enroulée évoque la centaine.
	La fleur de lotus évoque le millier.
	Le doigt levé évoque la dizaine de milliers.
	Le têtard évoque la centaine de milliers.
	Le dieu agenouillé évoque le million ou l'infini.

La mise côte à côte de plusieurs symboles pour évoquer un nombre signifie que l'on additionne les valeurs de ces symboles.

Ainsi  représente le nombre 20 350.

Entraînement 1
Traduire dans notre système .

 Consigné p. 32

Entraînement 2
Traduire les nombres 360 et 3 019 dans le système égyptien.

 Consigné p. 32

1 2. Système romain

Le système ancien qui nous est le plus familier est celui de la numération romaine, toujours utilisé pour les datations.

- La numération romaine comporte, au départ, peu de signes :

I = 1	C = 100
V = 5	D = 500
X = 10	M = 1 000
L = 50	

- Les règles de construction des écritures des autres nombres se limitent d'abord à de simples additions de signes juxtaposés. Elles ont été modifiées ensuite par quelques subtilités plus économiques.

Exemple : Le nombre 997 peut s'écrire DCCCCLXXXVII, ce qui correspond à la décomposition : $500 + 100 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1$, avec répétition de plusieurs signes identiques.

Il peut aussi s'écrire CMXCVII à l'aide de la règle : « tout signe placé à gauche d'un signe de valeur supérieure s'en retranche ». La « règle de soustraction » permet une économie dans la répétition des signes identiques.

L'écriture correspond alors à la décomposition :

$(1\ 000 - 100) + (100 - 10) + 5 + 1 + 1$.

- Avec des nombres plus grands, le système se complique : 1 000 000 s'écrivant par exemple $\overline{M}$ (le surlignage indique une multiplication par 1 000) ; le système prend alors un aspect multiplicatif.



Entraînement 3

- Traduire les nombres 360 et 3 019 dans le système romain.
- Traduire le nombre CMVI (écrit dans le système romain) dans notre système.



Corrigé p. 32

1 3. Inconvénients des systèmes de type additif

Les systèmes de type additif présentent un certain nombre d'inconvénients :

- l'écriture d'un grand nombre nécessite l'utilisation d'un grand nombre de chiffres (il suffit de penser à l'écriture de 99 999 en numération égyptienne) ;
- pour écrire des nombres toujours plus grands, il faut inventer de nouveaux chiffres ;
- les calculs deviennent rapidement difficiles à exécuter, notamment pour la multiplication et la division.



Dans un système additif, la longueur de l'écriture d'un nombre n'est pas en relation avec sa taille. Par exemple, en numération romaine, M est supérieur à CCCXXVII.

2 Systèmes de numération de type positionnel

Plusieurs systèmes de numération ont été conçus en attribuant aux symboles utilisés une valeur différente non seulement selon leur forme, mais également selon le rang qu'ils occupent dans l'écriture d'un nombre.

Le système maya, le système binaire¹ et le système de numération décimale que nous utilisons aujourd'hui en sont des exemples.

Nous allons plus particulièrement étudier les caractéristiques de notre système de numération décimale.

2 1. Principes du système de numération décimale

Pour être efficace et sans ambiguïté, notre système de numération positionnelle repose sur deux principes fondamentaux (A et B) et deux principes complémentaires (C et D).

A. La valeur d'un signe dépend de son rang dans l'écriture du nombre.

Dans notre système décimal, cette valeur représente des groupements d'unités : dizaines, centaines, milliers...

¹. On peut trouver sur internet des informations sur le système maya et le système binaire, ainsi que sur d'autres systèmes de numération.

Exemples : Dans l'écriture de 213 ; 425 ; 672 ou 2 987, le chiffre « 2 » n'a pas la même valeur :

- le « 2 » de 213 vaut 2 centaines
- le « 2 » de 425 vaut 2 dizaines
- le « 2 » de 672 vaut 2 unités
- le « 2 » de 2 987 vaut 2 milliers.

B. La méthode de groupements est régulière.

Tout groupement contient toujours le même nombre d'éléments et peut être échangé contre l'unité supérieure.

La valeur de cet échange s'appelle la **base** : en base dix, on peut échanger une dizaine contre dix unités, une centaine contre dix dizaines, etc.

C. Le nombre de signes différents qui permet l'écriture des nombres est égal à la base.

Ainsi, chaque rang n'est occupé que par un seul signe et non par une composition de signes.

Exemples :

- en **base dix**, nous disposons ainsi de dix chiffres : 0, 1, 2, ..., 9
- en **base deux**, deux chiffres suffisent : 0 et 1
- en **base vingt**, il faudrait vingt signes différents, etc.

D. Un des signes a pour fonction de signaler l'absence de groupement à un certain rang : c'est le zéro.

Exemple : Dans 102, le « 0 » indique qu'il n'y a pas de dizaine restante après le groupement des dizaines en centaines. Il n'y a pas « zéro dizaine », comme le croient beaucoup d'élèves, mais dix dizaines qui ont été groupées pour faire une centaine. **Le chiffre des dizaines de 102 est bien « 0 », mais le nombre de dizaines est « dix ».**



C'est l'émergence des numérations de position qui est à l'origine de l'invention du zéro.

Corrigé QCM 2 : 2 305 est le seul nombre de la liste qui comporte 23 centaines et a 5 pour chiffre des unités. D'autres nombres que ceux de la liste auraient pu convenir comme 2 315 ; 2 325...



Qcm 2, p. 19

2. Décompositions associées à l'écriture d'un nombre

A. Décompositions dans le système décimal

À chaque écriture en chiffres peut être associée une décomposition qui utilise des puissances de 10.

Exemples :

- Dans l'écriture de 23, « 2 » désigne 2 paquets de dix unités (ou dizaines) et « 3 » désigne 3 unités ; la décomposition associée est $2 \times 10 + 3$.
- Une première décomposition associée à 235 est :
 $2 \times 10 \times 10 + 3 \times 10 + 5 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 5 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5$.
- Autre décomposition : 2 centaines 3 dizaines 5 unités. On dit qu'on a décomposé 235 en **unités de numération**.



Rappel : $10^0 = 1$

$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs égaux à } 10} = \underbrace{1000\dots0}_{n \text{ chiffres } 0}$



En numération décimale, on appelle **unités de numération** les termes unité, dizaine, centaine... et ce qu'ils représentent.

Un tableau de numération permet de retrouver ces décompositions :

Millions 10^6			Milliers 10^3			Unités 10^0		
Centaines 10^8	Dizaines 10^7	Unités 10^6	Centaines 10^5	Dizaines 10^4	Unités 10^3	Centaines 10^2	Dizaines 10^1	Unités 10^0
							2	3
						2	3	5
			2	1	8	5	4	7

1 millier = 1 000 unités = 10^3 unités.

1 million = 10^6 unités = 10^3 milliers.

1 est le chiffre des dizaines de millier de 218 547.

2 est son chiffre des centaines de milliers.

D'autres décompositions liées au système décimal sont possibles, par exemple pour 235 :

$235 = 23$ dizaines 5 unités

$235 = (23 \times 10) + 5$

B. Généralisation pour la base dix

Pour le nombre $\overline{hgfedcba}$ écrit en base dix, on a l'égalité fondamentale :

$\overline{hgfedcba} = h \times 10^7 + g \times 10^6 + f \times 10^5 + e \times 10^4 + d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \times 10^0$.

Exemple : $1\,027 = (1 \times 1\,000) + (2 \times 10) + 7 = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0$.



La barre horizontale placée au-dessus de $\overline{hgfedcba}$ est souvent utilisée pour indiquer qu'on a affaire à l'écriture d'un nombre qui est à distinguer du produit des nombres ($hgfedcba$).

D'autres méthodes peuvent être utilisées pour distinguer l'écriture d'un nombre de l'écriture d'un produit, par exemple l'utilisation de parenthèses : $(hgfedcba)$. Le cas échéant, la notation utilisée est précisée dans le sujet proposé aux candidats du CRPE.

2 3. Chiffre et nombre

L'écriture d'un nombre est composée à l'aide de « chiffres ».

- Les chiffres sont les symboles graphiques utilisés pour écrire les nombres.

Le mot « chiffre » vient de l'arabe *sifr*, utilisé pour « zéro » et signifiant « le vide ».

- Le « nombre » est un concept permettant d'évoquer des quantités, d'exprimer la mesure de grandeurs... alors que le « chiffre » est une écriture graphique.

Il ne faut donc pas confondre « chiffre » et « nombre ».

Exemples :

- « 3 » est un chiffre et « 23 » un assemblage de chiffres, si on ne considère que la trace graphique laissée sur le papier.

- « 3 » et « 23 » sont des nombres, si on les considère par exemple dans des expressions comme « 3 brebis » ou « 23 cm » ou encore, si on les envisage dans le cadre d'un calcul comme $3 + 23 = 26$.

② 4. Chiffre des... et nombre de...

Dans 235, 5 est le chiffre des unités, 3 celui des dizaines et 2 celui des centaines.

La décomposition $235 = 2 \text{ centaines} + 3 \text{ dizaines} + 5 \text{ unités}$ permet de dire que, dans 235, il y a 2 centaines ou que le nombre de centaines de 235 est égal à 2.

La décomposition $235 = 23 \text{ dizaines} + 5 \text{ unités}$ permet de dire que dans 235 il y a 23 dizaines ou que le nombre de dizaines de 235 est égal à 23.

Il ne faut donc pas confondre le **chiffre des dizaines** (celui qui est écrit au rang des dizaines de 235) et le **nombre de dizaines** (qui répond à la question : « Combien de dizaines peut-on former avec 235 unités ? »)

Corrigé QCM 1 : Dans 2 305, le chiffre des dizaines est 0 et 230 est le nombre de dizaines.

2 est le chiffre des milliers mais aussi le nombre de milliers parce que

$$2\,305 = 2 \times 1\,000 + 3 \times 100 + 5.$$

 Qcm 1, p. 19

✎ Entraînement 4

Écrire tous les nombres qui contiennent 20 centaines et qui ont 3 pour chiffre des dizaines.

 Consigné p. 32

③ Numération de position de base quelconque

L'étude des bases autres que dix permet de mieux comprendre notre propre système.

③ 1. Principes d'une numération de position de base b

A. En base b , les groupements successifs se font par b éléments.

Chaque groupement « apporte » donc au nombre une puissance de b correspondant à son rang. b doit être supérieur à 1.

Le nombre qui s'écrit dans la base b $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ est égal à :

$$a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + a_{n-2} \times b^{n-2} + \dots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0.$$

Comme en base dix, un tableau de numération permet de regrouper les informations :

b^5	b^4	b^3	b^2	b^1	b^0
a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0



Rappel :

$$b^1 = b$$

$$b^0 = 1$$

$$b^n = b \times b \times b \times \dots \times b$$

(avec n facteurs égaux à b)

Voir chapitre 6 §3.1, p. 155.

Exemple : En base cinq, $\overline{342}^{\text{cinq}} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 2 \times 5^0$.

B. En base b , les chiffres ont tous une valeur inférieure à b .

Exemples :

- En **base cinq**, les chiffres utilisés sont 0, 1, 2, 3 et 4.
- En **base douze**, les chiffres utilisés sont, par exemple : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α , β , les chiffres α , β évoquant respectivement les nombres dix et onze.
- En **base cinq**, la suite des nombres s'écrit : $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{30} \dots$

3 2. Écrire en base dix un nombre donné en base b , et inversement

FICHE MÉTHODE 1 Écrire en base dix un nombre donné en base b .

→ Écrire en base dix le nombre $\overline{20\alpha 4}^{\text{douze}}$ (donné en base douze).

1. Écrire la décomposition du nombre en base b , en s'aidant du tableau de numération.

12^5	12^4	12^3	12^2	12^1	12^0
		2	0	α	4

2. Effectuer les calculs en base dix.

$\overline{20\alpha 4}^{\text{douze}} = (2 \times 12^3) + (0 \times 12^2) + (10 \times 12^1) + (4 \times 12^0)$.
On obtient la réponse : 3 580.

FICHE MÉTHODE 2 Écrire en base b un nombre donné en base dix.

→ Écrire en base cinq le nombre 442 (donné en base dix).

Méthode 1. Par divisions

1. Diviser le nombre donné par b , le reste obtenu donne le chiffre des unités.

$442 = 88 \times 5 + 2$ donc $442 = \overline{\dots 2}^{\text{cinq}}$
88 représente le nombre de groupements de 5 unités, et 2 le nombre d'unités restantes (donc le chiffre des unités).

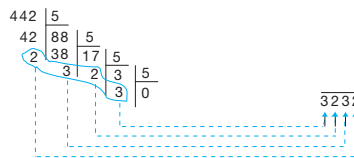
2. Diviser le quotient obtenu par b , le nouveau reste obtenu donne le chiffre suivant.

$88 = 17 \times 5 + 3$ donc $442 = \overline{\dots 32}^{\text{cinq}}$
17 représente le nombre de groupements de 5 groupements d'unités, et 3 le nombre de groupements de 5 unités restantes, donc le chiffre des « cinquaines ».

Étapes suivantes.
Recommencer avec les nouveaux quotients jusqu'à obtenir un quotient inférieur à b .

$17 = 3 \times 5 + 2$ donc $442 = \overline{\dots 232}^{\text{cinq}}$
 $3 = 0 \times 5 + 3$ donc $442 = \overline{3232}^{\text{cinq}}$

Remarque : On peut présenter cette méthode en posant directement les divisions successives :



Dans la méthode 1 comme dans la méthode 2, si on utilise une calculatrice, il faut utiliser la touche « division euclidienne ».

Méthode 2. Avec le tableau de numération

1. Construire le support du tableau de numération qui est une aide utile pour conduire les calculs.

$5^4 = 625$	$5^3 = 125$	$5^2 = 25$	$5^1 = 5$	$5^0 = 1$

2. Chercher combien de fois la plus grande puissance possible de b est contenue dans le nombre donné. Cela détermine le « premier » chiffre du nombre.

$442 = 3 \times 125 + 67$. (5^3 est contenu 3 fois dans 442).
On écrit 3 dans la colonne de $5^3 = 125$.

$5^4 = 625$	$5^3 = 125$	$5^2 = 25$	$5^1 = 5$	$5^0 = 1$
	3			

Étapes suivantes.
Recommencer avec les restes successifs.

$67 = 2 \times 25 + 17$. (5^2 est contenu 2 fois dans 17).

On écrit 2 dans la colonne de $5^2 = 25$.

$5^4 = 625$	$5^3 = 125$	$5^2 = 25$	$5^1 = 5$	$5^0 = 1$
	3	2		

$17 = 3 \times 5 + 2$. (5^1 est contenu 3 fois dans 17).

On écrit 3 dans la colonne de 5^1 et 2 dans la colonne de 5^0 .

$5^4 = 625$	$5^3 = 125$	$5^2 = 25$	$5^1 = 5$	$5^0 = 1$
	3	2	3	2

On obtient la réponse : $\overline{3232}^{\text{cinq}}$.

Entraînement 5

Exprimer le nombre de ces points en base cinq et en base trois, en utilisant une méthode qui ne nécessite pas la détermination du nombre de points (en base dix) et une méthode qui le nécessite.

.....

 Corrigé p. 32

Entraînement 6

Écrire en base sept, les nombres suivants :

A = $7^4 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5$

B = $7^5 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 8$

C = $7^4 + 7^3 \times 7 + 3 \times 7$.

 Corrigé p. 33

Entraînement 7

Écrire en base dix le nombre qui s'écrit $\overline{324}$ en base cinq.

 Corrigé p. 33

Entraînement 8

On dispose des signes *a, e, i, o, u* pour écrire tous les entiers naturels. Écrire la suite des vingt-cinq premiers nombres et préciser les règles employées.

a, e, i, o, u sont dans l'ordre croissant et *a* représente zéro.

 Corrigé p. 33

Entraînement 9

Écrire en base cinq ces nombres donnés dans notre système décimal : 125 ; 500.

 Corrigé p. 34

Entraînement 10

Est-il possible de comparer les nombres :

$A = \overline{10234}^{\text{cinq}}$ et $B = \overline{231}^{\text{douze}}$, sans convertir entièrement ces nombres en base dix ?

 Corrigé p. 34