PTSI

Nicolas Nguyen
Mathieu Fontes
Walter Damin
Christophe Jan

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

MATHS

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

5e édition
+ exos-minutes

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Mathématiques PTSI

5e édition

ouvrage coordonné par

Nicolas NGUYEN

Professeur au lycée François Rabelais (Saint-Brieuc)

Mathieu FONTES

Professeur au lycée Louis Barthou (Pau)

Walter DAMIN

Professeur au lycée Arnaut Daniel (Ribérac)

Christophe JAN

Professeur au lycée du Parc (Lyon)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

Les notices culturelles « un mathématicien » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Les macros de cet ouvrage ont été réalisées par Nicolas Nguyen en LaTeX.

ISBN 9782340-103795
Dépôt légal : juillet 2025
©Ellipses Édition Marketing S.A.
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un DS, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en mathématiques comme en physique ou chimie.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un DS, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » vous permet de tester votre recul par rapport au programme et de remédier à quelques mauvais réflexes. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Du nouveau dans cette édition

- Une note « Méthodologie de l'apprentissage », en début d'ouvrage, vous guide dans l'organisation de votre travail.
- Quelques « exos-minutes » dans chaque chapitre, plutôt faciles à résoudre, vous permettent de tester vos réflexes en application directe des cours.

Ainsi l'ouvrage de maths comme ceux de physique-chimie, de sciences industrielles de l'ingénieur et d'informatique vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Méthodologie de l'apprentissage VII

Premier semestre

1. Logique et raisonnements 3
2. Ensembles et applications 33
3. Calcul algébrique et trigonométrique 63
4. Nombres complexes 103
5. Systèmes linéaires 135
6. Techniques fondamentales pour l'étude des fonctions 159
7. Fonctions usuelles 191
8. Primitives et équations différentielles 225
9. Suites numériques 259
10. Limite et continuité des fonctions 291
11. Dérivabilité 323
12. Calcul matriciel 353

Deuxième semestre

13. Analyse asymptotique 389
14. Géométrie du plan 423
15. Géométrie de l'espace 453
16. Polynômes et fractions rationnelles 483
17. Espaces vectoriels et applications linéaires 517
18. Espaces vectoriels de dimension finie 545
19. Matrices 575
20. Déterminants* 607
21. Intégration 631
22. Dénombrement 659

23. Probabilités sur un univers fini 685
24. Variables aléatoires, espérance, variance 717
25. Séries numériques 753
26. Fonctions de deux variables* 787

Annexes

Formulaire 819
Index des notations 825
Index 827

1. Au second semestre, les paragraphes et chapitres marqué d'un astérisque concerne uniquement les étudiants ayant choisi l'option PSI.

Méthodologie de l'apprentissage

En classe préparatoire comme dans le secondaire, l'apprentissage se fait par couches successives. À chaque itération, la mémorisation s'améliore et la compréhension est plus profonde. Cependant, à la différence du lycée, un chapitre correspond désormais à une semaine de cours ! Le rythme de l'apprentissage est primordial. La clé de votre réussite passe par la régularité de votre travail personnel. Ainsi, le premier conseil que l'on peut donner et de travailler quotidiennement les mathématiques. Afin de voir comment une même notion peut être vue et revue plusieurs fois dans le rythme propre à la CPGE, prenons l'exemple d'une notion telle que la formule du binôme de Newton (page 67).

■ Le cours

La première fois que vous entendez parler de cette notion, c'est lors de la séance de cours. Votre objectif est bien de comprendre et non pas uniquement d'écouter attentivement et de noter. Il faut être actif pendant la séance et ne pas hésiter à poser des questions au professeur. Le jour-même votre travail personnel consiste à savoir refaire par vous-même : réécrire l'énoncé, refaire les exemples, redémontrer.

- Résumé de cours
- Vrai/Faux

■ Les exercices

Il est indispensable de consacrer du temps à la recherche d'exercices. En effet, pour résoudre un exercice, vous devez mettre en oeuvre les résultats du cours. Encore faut-il savoir quel théorème utiliser ! Vous devez interroger votre connaissance du cours. Demandez-vous qu'est-ce qui dans le cours peut-être utile pour traiter cette question ?

- Méthodes
- Exercices

Qu'il s'agisse d'une séance de travaux dirigés ou d'un travail de recherche individuel, il faut également travailler les corrections de ces exercices qui vous donneront un argument et une rédaction possibles de la solution.

- Corrigés

■ Les colles

Lorsque vous préparez vos colles, vous êtes de nouveau amené à reprendre le cours et les exercices déjà traités ainsi que les méthodes classiques de résolution. Pour être fin prêt, cherchez de nouveaux exercices, la gymnastique intellectuelle entre connaissance théorique et application pratique est essentielle pour une compréhension en profondeur !

- Tout le chapitre

■ Les devoirs surveillés

Le Devoir en temps Libre ou Devoir Maison est un travail personnel qui combine à la fois recherche (comme pour tout exercice) mais également rédaction. En effet, c'est à l'occasion de ces devoirs, que vous pouvez prendre le temps nécessaire pour détailler vos arguments et peaufiner votre rédaction. Car il ne faut pas l'oublier, une copie de devoir de mathématiques est avant tout un texte qui doit être rédigé de façon précise mais aussi synthétique pour pouvoir traiter un maximum de questions lors du Devoir Surveillé. Lorsque le professeur rendra votre copie corrigée, il faudra bien sûr analyser votre copie et vos erreurs.

■ Conclusion

On voit dans l'enchainement habituel des étapes précédentes qu'une même notion sera travaillée en de multiples occasions, sous des angles différents : décrypter et mémoriser l'énoncé, savoir quand et comment l'utiliser, savoir le démontrer ... Mais vous pouvez renforcer votre connaissance en travaillant avec méthode.

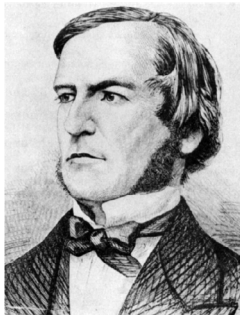
- Si vous réalisez à l'occasion d'une correction d'exercice ou d'une démonstration que vous avez oublié une formule ? réécrivez-la en marge de vos notes telle qu'elle est apparue la première fois dans votre cours
- Surtout, appliquez les résolutions d'exercices classiques avec méthode : ainsi, à chaque fois que vous les mettrez en œuvre, vous vous améliorerez !

Premier semestre

Chapitre 1

Logique et raisonnements

UN MATHÉMATICIEN



Né dans une famille de commerçants, **George Boole** est un parfait autodidacte. Il apprend seul le latin et le grec et lit avec passion les textes de grands mathématiciens tels Joseph Lagrange et Pierre-Simon Laplace. Dans sa principale publication, *An investigation into the Laws of Thought*, publié en 1854, il innove en fondant sur des bases mathématiques le raisonnement logique, jusque-là considéré comme une branche de la philosophie.

Un peu d'histoire

On considère les Grecs anciens comme les fondateurs des mathématiques car les premiers, ils ont eu le souci de justifier leurs résultats par des démonstrations. Des philosophes comme Aristote ou les Stoïciens ont même réfléchi à la notion de raisonnement. Au milieu du XIX^{e}, les mathématiciens anglais George Boole et Augustus De Morgan s'intéressent au raisonnement logique en tant que tel. Le premier définit des opérations logiques telles la négation d'une proposition, la conjonction ou la disjonction de deux d'entre elles. Le second, s'inspirant d'Aristote, introduit la notion de quantificateur. Au tournant du XX^{e} siècle, des mathématiciens comme Giuseppe Peano ou Bertrand Russell utilisent le langage de la théorie des ensembles pour fonder le raisonnement mathématique sur des bases solides.

Objectifs

les incontournables

- Manipuler les quantificateurs.
- Raisonner par implication ou par équivalence.
- Utiliser un raisonnement par l'absurde ou par contraposition.
- Effectuer un raisonnement par récurrence simple ou double.

et plus si affinités

- Appliquer une récurrence forte.
- Raisonner par analyse-synthèse.

Résumé de cours

Rudiments de logique

Connecteurs logiques

Définition : *Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
*La **négation** de P est la proposition, notée **non P**, définie par :*

- *non P est vraie lorsque P est fausse ;*
- *non P est fausse lorsque P est vraie.*

*La **conjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P et Q**, définie de la manière suivante :*

- *P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies ;*
- *P et Q est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*

*La **disjonction** de P et de Q est la proposition, notée **P ou Q**, définie de la manière suivante :*

- *P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;*
- *P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.*

Définition : *Soit P et Q deux propositions.*
*L'**implication** P entraîne Q est la proposition, notée $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ définie par non P ou Q.*
*L'**équivalence** de P et de Q est la proposition, notée $\boldsymbol{P \iff Q}$, définie par la conjonction $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.*

Vocabulaire : *La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou encore « **si** P **alors** Q ». La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit également « P **si et seulement si** Q ».*

Remarques :

- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q, ou que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.
- Lorsque $P \iff Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q. Ainsi, les équivalences sont les conditions nécessaires et suffisantes.

Table de vérité des connecteurs logiques

P	Q	non P	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque : d'après cette table de vérité, si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**.

Méthodes

Proposition 1.1.— Règles de calcul pour la conjonction, la disjonction —. Soit P, Q et R trois assertions. Alors

- $P \text{ ou } Q \iff Q \text{ ou } P$
- $P \text{ et } Q \iff Q \text{ et } P$
- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \iff P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \iff P \text{ et } (Q \text{ et } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } R) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$

Proposition 1.2.— Règles de calcul pour la négation —. Soit P et Q deux assertions. Alors

- $non\ (non\ P) \iff P$
- $non\ (P\ ou\ Q) \iff (non\ P)\ et\ (non\ Q)$
- $non\ (P\ et\ Q) \iff (non\ P)\ ou\ (non\ Q)$
- $non\ (P \Rightarrow Q) \iff P\ et\ (non\ Q)$

Théorème 1.3.— Soit P et Q deux propositions.

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \iff (non\ Q \Rightarrow non\ P)}$$

Vocabulaire : *L'implication non $Q \Rightarrow$ non P est appelée la* ***contraposée*** *de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

■ Quantificateurs

Définition : *Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.*

- **Quantificateur universel :** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E, on écrit :*

$$\boxed{\forall x \in E,\ P(x)}$$

Le symbole $\forall$ est appelé ***quantificateur universel*** *et se lit « **quel que soit** ».*

- **Quantificateur existentiel —.** *Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit :*

$$\boxed{\exists x \in E,\ P(x)}$$

Le symbole $\exists$ est appelé ***quantificateur existentiel*** *et se lit « **il existe** ».*

Proposition 1.4.— Négation des propositions avec quantificateurs —.

- La négation de la proposition $\forall x \in E,\ P(x)$ est : $\exists x \in E,\ non\ P(x)$.
- La négation de la proposition $\exists x \in E,\ P(x)$ est : $\forall x \in E,\ non\ P(x)$.

Remarque : attention, l'ordre des quantificateurs est très important. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition. Pour s'en convaincre, on pourra consulter le **Vrai/Faux**.

■ Modes de raisonnement

Théorème 1.5.— Soit P et Q des propositions.

- **Preuve par déduction**

• **Si** Q est vraie • **Si** $Q \Rightarrow P$ est vraie	**Alors** P est vraie

- **Preuve par disjonction de cas**

• **Si** $Q \Rightarrow P$ est vraie • **Si** $non(Q) \Rightarrow P$ est vraie	**Alors** P est vraie

- **Preuve par l'absurde**

• **Si** $non(P) \Rightarrow Q$ est vraie • **Si** $non(P) \Rightarrow non(Q)$ est vraie	**Alors** P est vraie

■ Raisonnement par récurrence

Théorème 1.6.— Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ —. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème 1.7.— Principe de récurrence —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.8.— Récurrence double —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** les propriétés $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, ($\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$) implique $\mathcal{P}(n+2)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.9.— Principe de récurrence forte (ou récurrence avec prédécesseurs) —. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

- **Initialisation :** la proposition $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **Hérédité :** pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\Big(\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}(n)\Big)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$;

alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Méthodes

Démontrer une proposition

❑ Méthode 1.1.— Comment démontrer une proposition par déduction
Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie. C'est le **principe de déduction**. C'est un principe très simple que l'on utilise en permanence : si l'on sait qu'une proposition P est vraie (propriété du cours, résultat d'une question antérieure...) et que l'on sait démontrer $P \Rightarrow Q$, alors on a démontré que la proposition Q est vraie.

Exemple : montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$.
On a $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$. Or, $(x-2)^2 \geqslant 0$ (le carré d'un réel est positif) et $1 > 0$. Par conséquent, $(x-2)^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Mise en œuvre : tous les exercices !

❑ Méthode 1.2.— Comment démontrer une proposition par disjonction de cas
On est parfois amené à distinguer plusieurs cas pour démontrer qu'une proposition est vraie. C'est le principe d'une démonstration par **disjonction de cas**. En particulier, si l'on souhaite démontrer qu'une proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble E, on peut prouver la proposition pour tous les éléments d'une partie A de E, puis pour les éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ en distinguant les cas n pair ou impair.

- Si n est pair, on peut écrire $n = 2k$, où $k \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
- Si n est impair, on a $n = 2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = (2p+1)(p+1) \in \mathbb{N}$.

Finalement, pour tout entier naturel n, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.8, exercice 1.9.

❑ Méthode 1.3.— Comment démontrer une proposition par l'absurde
Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde**. Pour cela, on suppose que P est fausse et on démontre que l'on aboutit alors à une contradiction.

Exemple : montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.
Nous allons démontrer cette proposition en raisonnant par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un entier naturel N_0 supérieur à tous les autres. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N_0$. La relation est donc vraie pour l'entier $n = N_0 + 1$, donc $N_0 + 1 \leqslant N_0$; d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est faux ! Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.

Mise en œuvre : exercice 1.12, exercice 1.15.

■ Démontrer une implication

❑ Méthode 1.4.— Comment démontrer une implication par raisonnement direct
Pour montrer directement l'implication $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. La démonstration commence par « supposons que P est vraie » et se termine par « Q est vraie ».

Exemple : démontrer que, pour x et y réels, $x^2 = y^2 \Longrightarrow |x| = |y|$.
Soit x et y deux réels tels que $x^2 = y^2$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$, soit $(x - y)(x + y) = 0$.
Par conséquent, $x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Ainsi, $x = y$ ou $x = -y$, ce qui signifie que $|x| = |y|$ (x et y sont égaux ou opposés). On a donc démontré l'implication attendue.

❑ Méthode 1.5.— Comment démontrer une implication par contraposition
Le raisonnement par contraposition est basé sur le **théorème 1.3** :

l'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.

Ainsi, pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut prouver que l'implication *non* $Q \Rightarrow$ *non* P est vraie. En pratique, on suppose donc que *non* Q est vraie et on montre que *non* P est vraie.

Exemple : soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

La proposition à démontrer s'écrit : « n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair ». Nous allons raisonner par contraposition en démontrant la proposition (équivalente) : « n n'est pas pair $\Rightarrow$ n^2 n'est pas pair », c'est-à-dire « n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair ». Considérons un entier impair n : il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, ce qui s'écrit aussi $n^2 = 2p+1$, où $p = 2k^2+2k$. Par conséquent, n^2 est un entier impair, ce qui démontre l'implication : si n est impair, alors n^2 est impair. Par contraposition, nous avons donc montré l'implication : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exemple : montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Nous allons de nouveau utiliser la contraposée en démontrant l'implication « $1+x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ». Soit x un réel tel que $1 + x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = (1 + x) - 1$. Or $1 + x$ est un nombre rationnel (hypothèse), et 1 aussi. Par conséquent, $(1 + x) - 1$ est un nombre rationnel, ce qui montre que $x \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, on a démontré l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + x \notin \mathbb{Q}$ ».

Mise en œuvre : exercice 1.11

❑ Méthode 1.6.— Comment démontrer une implication par l'absurde
L'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition *non* P *ou* Q, sa négation est donc P *et non* Q.
Pour démontrer par l'absurde l'implication $P \Rightarrow Q$:

- on suppose que P est vraie et que Q est fausse ;
- on montre que cela aboutit à une contradiction.

Exemple : soit $x, y \in \mathbb{R}^+$. En raisonnant par l'absurde, montrer que, si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$, alors $x = y$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ **et** $x \neq y$ (P est vraie, Q est fausse). Il en résulte que $x(1+x) = y(1+y)$, d'où l'on tire $x^2 - y^2 = y - x$, soit $(x-y)(x+y) = y - x$, d'où $(x-y)(x+y+1) = 0$. Comme $x \neq y$, on en déduit que $x + y + 1 = 0$, donc $x + y = -1$. Absurde vu que x et y sont positifs ! leur somme ne saurait être négative. D'où le résultat.

■ Démontrer une équivalence

❑ Méthode 1.7.— Comment démontrer une équivalence par double implication
Par définition, l'équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ » est la proposition « $P \Rightarrow Q$ *et* $Q \Rightarrow P$ ». Démontrer par double implication l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, c'est démontrer que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. En pratique, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$ par double implication :

- on démontre $P \Rightarrow Q$;
- puis on démontre $Q \Rightarrow P$.

Dans ce cas, il y a donc deux démonstrations à faire pour obtenir l'équivalence.

Exemple : on pose $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$. Nous allons prouver cette équivalence en raisonnant par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $m = 0$, f est constante et égale à 1, elle garde donc un signe constant (positif) sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, montrons que, si f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, alors $m = 0$. Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $m \neq 0$. On a alors :

$$f(x) = m\big(x + \frac{1}{m}\big),$$

et f change de signe en $-\frac{1}{m}$ (du signe de m pour $x > -\frac{1}{m}$, du signe de $-m$ pour $x < -\frac{1}{m}$). Ainsi, si $m \neq 0$, f change de signe sur $\mathbb{R}$.
Nous avons montré les deux implications. Ainsi, f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
On va raisonner par double implication.
• Si x est solution de l'équation, alors $(2x)^2 = x^2 + 1$, soit $4x^2 = x^2 + 1$, d'où $3x^2 = 1$. On obtient donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
• Réciproquement, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont-ils solutions de l'équation ? Si x est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est solution mais $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne l'est pas.
Finalement, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

❑ Méthode 1.8.— Comment démontrer une équivalence par raisonnement direct
Pour démontrer l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut également enchaîner les équivalences. On passe de P à Q par une succession d'équivalences en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'équivalence est bien conservée.

Remarque : Cette méthode est particulièrement adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations. Notons qu'il n'est pas toujours possible d'appliquer cette méthode directe pour démontrer une équivalence. Il est parfois nécessaire de procéder par double implication (**méthode 1.7**).

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.
Pour $x < 0$, l'équation n'a pas de solution (un nombre strictement négatif ne peut pas être égal à une racine carrée). Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$2x = \sqrt{x^2+1} \iff (2x)^2 = (\sqrt{x^2+1})^2 \iff 4x^2 = x^2+1 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mise en œuvre : exercice 1.10.

■ Utiliser un contre-exemple

❑ **Méthode 1.9.— Comment utiliser un contre-exemple**

La négation de la proposition $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E, non\ P(x) \gg$.
Si l'on souhaite démontrer qu'une proposition du type $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ est fausse, il suffit de trouver une valeur de x de E pour laquelle la proposition $P(x)$ est fausse. On parle alors de **contre-exemple**.

Exemple : la fonction sinus n'est pas paire. Par exemple, $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq \sin(-\frac{\pi}{2})$.

Exemple : la proposition « tout entier naturel est somme de trois carrés » est-elle vraie ?
On peut facilement vérifier que cette proposition est vraie pour tout entier $n \in \{0, \cdots, 6\}$. Par exemple, $0 = 0^2+0^2+0^2$ et $5 = 2^2+1^2+0^2$. En revanche, la proposition est fausse pour $n = 7$. Sinon, on pourrait écrire $7 = a^2+b^2+c^7$, avec nécessairement $a, b, c \in \{0, \cdots, 2\}$ (puisque $3^2 = 9$). Mais, avec trois des carrés 0^2, 1^2 et 2^2, il est impossible de former 7. Ainsi, 7 constitue un contre-exemple et la proposition énoncée est donc fausse.

Mise en œuvre : voir le Vrai/Faux.

■ Raisonner par analyse-synthèse

❑ **Méthode 1.10.— Comment raisonner par analyse-synthèse**

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode qui permet de déterminer les solutions d'un problème. Ce raisonnement se déroule en deux étapes.

- Phase d'**analyse** : on suppose le problème résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- Phase de **synthèse** : on montre que ces conditions obtenues sont suffisantes et on résout le problème.

En pratique, on démontre que, si x est solution du problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (phase d'analyse) ; on vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (phase de synthèse).

Exemple : montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Nous allons raisonner par analyse-synthèse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Analyse. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$$

Comme g est paire et h impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$$

En sommant les deux égalités précédentes, on en déduit que $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.
De même, en retranchant ces deux égalités, il vient $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.
Synthèse. Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.
• La fonction g est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$

• La fonction h est paire puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

• Enfin, on a $f = g + h$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Par conséquent, nous avons démontré par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (g, h), avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Mise en œuvre : exercice 1.13 et **exercice 1.14**.

■ Raisonner par récurrence

❑ Méthode 1.11.— Comment appliquer une récurrence simple
Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **simple**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** On vérifie que la proposition est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :** On suppose que la proposition est vraie à un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la proposition est vraie au rang n ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n + 1$;
- **Conclusion :** « Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$.
- **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. On déduit de cette hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+n+1 &= (1+2+\cdots+n)+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exemple : montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1$.

Ici $n_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on introduit la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1 \text{ »}.$$

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1\times 1! = 1$, $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ et $1 = 1$.
- **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé, c'est-à-dire que :

$$1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! = (n+1)! - 1.$$

D'après cette hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\begin{aligned} 1\times 1! + \cdots + (n+1)\times(n+1)! &= 1\times 1! + 2\times 2! + \cdots + n\times n! + (n+1)\times(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)![1+n+1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion :** Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Mise en œuvre : exercice 1.16, exercice 1.17, exercice 1.22, exercice 1.23.

> ❑ **Méthode 1.12.— Comment appliquer une récurrence double**
>
> Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **double**, qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:
>
> - **Initialisation :** on vérifie que la proposition est vraie aux deux rangs initiaux n_0 et n_0+1 ;
> - **Hérédité :** on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$, où n est un entier fixé supérieur ou égal à n_0 (« on suppose que la proposition est vraie aux rangs n et $n+1$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+2$;
> - **Conclusion :** « Par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4\times 2^{n+1} - 7\times 3^n$.
On effectue une récurrence double en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{«}u_n = 4\times 2^{n+1} - 7\times 3^n\text{»}.$$

Méthodes

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $u_0 = 1$ et $4 \times 2^{0+1} - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1.$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = -5$ et $4 \times 2^{1+1} - 7 \times 3^1 = 16 - 21 = -5$.

• **Hérédité :** On suppose maintenant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, où $n \in \mathbb{N}$ est fixé, c'est-à-dire :

$$u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}.$$

En utilisant l'égalité donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n, on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n = 5(4 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n) \\ &= 20 \times 2^{n+2} - 35 \times 3^{n+1} - 24 \times 2^{n+1} + 42 \times 3^n \\ &= 2^{n+1}(2 \times 20 - 24) + 3^n(42 - 35 \times 3) = 16 \times 2^{n+1} - 63 \times 3^n \\ &= 4 \times 2^2 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^2 \times 3^n = 4 \times 2^{n+3} - 7 \times 3^{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mise en œuvre : exercice 1.18, exercice 1.19.

❑ **Méthode 1.13.— Comment appliquer une récurrence forte**

Pour montrer, à l'aide d'une récurrence **forte**, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$:

- **Initialisation :** on vérifie que la propriété est vraie au rang initial n_0 ;
- **Hérédité :**on suppose que la propriété est vraie du rang n_0 **jusqu'à** un certain rang $n \geqslant n_0$ fixé (« on suppose que la propriété est vraie aux rangs $n_0, n_0+1, \cdots, n$ ») et on en déduit qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$;
- **Conslusion :** « Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ ».

Exemple : montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « n s'écrit comme un produit de nombres premiers ».
Ici le rang initial n_0 est égal à 2.

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $2 = 2$ et 2 est un nombre premier !

• **Hérédité :** Soit n un entier supérieur ou égal à 2 fixé. On suppose que $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est-à-dire que tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ peut se décomposer en produit de nombres premiers. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ($n+1$ se décompose en un produit de nombres premiers). Il y a deux cas :

- ▸ si $n+1$ est premier, il n'y a rien à faire ($n+1 = n+1$ et $n+1$ est un nombre premier !)
- ▸ si $n+1$ n'est pas un nombre premier, on peut écrire $n+1 = pq$, où p et q sont des entiers compris entre 2 et n. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p et q (p et q appartiennent à $[\![2, n]\!]$ donc $\mathcal{P}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$ sont vraies) : p et q se décomposent en produit de nombres premiers. Il en est alors de même pour leur produit $pq = n+1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

• **Conclusion :** On vient de démontrer, par récurrence forte, que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Mise en œuvre : exercice 1.20.

Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. $\forall x < 2,\ x^2 < 4$	☐	☐
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$	☐	☐
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.	☐	☐
4. La négation de « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ ».	☐	☐
5. La négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « le jour, aucun chat n'est gris »	☐	☐
6. La réciproque de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait nuit »	☐	☐
7. La contraposée de « la nuit, tous les chats sont gris » est « quand tous les chats sont gris, il fait jour ».	☐	☐
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leqslant n$	☐	☐
9. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$	☐	☐
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \geqslant n+1$.	☐	☐

Énoncé des exercices

Exos minutes

Exercice 1.1 : Soit P et Q deux assertions.
1. Quelle est la table de vérité de l'implication $P \Rightarrow Q$?
2. À l'aide des tables de vérité, démontrer que $(P \Rightarrow Q) \iff (NonP \ ou \ Q)$.

Exercice 1.2 : Que penser de l'implication « 5 *impair* $\Rightarrow$ 3 *impair*» ? Énoncer sa négation, sa contraposée.

Exercice 1.3 : Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\big(\forall n \in \mathbb{N}\big),\ (1+a)^n \geqslant 1+na$.

Logique et propositions

Exercice 1.4 : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1. La négation de « f est une fonction paire » est « f est une fonction impaire ».
2. Lorsque la proposition $(P \ et \ Q)$ est vraie, la proposition $(P \ ou \ Q)$ l'est aussi.
3. Lorsque la proposition $(P \ ou \ Q)$ est vraie, la proposition $(P \ et \ Q)$ l'est aussi.
4. La négation de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition $P \Rightarrow non \ Q$.
5. Lorsque P est fausse et $P \Rightarrow Q$ vraie, alors Q est également fausse.
6. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$.
7. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon$.
8. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+,\ y < \sqrt{x}$.

Exercice 1.5 : Donner la négation des propositions ou affirmations suivantes.
1. S'il pleut, je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. $2 \leqslant x < y$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 1.6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des propositions suivantes.
1. La suite (u_n) est majorée par 4.
2. La suite (u_n) est majorée.
3. La suite (u_n) n'est pas majorée.
4. La suite (u_n) est bornée.
5. La suite (u_n) est croissante.
6. La suite (u_n) est constante.
7. La fonction f est la fonction nulle.
8. La fonction f s'annule.
9. La fonction f est croissante.
10. La fonction f admet un maximum.

Exercice 1.7 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Traduire par une phrase chacune des propositions suivantes.
1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$
2. $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$
3. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

4. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$
5. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

■ Modes de raisonnement

Exercice 1.8 : Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Exercice 1.9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1| = 4 - |3x-2|$.

Exercice 1.10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes

1. $|2x-5| = |x^2-4|$
2. $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$
3. $\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1$
4. $\sqrt{x-1} \geqslant x-7$

Exercice 1.11 : Raisonnements par contraposition
1. Soit a un réel. Démontrer l'implication :

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon\big) \Rightarrow a = 0.$$

2. Soit $n_1, n_2, \cdots, n_9$ des entiers naturels vérifiant $n_1 + \cdots + n_9 = 90$.
Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure à 30.

Exercice 1.12* : Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
On rappelle qu'un réel est un nombre rationnel s'il peut s'écrire $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers.

Exercice 1.13* : Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(n) + f(m).$$

Exercice 1.14* : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 1.15 :** Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

■ Récurrences

Exercice 1.16 : Sommes des carrés, des cubes —. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

1. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 1.17 : Montrer par récurrence les propriétés suivantes.
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0! + 1! + \cdots + n! \leqslant (n+1)!$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 1.18 : On considère une suite (u_n) de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Que peut-on dire de (u_n) ?

Exercice 1.19* : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2\cos x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2(\cos x)u_{n+1} - u_n.$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\cos(nx).$$

Exercice 1.20 :** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Exercice 1.21* : Suite de Fibonacci —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \qquad (*)$$

On traitera cet exercice sans déterminer le terme général de la suite (u_n).

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.

3. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$.

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$.

Exercice 1.22 :** Démontrer par récurrence les inégalités suivantes.

1. $\forall n \geqslant 2,\ 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant \left[(n+1)!\right]^{n+1}$

Exercice 1.23 :** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Indications

Ex. 1.12

Raisonnement par l'absurde !

Ex. 1.13

Raisonner par analyse-synthèse.

Ex. 1.14

On raisonnera par analyse-synthèse. Dans la partie analyse, on commencera par montrer que $f(0) = 1$.

Ex. 1.15

Raisonner par l'absurde en supposant que cet ensemble $\mathcal{P}$ *est fini et, si l'on note* $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, *considérer l'entier* $N = p_1 \times \cdots \times p_k + 1$.

Ex. 1.17

Pour la deuxième question, comment traduit-on le fait qu'un entier est divisible par un autre ?

Ex. 1.20

On pourra appliquer une récurrence forte.

Ex. 1.23

On pourra commencer par montrer que, pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Corrigé des vrai/faux

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	V	F	F	V	F	V	F	F

1. C'est évidemment faux ! Par exemple, $-3 < 2$ mais $(-3)^2 > 4$ (**méthode 1.9**).

2. Les solutions de l'équation $x^2 = 4$ sont 2 et -2. L'équivalence correcte est :

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -2).$$

3. On peut raisonner par disjonction des cas (**méthode 1.2**).
• Si n est pair, alors le produit $n(n+1)$ est pair.
• Si n est impair, alors $n+1$ est pair, et le produit $n(n+1)$ est pair.
Dans le deux cas, $n(n+1)$ est un entier pair.

4. Il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$).
La négation de « f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est « f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ».

5. Cette proposition est de la forme $(P \Rightarrow Q)$, où P est la proposition « il fait nuit » et Q la proposition « tous les chats sont gris ». D'une manière générale, la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \textit{ et non } Q)$, soit ici « la nuit, au moins un chat n'est pas gris ».

6. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa réciproque est $(Q \Rightarrow P)$, c'est-à-dire « si tous les chats sont gris, il fait nuit ».

7. C'est encore la proposition $(P \Rightarrow Q)$ de la question précédente. Sa contraposée est $(\textit{non } Q \Rightarrow \textit{non } P)$, c'est-à-dire « si un chat au moins n'est pas gris, alors il fait jour ».

8. La proposition signifie qu'on peut toujours trouver un entier supérieur à un réel fixé, c'est vrai ! Si x est un réel fixé, et N sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x), on a $N \leqslant x < N+1$ et $N+1$ est un entier supérieur à x.

9. La proposition signifie qu'il existe un entier supérieur ou égal à tous les réels, ce qui est faux ($\mathbb{R}$ est non borné). Ces deux exemples nous montrent bien l'importance de l'ordre des quantificateurs.

10. Cette inégalité est fausse pour $n = 1$ et $n = 2$. En revanche, on peut démontrer (par récurrence) qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

P	Q	$non\ P\ ou\ Q$	$P \Rightarrow Q$	$(NonP\ ou\ Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

▲

Exercice 1.2

Dans cette implication, la prémisse et la conclusion sont vraies. Conformément à la définition de l'implication, cette assertion est donc vraie. La négation de cette implication est « 5 est impair et 3 est pair. ». La contraposée de l'implication est l'implication « 3 est pair $\Rightarrow$ 5 est pair. ». ▲

Exercice 1.3

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

- **Initialisation :** La propriété $\mathcal{P}(0$ est vraie car $(1+a)^0 = 1$ et $1+0a = 1$.
- **Hérédité :** oit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &\geqslant (1+a)^n\ (1+a)\\ &\geqslant (1+na)\ (1+a)\\ &\geqslant 1+(n+1)a+na^2\\ &\geqslant 1+(n+1)a\end{aligned}$$

- **Conclusion :** Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ▲

Exercice 1.4

1. C'est faux : une fonction qui n'est pas paire n'est pas nécessairement impaire ! Par exemple, la fonction exponentielle n'est ni paire, ni impaire.

2. C'est vrai : si la proposition (P *et* Q) est vraie, P et Q sont toutes les deux vraies donc (P *ou* Q) aussi.

3. C'est faux : si P est vraie et Q fausse, alors (P *ou* Q) est vraie mais (P *et* Q) est fausse.

4. C'est faux. En effet, $P \Rightarrow Q$ est la proposition (*non* P *ou* Q), sa négation est (P *et non* Q) alors que $P \Rightarrow$ *non* Q est la proposition (*non* P *ou non* Q).

Corrigé

Lorsque P est fausse, (P *et non* Q) est fausse, mais (*non* P *ou non* Q) est vraie.

✎ *$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).*

5. C'est faux puisque, si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est automatiquement vraie (que Q soit vraie ou pas).

6. C'est vrai en prenant $a = 0$ (la proposition signifie qu'il existe un réel dont la valeur absolue est inférieure à tout réel positif).

7. C'est vrai en prenant, par exemple $a = \frac{\varepsilon}{2}$. La proposition signifie que l'on peut toujours trouver un réel dont la valeur absolue est strictement inférieure à un réel strictement positif fixé.

8. La proposition est vraie. Soit y un réel fixé. En posant $x = (|y|+1)^2 \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{x} = |y| + 1$, donc $\sqrt{x} > y$. ▲

Exercice 1.5

✎ *$P \Rightarrow Q$ est la proposition (non P ou Q).*

1. Cette phrase est de la forme $P \Rightarrow Q$, sa négation est (P *et non* Q), soit : « il pleut et je ne prends pas mon parapluie ».

2. L'affirmation comporte successivement un quantificateur universel $\forall$ (chaque été) et un quantificateur existentiel (il existe un jour durant lequel il a plu). La négation est donc « il y a eu un été en Bretagne sans aucun jour de pluie ». Cette dernière affirmation est évidemment fausse du point de vue météorologique...

3. La négation est : « il y a eu au moins un jour sans pluie l'été dernier en Bretagne ».

4. Cette double inégalité s'écrit aussi ($2 \leqslant x$ *et* $y > x$). Sa négation est : ($x < 2$ *ou* $x \geqslant y$).

✎ *non$(P \Rightarrow Q)$ est (P et non Q).*

5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$. ▲

Exercice 1.6

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 4$.

✎ *Dans* **2**, *M est* ***un*** *majorant de (u_n).*

2. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

3. On donne la négation de la proposition précédente :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$$

✎ *$C = max(|m|, |M|)$*

4. $\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$. On peut également écrire :

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant C$$

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

6. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C$

7. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

8. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

9. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R},\ x \geqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$.

✎ *f admet son maximum en a*

10. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a)$ ▲

Exercice 1.7

1. La fonction f ne s'annule pas sur I.

2. La fonction f prend au moins deux valeurs différentes sur I. Autrement dit, f n'est pas constante sur I.
3. Si la fonction f s'annule, alors c'est forcément en 0. Autrement dit, f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais elle ne s'y annule pas nécessairement).
4. La fonction f prend toutes les valeurs réelles.
5. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur. ▲

On dit que f est surjective pour **4**, *injective pour* **5** *(voir le chapitre* **applications***)*

Exercice 1.8

Nous allons montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
Pour cela, raisonnons par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Méthode 1.2

►**Premier cas :** $x \geqslant 1$. Dans ce cas, $|x-1| = x-1$ et :

$$x^2-x+1-|x-1| = x^2-x+1-(x-1) = x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1,$$

quantité positive. Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
►**Deuxième cas :** $x < 1$. On a alors $|x-1| = -(x-1)$, d'où :

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geqslant 0,$$

ce qui montre que, pour $x > 1$, $x^2 - x + 1 - |x-1| \geqslant 0$.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$. ▲

Exercice 1.9

On a $|x+1| = x+1$ *ssi* $x+1 \geqslant 0$ et $|3x-2| = 3x-2$ *ssi* $3x-2 \geqslant 0$. Partant de ces remarques, on raisonne par disjonction de cas, en considérant trois cas.
►**Premier cas :** $x \geqslant \frac{2}{3}$. On a alors $|x+1| = x+1$ et $|3x-2| = 3x-2$. L'équation équivaut à $x+1 = 4-(3x-2)$, soit $x = \frac{5}{4}$. Comme $\frac{5}{4} \geqslant \frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ est solution.
►**Deuxième cas :** $x \leqslant -1$. Dans ce cas, $|x+1| = -x-1$ et $|3x-2| = 2-3x$. L'équation équivaut à $-x-1 = 4+3x-2$, soit $x = -\frac{3}{4}$ qui ne convient pas puisque $-\frac{3}{4} > -1$.
►**Troisième cas :** $x \in]-1, \frac{2}{3}[$. Dans ce dernier cas, $|x+1| = x+1$, $|3x-2| = 2-3x$ et l'équation équivaut à $x+1 = 4+3x-2$, soit $x = -\frac{1}{2}$. Comme $-\frac{1}{2} \in]-1, \frac{2}{3}[$, $-\frac{1}{2}$ est effectivement solution.
Finalement, l'équation a deux solutions : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$. ▲

Exercice 1.10

On résout ces équations ou inéquations par équivalences, en s'assurant, à chaque étape du raisonnement, que l'on conserve bien une équivalence.

1. La valeur absolue d'un nombre est égale à C ($C \in \mathbb{R}^+$) si et seulement si ce nombre est égal à C ou à $-C$. Par conséquent,

Lorsque $C \geqslant 0$, $|X| = C \Leftrightarrow X = \pm C$.

$$\begin{aligned} |2x-5| = |x^2-4| &\Leftrightarrow 2x-5 = x^2-4 \text{ ou } 2x-5 = -(x^2-4) \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-9 = 0 \end{aligned}$$

L'unique solution de la première équation est 1, les solutions de la deuxième équation sont $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$. Les solutions de l'équation sont donc 1, $-1+\sqrt{10}$ et $-1-\sqrt{10}$.

2. Les nombres $\sqrt{|x-3|}$ et $|x-1|$ étant tous les deux positifs, on a :

Corrigé

✎ *Lorsque A et B sont de même signe, $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$*

$$\begin{aligned}\sqrt{|x-3|} = |x-1| &\Leftrightarrow |x-3| = (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x-3 = (x-1)^2 \text{ ou } x-3 = -(x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x-3 = x^2-2x+1 \text{ ou } x-3 = -x^2+2x-1\\ &\Leftrightarrow x^2-3x+4 = 0 \text{ ou } x^2-x-2 = 0\end{aligned}$$

✎ *$\Delta < 0$ pour le premier trinôme.*

Le premier trinôme n'a pas de racine réelle et les racines du second sont -1 et 2. Par conséquent, les solutions de l'équation sont -1 et 2.

✎ *Attention à ne pas élever au carré sans la précaution $x \geqslant 1$.*

3. Si $x < 1$, l'équation n'a clairement pas de solution (car alors $\sqrt{|x-3|} \geqslant 0$ et $x - 1 < 0$). Lorsque $x \geqslant 1$, $\sqrt{|x-3|}$ et $x - 1$ sont positifs. Ainsi,

✎ *Lorsque A et B sont positifs, $A \leqslant B \Leftrightarrow A^2 \leqslant B^2$*

$$\begin{aligned}\sqrt{|x-3|} \leqslant x-1 &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } |x-3| \leqslant (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -(x-1)^2 \leqslant x-3 \leqslant (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } -x^2+2x-1 \leqslant x-3 \leqslant x^2-2x+1\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ et } x^2-x-2 \geqslant 0 \text{ et } x^2-3x+4 \geqslant 0\end{aligned}$$

Le premier trinôme a pour racines -1 et 2 donc $x^2 - x - 2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$. Par ailleurs, le discriminant du second trinôme étant strictement négatif, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 > 0$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[2, +\infty[$.

✎ *Ne pas oublier que $x \geqslant 1$.*

✎ *$\sqrt{a}$ existe ssi $a \geqslant 0$*

4. L'inéquation est définie pour $x \geqslant 1$. Par ailleurs, tout réel $x \in [1, 7]$ est solution de l'inéquation (si $x \in [1, 7]$, le membre de gauche de l'inégalité est positif, celui de droite est négatif). Enfin, pour $x \geqslant 7$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et on obtient une inéquation équivalente en élevant au carré :

✎ *Pour $A, B \geqslant 0$, $A \geqslant B \Leftrightarrow A^2 \geqslant B^2$*

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} \geqslant x-7 \text{ et } x \geqslant 7 &\Leftrightarrow x-1 \geqslant (x-7)^2 \text{ et } x \geqslant 7\\ &\Leftrightarrow x-1 \geqslant x^2-14x+49 \text{ et } x \geqslant 7\\ &\Leftrightarrow x^2-15x+50 \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 7.\end{aligned}$$

Les solutions de $x^2 - 15x + 50 = 0$ étant 5 et 10, on a $x^2 - 15x + 50 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [5, 10]$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[1, 10]$. ▲

Exercice 1.11

1. Raisonnons par contraposition en prouvant l'implication :

$$a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ |a| \geqslant \varepsilon.$$

✎ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Soit $a \neq 0$. En cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant \varepsilon$. Le réel $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ convient : en effet, $|a| \geqslant \frac{|a|}{2}$ et $\frac{|a|}{2} > 0$ puisque $a \neq 0$. On a donc établi (par contraposition) l'implication attendue.

2. Quitte à réordonner $n_1, n_2, \cdots, n_9$, on peut supposer que $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$.

✎ *$n_7 + n_8 + n_9$ est la plus grande somme formée à partir des 9 entiers*

Nous allons raisonner par contraposition en montrant que :

$$n_7 + n_8 + n_9 < 30 \Rightarrow n_1 + \cdots + n_9 \neq 90.$$

Supposons que $n_7 + n_8 + n_9 < 30$. Comme $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_9$, on a :

$$n_1 + n_2 + n_3 \leqslant n_4 + n_5 + n_6 \leqslant n_7 + n_8 + n_9 < 30.$$

Par conséquent, $n_1 + \cdots + n_9 < 3 \times 30$, d'où $n_1 + \cdots + n_9 \neq 90$. D'où le résultat par contraposition. ▲

Exercice 1.12

✎ **Méthode 1.3**

On raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel : il existe des entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On suppose (quitte à la simplifier) que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. Comme $q\sqrt{2} = p$, on a $2q^2 = p^2$, ce qui montre que p^2 est pair, donc p l'est aussi. On peut donc écrire $p = 2p'$, où $p' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2$, d'où $q^2 = 2p'^2$. Cela montre que q^2 est pair, donc q aussi : $q = 2q'$, avec $q' \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible puisque $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$. Contradiction ! ▲

✎ *Voir l'exemple de la* **méthode 1.5**

Exercice 1.13

Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = f(m) + f(n).$$

On a alors $f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$, puis, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1),$$

ce qui montre que f est une fonction de la forme $n \mapsto \lambda n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Supposons maintenant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \lambda n$. Alors :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ f(m+n) = \lambda(m+n) = \lambda m + \lambda n = f(m) + f(n),$$

donc f vérifie la condition indiquée.

Conclusion. Les fonctions f solutions du problème sont les fonctions de la forme $n \mapsto \lambda n$, où λ est un réel. ▲

Exercice 1.14

On raisonne de nouveau par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y. \qquad (*)$$

En prenant $x = y = 0$ dans cette relation, on obtient $f(0)^2 = f(0)$, soit $f(0)(f(0) - 1) = 0$. On a donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Mais si $f(0) = 0$, alors, en prenant $x = 0$ et $y = 1$, la relation $(*)$ donne $0 = 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $f(0) = 1$. On en déduit que :

✎ *Relation $(*)$ appliquée à $y = 0$ et x quelconque.*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1.$$

Synthèse. On suppose maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + 1 + x + y = f(xy) + x + y,$$

Corrigé

ce qui montre que f vérifie la relation $(*)$.
Conclusion. L'unique fonction vérifiant la relation $(*)$ est $f : x \mapsto x + 1$. ▲

Exercice 1.15

Preuve par contraposition.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini k de nombres premiers. En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on peut donc écrire $\mathcal{P} = \{p_1, \cdots, p_k\}$, où $p_1, \cdots, p_k$ sont des nombres premiers. On introduit alors l'entier naturel $N = p_1 \cdots p_k + 1$. Montrons que N n'est divisible par aucun des p_i ($i \in [\![1, k]\!]$). S'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que p_i divise N, alors on peut écrire $N = q \times p_i$, avec $q \in \mathbb{N}$. On a alors $q \times p_i = p_1 \cdots p_k + 1$, soit :

$$p_i \times \underbrace{(q - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k)}_{s} = 1.$$

Ainsi, p_i et s sont deux entiers dont le produit vaut un : chacun des deux est donc égal à 1 ou à -1. En particulier, p_i vaut 1 ou -1, il n'est donc pas premier. Finalement, on a montré (par contraposition) que N n'est divisible par aucun des p_i. On en déduit que N est un nombre premier. Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $N > p_i$. On a donc trouvé un nombre premier qui n'est égal à aucun des p_i. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{P}$ a au moins $k + 1$ éléments, ce qui est contradictoire ! En définitive, l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini. ▲

Exercice 1.16

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times2\times3}{6}$.
• **Hérédité :** On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Alors :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right] \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6). \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $2n^2 + 7n + 6$ étant -2 et $-\frac{3}{2}$, on en déduit que :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \times 2(n+2)(n+\frac{3}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note cette fois $\mathcal{P}(n)$: « $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = \frac{1\times4}{4}$.
• **Hérédité :** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On retrouvera les deux sommes de cet exercice dans le chapitre **Calcul algébrique**.

Alors :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ▲

Exercice 1.17

Dans les deux cas, on applique une récurrence simple.
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0! + 1! + \cdots + n! \leqslant (n+1)!$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $0! = 1$ et $(0+1)! = 1! = 1$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$: $0!+1!+\cdots+n! \leqslant (n+1)!$. Alors :

$$\underbrace{0! + 1! + \cdots + n!}_{\leqslant (n+1)! \text{ d'après } \mathcal{P}(n)} + (n+1)! \leqslant (n+1)! + (n+1)!.$$

Or $2(n+1)! \leqslant (n+2)!$ puisque $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

✎ $2 \leqslant n+2$

• **Conclusion :** On a démontré l'inégalité attendue par récurrence sur n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « 9 divise $10^n - 1$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est divisible par 9.

✎ *0 est divisible par tout entier non nul !*

• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que 9 divise $10^n - 1$, ce qui équivaut à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n - 1 = 9k$. Alors :

✎ *a divise b ssi il existe $c \in \mathbb{Z}$, $b = ac$.*

$$10^{n+1} - 1 = 10 \times 10^n - 1 = 10(9k+1) - 1 = 9 \times 10k + 9 = 9(10k+1),$$

ou encore $10^{n+1} - 1 = 9k'$, avec $k' = 10k + 1$. Cela signifie que 9 divise $10^{n+1} - 1$: c'est $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$. ▲

Exercice 1.18

On effectue une récurrence double en notant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \ \text{«}u_n = u_0 + nr\text{»}.$$

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 = u_0 + 0 \times r$ et $u_1 = u_0 + u_1 - u_0 = u_0 + r$.
• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire :

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_0 + (n+1)r.$$

Comme $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$, on a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - u_n = 2[u_0 + (n+1)r] - (u_0 + nr) \\ &= u_0 + [2(n+1) - n]r = u_0 + (n+2)r, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
• **Conclusion :** Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est ainsi vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On déduit de l'égalité démontrée que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $r = u_1 - u_0$. ▲

Corrigé

Exercice 1.19

On effectue une récurrence double en notant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \ \ll u_n = 2\cos(nx) \gg.$$

•**Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 = 2 = 2\cos 0$ et $u_1 = 2\cos x$.

• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies :

$$u_n = 2\cos(nx) \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2\cos[(n+1)x].$$

✎ *Hypothèse de récurrence au rang n et $n+1$, formules d'addition et formules de duplication.*

On en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2(\cos x)u_{n+1} - u_n = 2(\cos x)2\cos[(n+1)x] - 2\cos nx \\ &= 4\cos x(\cos nx\ \cos x - \sin nx\ \sin x) - 2\cos nx \\ &= 2\cos nx(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x\ \sin x\ \sin nx \\ &= 2\cos 2x\cos nx - 2\sin 2x\sin nx = 2(\cos 2x\cos nx - \sin 2x\sin nx) \\ &= 2\cos[(n+2)x], \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• **Conclusion :** Par récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.20

On applique une récurrence forte. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$ ».

• **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $1 = 2^0(0+1)$ ($p = q = 0$ conviennent).

✎ *Tout $k \in [\![1, n]\!]$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$.*

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \cdots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. On veut montrer que $n+1$ peut s'écrire sous la forme $2^p(2q+1)$, où $p, q \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas :

- si $n+1$ est impair, n est pair et le résultat est évident. En effet, il suffit de prendre $p = 0$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$. On a alors $n+1 = 2q+1$.
- si $n+1$ est pair, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n+1 = 2k$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à k : il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^p(2q+1)$. Ainsi, $n+1 = 2k = 2 \times 2^p(2q+1) = 2^{p+1}(2q+1)$.

Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion :** Le résultat attendu est établi par récurrence forte. ▲

Exercice 1.21

1. Montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

✎ *Récurrence double : on suppose le résultat vrai aux rangs n **et** $n+1$, on le démontre au rang $n+2$.*

• **Initialisation :** L'inégalité est vraie aux rangs 0 et 1 puisque $u_0 = 1 \geqslant 0$ et $u_1 = 1 \geqslant 1$.

•**Hérédité :** On suppose que l'inégalité est vraie aux rangs n et $n+1$: $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$. D'après la relation $(*)$, on a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geqslant n+1+n$. Si $n = 0$, alors $u_2 = 2 \geqslant 2$ et si $n \geqslant 1$, alors $n + n + 1 \geqslant n + 2$. Cela montre que l'inégalité est vraie au rang $n+2$.

• **Conclusion :** Par récurrence double, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ *Théorème de comparaison*

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On démontre cette fois l'égalité à l'aide d'une récurrence simple.

•**Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 1 puisque $u_1^2 - u_0u_2 = 1^2 - 1 \times 2 = -1 = (-1)^1$.

• **Hérédité :** On suppose que $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après la relation $(*)$, on a :

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1},$$

c'est-à-dire, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - [u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^n] - u_n u_{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}(u_n + u_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

car $u_{n-1}+u_n = u_{n+1}$ d'après $(*)$. Ainsi, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^{n+1}$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On effectue de nouveau une récurrence simple.
•**Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 1 car $u_1 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$.
• **Hérédité :** On suppose que l'égalité est vraie au rang $n \geqslant 1$. On a alors :

$$u_1 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n+1} = (u_1 + \cdots + u_{2n-1}) + u_{2n+1} = u_{2n} - 1 + u_{2n+1}.$$

Or, $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$ d'après la relation $(*)$; d'où :

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} = u_{2n+2} - 1,$$

ce qui démontre l'égalité au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété est établie pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. Encore une récurrence simple !
• **Initialisation :** L'égalité est vraie au rang 0 puisque $u_0 = 1 = 2 - 1 = u_2 - 1$.
• **Hérédité :** On suppose que l'égalité est vérifiée au rang n, alors :

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1} &= (u_0 + \cdots + u_n) + u_{n+1} = u_{n+2} - 1 + u_{n+1} \\ &= u_{n+3} - 1, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de $(*)$. Ainsi, l'égalité est vraie au rang $n+1$.
• **Conclusion :** Par récurrence simple, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.22

Dans les deux cas, on applique une récurrence simple.
1. Pour $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$ ».
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$, $\frac{3\times 2}{2\times 2+1} = \frac{6}{5}$ et $\frac{5}{4} > \frac{6}{5}$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geqslant 2$ fixé, c'est-à-dire que $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.
On a alors

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Il reste à montrer que $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$.
Or, en notant $\Delta = \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{3n(n+1)^2(2n+3) + (2n+1)(2n+3) - 3(2n+1)(n+1)^3}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \\ &= \frac{n^2+2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n) : \ll 1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant \big[(n+1)!\big]^{n+1} \gg$.
• **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée puisque $1! = 1$, $(1!)^1 = 1$ et $1 \geqslant 1$.
• **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \geqslant \big[(n+1)!\big]^{n+1}.$$

Alors :

$$1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \times (2(n+1)+1)! = 1! \times \cdots \times (2n+1)! \times (2n+3)!$$

et, d'après $\mathcal{P}(n)$,

$$1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)! \times (2n+3)! \geqslant \big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)!$$

✎ *Ici, étudier le signe de la différence n'est pas facile...*

Il reste à montrer que $\big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)! \geqslant \big[(n+2)!\big]^{n+2}$. Pour comparer ces deux nombres (positifs), il est plus simple, cette fois, d'étudier leur quotient. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)!}{\big[(n+2)!\big]^{n+2}} &= \frac{\big[(n+1)!\big]^{n+1}(2n+3)!}{(n+2)^{n+2}\big[(n+1)!\big]^{n+2}} = \frac{(2n+3)!}{(n+2)^{n+2}(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)\cdots(n+2)(n+1)!}{(n+2)^{n+2}(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)\cdots(n+2)}{(n+2)(n+2)\cdots(n+2)}.\end{aligned}$$

Cette quantité est supérieure à 1 (c'est un produit de $n+2$ facteurs supérieurs à 1), ce qui démontre $\mathcal{P}(n+1)$.
• **Conclusion :** Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ▲

Exercice 1.23

Tout d'abord, l'inégalité arithmético-géométrique donnée en indication résulte du fait que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

On montre ensuite l'inégalité attendue en appliquant une récurrence simple.
• **Initialisation :** Si $n = 1$, $x_1 \times \frac{1}{x_1} = 1$ et l'inégalité est vraie au rang 1.

• **Hérédité :** On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et tous réels $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$(x_1 + x_2 + \cdots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Considérons maintenant des réels $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ strictement positifs. En notant $A = x_1 + x_2 + \cdots x_n$ et $B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$, on souhaite montrer que :

$$(A + x_{n+1})\left(B + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geqslant (n+1)^2. \tag{1.1}$$

Or,

$$(A + x_{n+1})\left(B + \frac{1}{x_{n+1}}\right) = AB + \frac{A}{x_{n+1}} + Bx_{n+1} + 1,$$

et, d'après l'hypothèse de récurrence et l'inégalité arithmético-géométrique, on a $AB \geqslant n^2$ et

✎ $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, *avec* $a = \frac{A}{x_{n+1}}$, $b = Bx_{n+1}$

$$\frac{A}{x_{n+1}} + Bx_{n+1} \geqslant 2\sqrt{\frac{A}{x_{n+1}} \times Bx_{n+1}} \geqslant 2\sqrt{AB} \geqslant 2n.$$

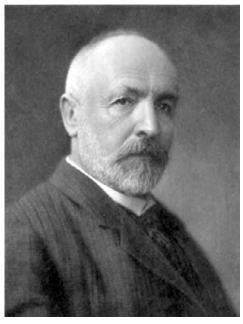
Ainsi, $(A + x_{n+1})\left(B + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \geqslant n^2 + 2n + 1$, ce qui démontre l'inégalité (1.1).
• **Conclusion :** Finalement, on a établi l'inégalité souhaitée par récurrence simple. ▲

Corrigé

Chapitre 2

Ensembles et applications

UN MATHÉMATICIEN



« *L'essence même des mathématiques, c'est la liberté* » disait **Georg Cantor**, mathématicien allemand né à Saint Pétersbourg, connu pour avoir été le père de la théorie des ensembles. C'est dans les années 1870 qu'il fonde cette théorie en lien avec son compatriote Richard Dedekind et qu'il définit la notion de cardinal pour les ensembles infinis. Ses théories révolutionnaires furent mal accueillies par certains mais sont désormais acceptées par tous.

Un peu d'histoire

La théorie des ensembles est un cadre dans lequel s'inscrivent toutes les branches des mathématiques. Au tout début des années 1870, Georg Cantor s'intéresse aux points où certaines fonctions ont des comportements atypiques. Cela l'amène à étendre la notion de cardinal (nombre d'éléments) à des ensembles infinis. Il montre que des ensembles infinis peuvent avoir le même cardinal, comme une droite et un plan, mais qu'aussi, il existe différents cardinaux infinis.

Le mathématicien Giuseppe Peano rédige en 1895 un formulaire mathématique qui popularise cette théorie dans lequel il introduit plusieurs symboles que nous utilisons encore.

Le logicien anglais Bertrand Russell énonce un paradoxe qui montre que l'on ne peut nommer ensemble n'importe quoi. Pour pallier ce problème, Ernst Zermelo définit des axiomes sur lesquels doit s'appuyer la théorie des ensembles.

Objectifs

les incontournables

- Savoir démontrer l'égalité de deux ensembles.
- Savoir montrer qu'une application est (ou n'est pas) injective, surjective, bijective.
- Déterminer l'application réciproque d'une application bijective.
- Déterminer l'image directe ou réciproque d'une partie.

et plus si affinités

- Manipuler ces différentes notions dans des exercices théoriques.
- Déterminer l'application réciproque d'une bijection.

Résumé de cours

Ensembles

Appartenance, inclusion

Définition : *Soit E un ensemble. On dit que x* ***est un élément*** *de E lorsque x appartient à E. On note alors $x \in E$. Lorsque x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.*

Définition : *On appelle* ***ensemble vide*** *l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.*

Définition : *Soit A et B deux ensembles. On dit que*

- *A* ***est inclus dans*** *B lorsque tout élément de A est un élément de B. On note alors $A \subset B$.*
- *A* ***et*** *B* ***sont égaux*** *lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$. On note $A = B$.*

Définition : *Lorsque $A \subset E$, on dit que A est un* ***sous-ensemble*** *(ou une partie) de E.*

Notation : *Si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.*

Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition : *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On appelle*

- ***réunion*** *de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$;*
- ***intersection*** *de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$;*
- ***complémentaire*** *de A dans E l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$;*
- ***différence*** *de A et B l'ensemble $A \setminus B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.*

Notation : *Le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E se note aussi $\complement_E^A$, A^c ou $E \setminus A$.*

Proposition 2.1.— Distributivité —. Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.

- L'intersection est distributive par rapport à la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive par rapport à l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition 2.2.— Lois de Morgan —. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Alors :

$$\bullet\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \bullet\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Définition : Produit cartésien de deux ensembles —. *Soit E et F deux ensembles. On appelle* ***produit cartésien*** *de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y), avec $x \in E$ et $y \in F$:*

$$E \times F = \{(x, y)\ ;\ x \in E,\ y \in F\}.$$

Définition : Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles —. *Soit $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles. On appelle p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ la donnée de $x_1 \in E_1, \cdots, x_p \in E_p$ dans cet ordre. L'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, \ldots, x_p \in E_p$ est appelé* ***produit cartésien*** *de $E_1, \ldots, E_p$. On le note $E_1 \times \cdots \times E_p$.*

Notation : *Lorsque $E_1 = \cdots = E_p = E$ on note E^p le produit cartésien de E par lui-même p fois.*

■ Ensemble des entiers naturels

Relation de divisibilité

Définition : *Soit a et b deux entiers naturels. On dit que a est un* ***multiple*** *de b ou que b est un* ***diviseur*** *de a s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$. On note alors $b \mid a$.*

Théorème 2.3.— Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ —. Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$.

Il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$, **unique** tel que :
- $a = bq + r$
- $0 \leqslant r < b$

Proposition 2.4.— Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, alors :

b divise a *si et seulement si* le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

PGCD, PPCM de deux entiers

Définition : *Soit $a, b \in \mathbb{N}$ deux entiers.*

- *Si a ou b est non nul, le plus grand entier, diviseur de a et de b est appelé* ***plus grand diviseur commun*** *à a et b. Cet entier naturel est noté $PGCD(a, b)$.*
- *Si a et b sont non nuls, le plus petit entier strictement positif, multiple de a et de b est appelé* ***plus petit multiple commun*** *à a et b. Cet entier naturel est noté $PGCD(a, b)$.*

En pratique : $PGCD(a, b)$ peut être calculé au moyen de l'algorithme d'Euclide (**méthode 2.3**).

Nombres premiers

Définition : *On appelle* ***nombre premier*** *tout entier naturel $p \geqslant 2$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p lui-même.*

Proposition 2.5.—
- Tout entier $n \geqslant 2$ possède au moins un diviseur premier.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 2.6.— Décomposition d'un entier en produit de nombres premiers —. Tout entier $n \geqslant 2$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_N^{\alpha_N}$$

où $p_1, \ldots, p_N$ sont premiers ($p_1 < \cdots < p_N$) et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ des entiers naturels non nuls.

■ Applications

Généralités

Définition : *Une **application** –ou une fonction– $f : E \to F$ est un procédé qui à tout élément x de E, associe un unique élément y de F. Cet élément s'appelle l'**image de** x **par** f. On le note $f(x)$. L'application f elle-même est notée :* $\begin{array}{rccc} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Notation : *L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.*

Vocabulaire : *Soit f une application de E dans F et $y \in F$. Lorsqu'il existe un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f.*

Définition : *Soit E un ensemble et I un ensemble fini. On appelle **famille d'éléments** de E indexée par I toute application de I dans E. On note $(x_i)_{i\in I}$ une telle famille.*

Définition : *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A et on note $\mathbf{1}_A$ la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par :*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Définition : *Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle **composée** de f par g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par* $\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \to & G \\ & x & \mapsto & g\left(f(x)\right) \end{array}$.

Définition : *Soit E un ensemble. On appelle **application identité** de E (ou **application identique** sur E) et on note id_E l'application de E dans E définie par* $\begin{array}{rccc} id_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$.

Proposition 2.7.— Pour toutes applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ on a

$$f \circ id_E = f \text{ et } \quad id_E \circ g = g$$

Définition : *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de E. On appelle **restriction** de f à A et on note $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par*

$$\begin{array}{rccc} f_{|A} : & A & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Définition : *Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et G un ensemble contenant E. On appelle **prolongement** de f à G toute application g de G dans F telle que, pour tout $x \in E$, $g(x) = f(x)$.*

Images directe et réciproque d'une partie

Définition : *Soit E, F des ensembles, $f : E \to F$ et $A \subset E$ et $B \subset F$.*

- *L'**image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par :*
$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F,\ \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$
- *L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par :*
$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

Retenez que : $\forall y \in F,\ y \in f(A) \iff \exists x \in A,\ y = f(x)$ et $\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

■ Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition : Application injective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***injective*** *(ou que f est une* ***injection****) lorsque tout élément de F possède* ***au plus*** *un antécédent par f ; c'est-à-dire lorsque :*

$$\forall (x, x') \in E \times E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Remarque : de manière équivalente, une application $f : E \to F$ est injective lorsque $\forall (x, x') \in E \times E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Théorème 2.8.— La composée de deux applications injectives est injective.

Définition : Application surjective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***surjective*** *(ou que f est une* ***surjection****) lorsque tout élément de F possède* ***au moins*** *un antécédent par f ; c'est-à-dire lorsque :*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Théorème 2.9.— La composée de deux applications surjectives est surjective.

Définition : Application bijective —. *Soit f une application de E dans F. On dit que f est* ***bijective*** *(ou que f est une* ***bijection****) lorsque f est à la fois injective et surjective. Autrement dit, f est bijective lorsque tout élément de F possède* ***un unique*** *antécédent par f.*

Remarque : dire qu'une application f de E dans F est bijective équivaut à dire que, pour tout $b \in F$, l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution dans E.

Définition : Application réciproque d'une bijection —. *Soit f une bijection de E dans F. On appelle* ***application réciproque*** *(ou* ***bijection réciproque****) de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui, à tout élément y de F, associe son unique antécédent par f. Par définition, on a :*

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Proposition 2.10.— Soit f une bijection de E dans F et $f^{-1} : F \to E$ son application réciproque. Alors :

$$f \circ f^{-1} = id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = id_E.$$

Théorème 2.11.— Caractérisation de la bijection réciproque —. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ vérifiant $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$. Dans ce cas, g est l'application réciproque de f : $g = f^{-1}$.

Théorème 2.12.— Composée de deux bijections —. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Méthodes

Ensembles

❑ Méthode 2.1.— Comment montrer l'égalité de deux ensembles

Pour établir l'égalité de deux ensembles A et B, on peut :

- Procéder par double inclusion en prouvant que $A \subset B$ et $B \subset A$. Pour montrer que $A \subset B$, on prend un élément quelconque de A et on montre qu'il appartient aussi à B ;
- Montrer directement l'égalité en utilisant des opérations usuelles sur les ensembles (réunion, intersection, distributivité, lois de Morgan...).

Exemple : soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

On va appliquer chacune des deux méthodes présentées ci-dessus.

- **Première méthode : double inclusion**
  – Montrons que $B \subset C$. Soit x un élément de B. On veut montrer que $x \in C$. Comme $x \in A \cup B$ (car $A \subset A \cup B$), x appartient à $A \cup C$ d'après la première hypothèse ; c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, on a le résultat attendu. Si $x \in A$, alors x appartient à $A \cap B$, donc à $A \cap C$ d'après la deuxième hypothèse, et cela montre que $x \in C$. Dans les deux cas, x appartient à C. Ainsi, $B \subset C$.
  – Étant donné la symétrie des hypothèses sur B et C, le même raisonnement montre que $C \subset B$.
  Comme $B \subset C$ et $C \subset B$, les ensembles B et C sont égaux.
- **Deuxième méthode : utilisation d'opérations sur les ensembles**
  Tout d'abord, $B = B \cup (A \cap B)$. D'après la deuxième hypothèse, on a alors $B = B \cup (A \cap C)$. Par distributivité, cette relation s'écrit aussi :

$$B = B \cup (A \cap C) = (B \cup A) \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C),$$

  ou encore $B = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ d'après la première hypothèse. En utilisant de nouveau la distributivité, cette dernière égalité s'écrit :

$$B = C \cup (A \cap B),$$

  c'est-à-dire $B = C$ puisque $C = C \cup (A \cap C)$.

Mise en œuvre : exercice 2.4, **exercice 2.6**.

■ Divisibilité dans $\mathbb{N}$

❑ Méthode 2.2.— Comment montrer qu'un entier est divisible par un autre

Pour montrer que a divise b, on peut :

- Revenir à la définition. On démontre qu'il existe un entier c tel que $b = ac$.
- Utiliser la division euclidienne de b par a. Il suffit de démontrer que le reste de la division euclidienne de b par a est nul.
- Utiliser la décomposition de a et b en produit de facteurs premiers. Il s'agit de montrer que tous les facteurs premiers de a apparaissent aussi dans la décomposition de b, avec une puissance supérieure.

Calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide se fonde sur le fait suivant :

Lemme 2.13.— Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$. Notons r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$$

Remarque : si r est nul, on obtient alors $PGCD(a, b) = PGCD(b, r) = PGCD(b, 0) = b$.

Principe de l'algorithme d'Euclide

On souhaite calculer $d = PGCD(a, b)$. Notons $a_0 = \max\{a, b\}$ et $a_1 = \min\{a, b\}$, de sorte que $d = PGCD(a_0, a_1)$.

- **Étape 1**. Deux cas se présentent :
  - Si $a_1 = 0$, alors $d = PGCD(a_0, a_1) = a_0$.
  - Si $a_1 \neq 0$, effectuons la division euclidienne de a_0 par a_1 : $a_0 = q_1 a_1 + a_2$, où $0 \leqslant a_2 < a_1$. D'après le lemme précédent, $d = PGCD(a_1, a_2)$.
- **Étape 2**. Deux cas se présentent :
  - Si $a_2 = 0$, alors $d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = a_1$.
  - Si $a_2 \neq 0$, effectuons la division euclidienne de a_1 par a_2 : $a_1 = q_2 a_2 + a_3$, où $0 \leqslant a_3 < a_2$. D'après le lemme, $d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = PGCD(a_2, a_3)$.
- **Étape 3**. Ainsi de suite ...

Comme $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ sont des entiers naturels et $a_0 \geqslant a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que a_{m+1} soit nul. Si tel est le cas,

$$d = PGCD(a_0, a_1) = PGCD(a_1, a_2) = \cdots = PGCD(a_m, a_{m+1}) = PGCD(a_m, 0) = a_m$$

Résumons :

❑ Méthode 2.3.— Algorithme d'Euclide

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$, on calcule $d = PGCD(a, b)$. Pour cela :

- On pose $a_0 = \max\{a, b\}$ et $a_1 = \min\{a, b\}$;
- On effectue des divisions euclidiennes successives jusqu'à l'obtention d'un reste nul :

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ a_{k-1} = a_k\, q_k + a_{k+1} \text{ avec } a_0 \geqslant a_1 > a_2 > \cdots > a_m > a_{m+1} = 0$$

- $d = a_m$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Exemple : calculons le PGCD de 162 et 207.

$$\begin{aligned} 207 &= 1\times 162+45 \\ 162 &= 3\times 45+27 \\ 45 &= 1\times 27+18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 27 &= 1\times 18+\boxed{9} \\ 18 &= 2\times 9+0 \end{aligned}$$

D'où $PGCD(207,162)=9$.

■ Applications injectives, surjectives, bijectives

Applications injectives

❑ Méthode 2.4.— Comment montrer qu'une application est injective

Pour prouver qu'une application $f : E \to F$ est injective, on peut :

- considérer deux éléments de E qui ont la même image par f et montrer qu'ils sont égaux. On écrit : « soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x)=f(x')$ » et on montre que $x=x'$. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée ;
- montrer que, pour tout $b\in F$, l'équation $f(x)=b$ a **au plus** une solution dans E. On écrit : « soit $b\in F$ » et on mène la résolution de l'équation jusqu'à vérifier que celle-ci n'a pas plus d'une solution ;
- dans certains cas, considérer deux éléments distincts de E et montrer qu'ils n'ont pas la même image par f.

Exemple : l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$ est injective.

En effet, soit n et n' deux entiers naturels tels que $f(n)=f(n')$. On a alors $2n=2n'$, d'où $n=n'$. Cela montre que f est injective.

Exemple : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$, strictement monotone. Alors f est injective. Pour le démontrer, nous utilisons cette fois le troisième point de la **méthode 2.4**. Soit x et x' deux éléments distincts de I. On a, par exemple, $x<x'$. Comme f est strictement monotone, on a nécessairement $f(x)\neq f(x')$ ($f(x)<f(x')$ si f est strictement croissante et $f(x)>f(x')$ si f est strictement décroissante). La fonction f est donc injective.

❑ Méthode 2.5.— Comment montrer qu'une application n'est pas injective

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

Exemple : l'application $g : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $g(n)=\left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$ n'est pas injective.

En effet, on a (par exemple) $g(2)=1$ et $g(3)=1$. La fonction g n'est pas injective puisque 2 et 3 ont la même image par g. Plus généralement, tout entier pair a la même image par g que l'entier impair qui le suit.