

COURS DE PHYSIQUE

Mécanique du point

Alain Gibaud

Professeur à l'université du Maine (Le Mans)

Michel Henry

Agrégé de physique
Maître de conférences à l'IUFM des Pays de Loire (Le Mans)

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : Virtua73 © fotolia.com

© Dunod, Paris, 1999, 2007, 2019 pour la nouvelle présentation
ISBN 978-2-10-080017-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

AVANT-PROPOS

Le cours présenté dans ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants de première année à l'université du Maine. Il s'agit d'un cours d'introduction à la mécanique du point et des systèmes de points matériels. Notre souci au cours de la rédaction de cet ouvrage a été de nous référer aux connaissances acquises par les étudiants dans les classes du secondaire afin d'assurer une transition la plus continue possible.

La principale difficulté que nous avons rencontrée lors de ce cours a été certainement d'ordre mathématique. La mécanique est une science qui exige de la rigueur et les concepts acquis lors de l'apprentissage dans le secondaire sont ici repris de façon plus formelle et rigoureuse. Nous présentons donc, en annexe 1, les outils mathématiques qui nous semblent nécessaires à la bonne compréhension du cours de physique.

Le premier et le second chapitres sont consacrés à la cinématique du point ainsi qu'aux changements de référentiels. Nous insistons plus particulièrement sur la définition du référentiel ; cette définition conditionne bien souvent la façon de traiter un problème et reste, bien des fois, mal comprise.

Nous présentons ensuite les lois fondamentales de la mécanique en décrivant les forces les plus classiques susceptibles d'intervenir dans les problèmes de mécanique. Nous introduisons alors les concepts d'énergie et de puissance avant de présenter les oscillateurs libres et forcés.

La partie suivante montre que pour traiter un problème de mécanique dans un référentiel non galiléen il est nécessaire d'introduire des pseudos forces appelées forces d'inertie. L'étude du poids d'un corps sur Terre met en évidence le fait que le référentiel terrestre n'est pas galiléen. L'étude du phénomène des marées conduit à la même conclusion pour le référentiel géocentrique.

Les deux derniers chapitres sont consacrés au problème à deux corps. L'accent est mis sur la notion de référentiel barycentrique. L'étude de la trajectoire d'un système à deux corps permet de retrouver les lois de Kepler auxquelles obéissent les planètes du système solaire. Une présentation de la mécanique céleste se trouve à la fin du livre en annexe 2.

Cet ouvrage s'adresse bien sûr aux étudiants du premier cycle universitaire mais aussi à ceux des classes préparatoires, du CAPES et de l'agrégation. Nous espérons qu'il leur sera une aide précieuse dans leur effort de compréhension de cette branche de la physique.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Avant-propos</i>	III
CHAPITRE 1. CINÉMATIQUE DU POINT	1
1. De la nécessité du référentiel	1
2. Vitesse d'un point matériel	5
3. Accélération d'un point matériel	9
4. Récapitulatif	11
5. Exemples de mouvements	12
À retenir	18
Exercice d'application avec solution détaillée	19
Exercices	20
Solutions	23
CHAPITRE 2. CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS	29
1. Mouvements d'un référentiel par rapport à un autre	29
2. Étude de la vitesse	34
3. Étude de l'accélération	41
À retenir	43
Exercice d'application avec solution détaillée	44
Exercices	47
Solutions	51
CHAPITRE 3. LOIS DE NEWTON ET RÉFÉRENTIELS GALILÉENS	57
1. Principe d'inertie : première loi de Newton	57
2. Principe de la dynamique : deuxième loi de Newton	62
3. Actions réciproques : troisième loi de Newton	65
4. Les forces	66
5. Applications	72
À retenir	77
Exercices d'application avec solution détaillée	78
Exercices	83
Solutions	86
CHAPITRE 4. TRAVAIL, PUISSANCE, ÉNERGIE	93
1. Travail d'une force	93
2. Exemples de calcul du travail	95
3. Puissance d'une force	98
4. Énergie	98
5. États liés d'un système mécaniquement isolé	104
À retenir	107

<i>Exercices d'application avec solution détaillée</i>	109
<i>Exercices</i>	121
<i>Solutions</i>	121
CHAPITRE 5. OSCILLATEURS MÉCANIQUES	125
1. L'oscillateur harmonique	125
2. Équation différentielle	127
3. Exemples d'oscillateurs harmoniques	128
4. Étude énergétique des oscillateurs	130
5. Oscillateur mécanique amorti par frottements visqueux	132
6. Analogie électrique	137
7. Oscillateur amorti par frottement solide	137
8. Portrait de phase d'un oscillateur	141
<i>À retenir</i>	143
<i>Exercices d'application avec solution détaillée</i>	144
<i>Exercices</i>	152
<i>Solutions</i>	153
CHAPITRE 6. OSCILLATIONS FORCÉES, RÉSONANCE	155
1. Oscillations forcées	155
2. Solution de l'équation différentielle	158
3. Transfert de puissance	163
4. Facteur de qualité	165
<i>À retenir</i>	166
<i>Exercices d'application avec solution détaillée</i>	167
CHAPITRE 7. INTERACTION GRAVITATIONNELLE	175
1. Attraction universelle	175
2. Champ de gravitation terrestre	177
3. Énergie potentielle de gravitation	179
4. Applications	181
<i>À retenir</i>	185
CHAPITRE 8. RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS	187
1. Introduction	187
2. Loi de la dynamique dans un référentiel non galiléen	188
3. Exemples d'application	189
4. Dynamique terrestre	197
<i>À retenir</i>	209
<i>Exercices d'application avec solution détaillée</i>	209
<i>Exercices</i>	219
<i>Solutions</i>	221
CHAPITRE 9. SYSTÈMES À DEUX CORPS	227
1. Éléments cinétiques	227
2. Référentiel du centre de masse	229
3. Relation fondamentale de la dynamique	232
4. Propriétés du mouvement	236
<i>À retenir</i>	241

<i>Exercices d'application avec solution détaillée</i>	242
CHAPITRE 10. TRAJECTOIRES D'UN SYSTÈME À DEUX CORPS	253
1. Rappels	253
2. Équation polaire de la trajectoire : Formule de Binet.	254
3. Résolution de la formule de Binet	256
4. Étude des trajectoires	257
5. Étude énergétique	260
6. Trajectoires elliptiques : lois de Kepler	261
<i>À retenir</i>	265
<i>Exercices d'application avec solution détaillée</i>	265
<i>Exercices</i>	274
<i>Solutions</i>	277
ANNEXE 1. RAPPEL DES OUTILS MATHÉMATIQUES	283
1. Scalaires et vecteurs	283
2. Composantes d'un vecteur	286
3. Produit scalaire	288
4. Produit vectoriel	290
5. Dérivation vectorielle	293
6. Différentielle d'une fonction	294
7. Vecteur gradient d'une fonction	302
8. Intégrales et primitives	304
9. Intégrales vectorielles	306
ANNEXE 2. INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE CÉLESTE	309
1. Historique	309
2. Définitions	311
3. La Voie Lactée	312
4. Le Système Solaire	313
5. La définition du temps	316
6. Temps et repérage de la longitude des étoiles	318
7. Repérage de l'altitude du Soleil au cours de l'année	321
<i>À retenir</i>	322
BIBLIOGRAPHIE	325
INDEX	326

CHAPITRE 1

CINÉMATIQUE DU POINT

Pré-requis

- Connaître les systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
- Savoir dériver les vecteurs de la base polaire ou cylindrique.
- Savoir intégrer quelques fonctions élémentaires (polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielle etc.).
- Ces notions sont reprises en annexe, *Rappel des outils mathématiques*.

Objectif

- ▶ À partir du vecteur accélération d'un point, savoir retrouver le vecteur vitesse, les équations horaires du mouvement ainsi que l'équation de la trajectoire de ce point.
- ▶ Connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées.
- ▶ Connaître la définition de quelques mouvements particuliers traités en fin de chapitre.
- ▶ L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent ce mouvement. Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que les vecteurs accélération, vitesse, position et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

1. DE LA NÉCESSITÉ DU RÉFÉRENTIEL

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence simultanée du point et d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. L'observateur est le pilier de l'étude du mouvement car selon sa position par rapport à l'objet en mouvement ses conclusions quant à la nature du mouvement seront très variables. Ainsi, dans un TGV qui se déplace à vitesse constante, un passager qui lâche verticalement une bille conclut que la bille a un mouvement rectiligne. La personne qui est sur le quai et qui observe la même scène conclut que le mouvement n'est pas rectiligne et pourtant il s'agit bien de la même bille. Un mouvement est donc toujours lié à un observateur. On dit qu'il est **relatif**.

Le mouvement d'un objet ne pourra se faire que par rapport à une référence. Il est donc nécessaire de définir ce que l'on appelle un **référentiel** ou **solide de référence** dans lequel l'observateur est fixe. On entend par solide de référence un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. Par exemple, dans le cas cité plus haut, on peut choisir le TGV comme référentiel, l'observateur étant assis à l'intérieur, ou bien le référentiel terrestre (constitué par tout ce qui est fixe par rapport à la Terre) pour la personne restée sur le quai.

La figure 1.1 illustre bien qu'un mouvement est relatif à un référentiel choisi. Ainsi un observateur situé au sommet d'une montagne conclut que le pilote d'un avion se déplace très vite. L'observateur situé sur l'aile conclut de façon très différente que le pilote est bien installé au repos. Nous concluons donc que :

Le mouvement d'un point est toujours relatif à un référentiel.

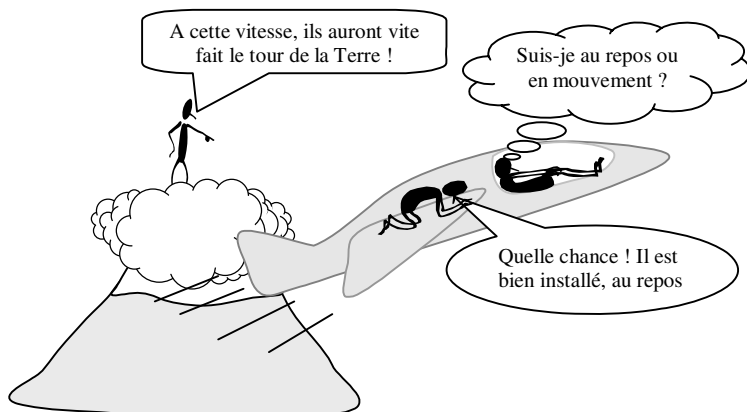


Figure 1.1 • Relativité du mouvement.

Pour caractériser le mouvement de l'objet, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui l'environne. Il lui faut pour déterminer la nature du mouvement connaître la position du point au cours du temps, c'est-à-dire pouvoir répondre aux questions suivantes :

Où se trouve le point ?

Quand est-il passé à cette position ?

Pour pouvoir répondre à la question *où ?*, il se choisit un **repère d'espace**. Le repère d'espace est défini par une **origine** O qui est fixe dans le référentiel et des **axes de référence** (x, y, z) qui permettent à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve l'objet. Ces axes sont eux-mêmes liés au référentiel. En toute logique, l'origine O du repère doit être placée sur l'observateur. Aussi dans le cas de la figure 1.1, le référentiel est le référentiel montagne avec une origine O prise sur l'observateur qui s'y trouve. Cet observateur choisit ses axes x, y, z comme il l'entend afin de repérer la position d'un point de l'avion.

Pour un référentiel donné, il existe autant de repères d'espace que de choix d'origine et d'axes possibles, c'est-à-dire une infinité. Par contre, à un repère d'espace donné ne correspond qu'un seul référentiel constitué par tout ce qui est fixe par rapport à ce repère.

Pour pouvoir répondre à la question *quand ?*, il faut ajouter un repère de temps, c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. Cette variable est continue et croissante, ce qui traduit l'irréversibilité du temps. Elle est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre à partir d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une **chronologie**.

À chaque **instant**, on associe un nombre réel appelé **date** qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

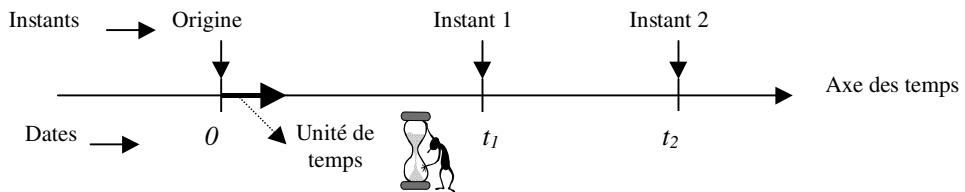


Figure 1.2 • Repère de temps. La durée entre les deux instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres. Ce principe d'universalité du temps n'est plus applicable dans le cadre de la mécanique relativiste. Notons que la mécanique relativiste est utilisée dès que la vitesse v d'un objet devient voisine de la célérité c de la lumière dans le vide. La transition entre les deux mécaniques est fixée en général à $v = c/10$.

Pour terminer nous signalons qu'un référentiel peut être caractérisé par son nom. Par exemple, il est très fréquent d'utiliser pour des observations faites à la surface de la Terre le référentiel terrestre. Il est clair alors que l'étude se fera par rapport à la Terre ou par rapport à tout ce qui est fixe sur Terre. On distingue plus particulièrement les référentiels de Copernic (figure 1.3), géocentrique (figure 1.3) et terrestre définis par :

- **Le référentiel de Copernic**

- origine : centre du Système Solaire (voisin du centre d'inertie du Soleil) ;
- axes dirigés vers les étoiles situées dans des directions fixes par rapport au Soleil ;
- propriété : supposé galiléen (voir chapitre 3).

- **Le référentiel géocentrique**

- origine : centre de la Terre ;
- axes dirigés parallèlement à ceux du référentiel de Copernic.

- **Le référentiel terrestre**

- origine : point de la surface de la Terre ;
- axes fixes par rapport à la Terre.

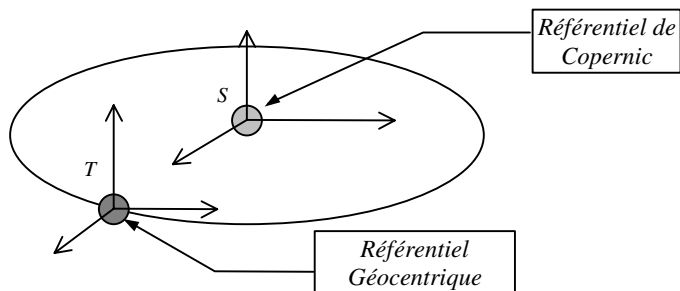


Figure 1.3 • Référentiels de Copernic et géocentrique. Il faut noter que les axes du référentiel géocentrique restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Au lieu de caractériser un référentiel par son nom, on convient souvent de le représenter par le symbole R associé à un repère d'espace et de temps. La notation suivante est d'usage courant :

$$\text{référentiel } R(O, x, y, z, t)$$

Pour une étude plus précise du mouvement d'un point mobile dans un référentiel R on est amené à définir sa position mais aussi des grandeurs vectorielles comme le vecteur vitesse ou accélération de ce point. Il faudra donc faire un choix de **système de coordonnées** (voir annexe : rappel des outils mathématiques) et utiliser la **base** correspondante :

- (x, y, z) en coordonnées cartésiennes avec la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ qui est une base dont les vecteurs sont fixes dans le repère.
- (ρ, θ, z) en coordonnées cylindriques avec la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ qui est une base dont les deux premiers vecteurs voient leur direction varier au cours du temps.
- (r, θ, φ) en coordonnées sphériques avec la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Il est important de noter que suivant le choix effectué, la base utilisée, comme outil mathématique, peut être fixe ou mobile dans le référentiel donné. Ceci a des conséquences importantes lorsqu'il s'agit de dériver des vecteurs. Pour éviter toute erreur ou confusion, on notera, à chaque fois qu'une étude est entreprise, le choix de la base en précisant si elle est fixe ou pas.

L'association de l'origine d'un repère d'espace, des axes du repère d'espace et de la chronologie définit le **référentiel d'étude**. On notera ensuite la base de projections utilisée en précisant si elle est fixe ou pas dans le référentiel. On notera donc un référentiel d'étude sous la forme présentée sur la figure 1.4.

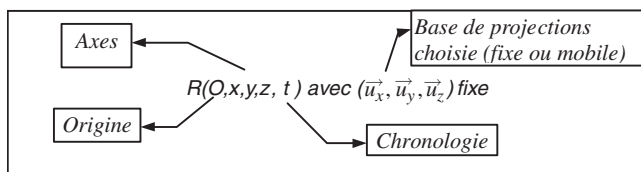


Figure 1.4 • Référentiel d'étude.

On appelle référentiel un solide de référence constitué de l'ensemble des points tous fixes les uns par rapport aux autres.

Un référentiel peut être défini par un de ses repères d'espace muni d'une origine, de trois axes et d'une chronologie : $R(O, x, y, z, t)$

Pour une étude plus précise, on notera, à la suite, la base utilisée en précisant si elle est fixe ou pas : $R(O, x, y, z, t)$ avec (base fixe ou mobile)

Si un référentiel est défini par un de ses repères, on prendra soin de noter :

- l'origine : O ;
- les axes du référentiel : x, y, z ;
- le temps : t .

On précisera ensuite, lorsque l'étude le nécessite, la base de projections dont on indiquera si elle est fixe ou non dans R .

2. VITESSE D'UN POINT MATÉRIEL

2.1. Définition

Soit un point M mobile dans un référentiel $R(O, x, y, z, t)$ avec $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe.

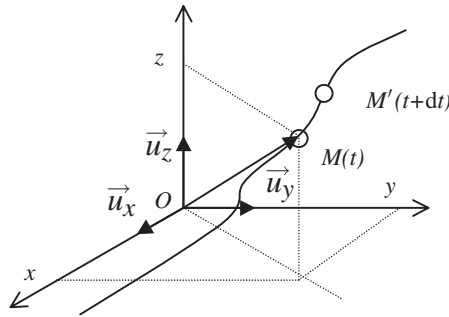


Figure 1.5 • Mouvement d'un point M dans le référentiel R .

On appelle **vitesse** du point M par rapport à R la dérivée du vecteur position $\vec{OM}$ du point M par rapport au temps¹, soit :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Cette définition est la seule qui reste toujours valable quel que soit le problème considéré. D'un point de vue pratique, le calcul du vecteur vitesse se fait en considérant le déplacement élémentaire $\vec{MM'}$ du point M entre les instants t et $t + dt$, qui n'est rien d'autre que le vecteur $d\vec{OM} = \vec{OM'} - \vec{OM} = \vec{MM'}$ (annexe 1, 6.5.).

1. La notation d/dt est qualifiée de notation de Leibniz.

2.2. Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

Lorsque le repère dans lequel le mouvement est étudié est cartésien, la position du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{u}_x + y \overrightarrow{u}_y + z \overrightarrow{u}_z$$

Les vecteurs $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ sont constants et la dérivée de la position conduit à :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z)}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u}_x + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u}_y + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u}_z$$

L'écriture précédente peut être condensée en utilisant les variables surmontées d'un point pour décrire la dérivation temporelle. On écrit alors la vitesse de la façon suivante :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

2.3. Vitesse en coordonnées polaires ou cylindriques

On appelle coordonnées cylindriques des coordonnées relatives à une base tournante $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ autour de l'axe z dans le référentiel R . Les coordonnées sont dites cylindriques si elles font intervenir une coordonnée z en dehors du plan (O, x, y) et polaires dans le cas contraire.

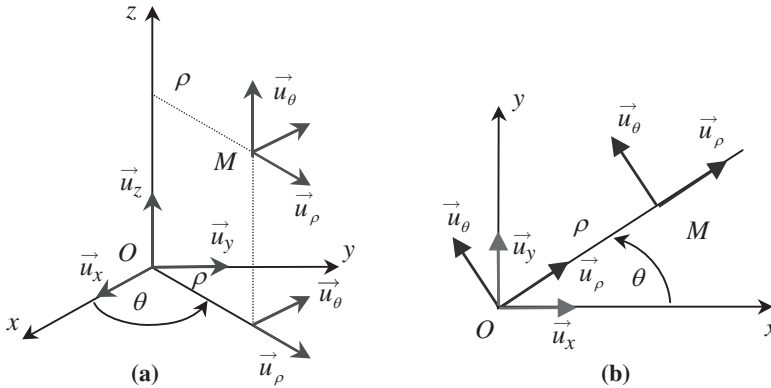


Figure 1.6 • Système de coordonnées cylindriques (a) et polaires (b).

En général, la base $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ est représentée au point M considéré mais elle peut tout aussi bien être placée en O .

Si le point M se déplace dans le plan xOy (figure 1.6b), il peut être repéré par ses coordonnées polaires $\rho = OM$ et la position angulaire $\theta = (\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{OM})$.

Dans la base mobile $(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$, la position du point M est alors définie par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}_\rho$$

Il est impératif de remarquer que la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est une base orthonormée et que les vecteurs $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ sont des **vecteurs mobiles et donc variables** dans le temps, contrairement aux vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ qui eux sont fixes.

En appliquant la définition de la vitesse, il est possible d'exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base mobile, soit :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho \vec{u}_\rho)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

Le calcul de la vitesse peut se faire en utilisant le théorème du vecteur unitaire tournant (annexe 1, 5.2.) qui impose que :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

ce qui engendre qu'en coordonnées polaires :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

En coordonnées cylindriques (figure 1.6a), il suffit de rajouter la troisième composante suivant l'axe Oz :

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

L'expression du vecteur vitesse est alors obtenue en ajoutant la composante suivant $\vec{u}_z$:

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

L'utilisation des coordonnées cylindriques (ou polaires) est appréciable dès que le mouvement du point M est curviligne (circulaire ou elliptique).

Le vecteur vitesse que nous avons calculé et exprimé dans la base polaire représente la vitesse du point par rapport au référentiel R . Il s'agit bien du même vecteur que l'on exprime dans la base cartésienne par :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y$$

2.4. Vitesse dans la base de Frenet

Il est également possible de déterminer la vitesse du point M dans le référentiel R en utilisant une nouvelle base appelée **base de Frenet**. La base de Frenet est une base locale qui se déplace avec le point M . Elle est utilisée lorsque le mouvement du point M est curviligne. Elle fait intervenir le **cercle osculateur** à la trajectoire du point M , c'est-à-dire le cercle qui est tangent localement à la trajectoire du point M . L'un des vecteurs de base est tangent à la trajectoire et est orienté dans le sens positif donné à la trajectoire, l'autre vecteur est dirigé selon le rayon de courbure de la trajectoire, vers le centre du cercle osculateur.

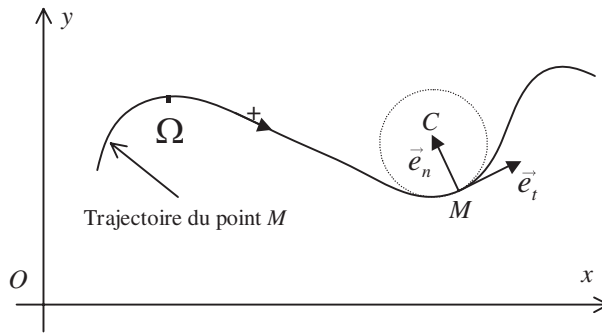


Figure 1.7 • Abscisse curviligne et base de Frenet.

La vitesse du point M est par définition :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

avec $s = \widehat{\Omega M}$ (mesure algébrique sur la courbe de la distance ΩM).

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point M en décrivant la trajectoire, l'abscisse curviligne du point M passe de s à $s + ds$ entre l'instant t et l'instant $t + dt$. Le déplacement élémentaire du point M s'écrit donc :

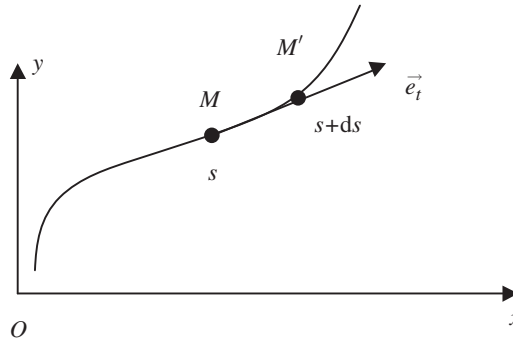


Figure 1.8 • Présentation du déplacement élémentaire sur la trajectoire curviligne.

$$d\vec{OM} = \vec{MM'} = ds \vec{e}_t$$

ce qui permet d'écrire que la vitesse dans la base de Frenet est :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = \dot{s} \vec{e}_t$$

Remarque. Le vecteur unitaire tangent à la trajectoire peut être déterminé analytiquement à partir de l'équation ci-dessus :

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{OM}}{ds}$$