PC
PC*

Lionel Vidal
Régis Bourdin
Ludovic Menguy
Vincent Parmentier
Alban Sauret
Marc Venturi
Sylvie Zanier

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

PHYSIQUE

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

ellipses

PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique PC/PC*

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Lionel VIDAL

Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

Régis BOURDIN

Professeur au lycée Sainte-Marie (Caen)

Ludovic MENGUY

Professeur au lycée Montesquieu (Le Mans)

Vincent PARMENTIER

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Alban SAURET

Professeur à l'université de Californie (Santa Barbara, États-Unis)

Marc VENTURI

Professeur au lycée Kléber (Strasbourg)

Sylvie ZANIER

Enseignante à l'université J. Fourier (Grenoble)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



Les notices culturelles « un scientifique » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Un grand merci à Frédéric Barbosa pour sa relecture attentive.

ISBN 9782340-066847
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie, de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1.	Mesures de fréquences	1
2.	Référentiels non galiléens	47
3.	Cinématique des fluides	81
4.	Actions de contact dans un fluide	123
5.	Équations locales de la dynamique des fluides	153
6.	Bilans macroscopiques	185
7.	Champ électrostatique	213
8.	Potentiel et dipôle électrostatique	239
9.	Magnétostatique	293
10.	Équations de Maxwell	337
11.	Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS	367
12.	Propagation unidimensionnelle non dispersive	391
13.	Ondes dans un milieu continu élastique	433
14.	Ondes sonores dans les fluides	459
15.	Ondes électromagnétiques dans le vide	493
16.	Électromagnétisme et état plasma	533
17.	Électromagnétisme et milieux conducteurs	565
18.	Électromagnétisme et milieux diélectriques	599
19.	Généralités sur les ondes et interférences lumineuses	635
20.	Dispositifs interférentiels	675
21.	Thermodynamique des systèmes ouverts	733
22.	Diffusion de particules	767
23.	Transferts thermiques	793
24.	Introduction à la physique du laser	849

25. Mécanique quantique ondulatoire 873
26. Particule dans un potentiel constant..... 911

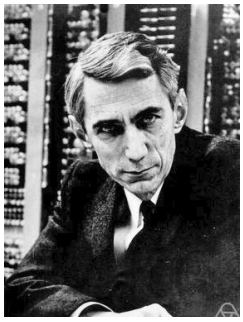
Annexes..... 957
1. Formulaire d'analyse vectorielle..... 958
2. Éléments d'analyse spectrale 962
3. Le minimum de savoir-faire en mathématique 968
4. Constantes fondamentales et ordres de grandeur classiques 974
5. Calculs d'incertitudes..... 976

Index..... 983

Chapitre 1

Mesures de fréquences

UN SCIENTIFIQUE



Claude Shannon (1916-2006) obtient son doctorat au Massachusetts Institute of Technology à Boston sur la logique de Boole. II travaille alors aux Laboratoires Bell de 1941 à 1972. Pendant la Seconde Guerre mondiale les services secrets américains le sollicitent pour les éclairer sur des problèmes de cryptographie ce qui l'amène, en 1948, à fonder la théorie de l'information dans un remarquable article où il ouvre des champs totalement nouveaux pour le transport d'informations.

Un peu d'histoire

La théorie du signal est relativement jeune mais elle s'est développée sur des bases mathématiques déjà élaborées. Comme les informations sont transportées en général par des ondes, les fonctions périodiques y jouent un rôle fondamental. Joseph Fourier (1768-1830) montre que ces fonctions peuvent se développer en sommes de fonctions trigonométriques ce qui permet des codifications très simples.

Dans un premier temps, les transferts d'information l'ont été de manière analogique. En 1927, Harry Nyquist détermine des conditions nécessaires pour transformer en forme numérique un signal analogique ; Shannon en fera une démonstration précise.

Celui-ci rédige en 1948 un article dans lequel il jette les bases de la théorie de l'information de manière très universelle. Il y montre que tout message peut être transformé en unité binaire : c'est le début de l'ère du numérique.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Le fonctionnement d'un oscillateur quasi-sinusoïdal
- Le principe de la détection synchrone
- La différence entre un signal analogique et un signal numérique
- L'échantillonnage et la quantification
- La condition de Nyquist-Shannon
- L'analyse spectrale numérique

Ce qu'il faut savoir faire

- Réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal en bouclant un amplificateur avec un filtre passe-bande
- Réaliser une détection synchrone avec un multiplieur analogique
- Savoir choisir les paramètres : durée, nombre d'échantillons et fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon
- Savoir mettre en évidence et reconnaître un phénomène de repliement de spectre
- Élaborer un signal électrique analogique modulé en fréquence à l'aide d'un GBF
- Simuler en Python le phénomène de repliement de spectre
- Expliquer, à l'aide d'une simulation Python, l'influence de la fréquence d'échantillonnage

■■ Résumé de cours

■ Production d'un signal : l'oscillateur quasi-sinusoïdal

L'objectif est de réaliser un montage électronique produisant un signal quasi-sinusoïdal **oscillant tout seul**, sans placer de signal en entrée (sans GBF !). L'énergie nécessaire est fournie par une alimentation continue, par exemple par une pile ou une alimentation basse tension telle que celle que l'on trouve dans un ordinateur.

❑ Étude dans le domaine temporel : conditions d'oscillations

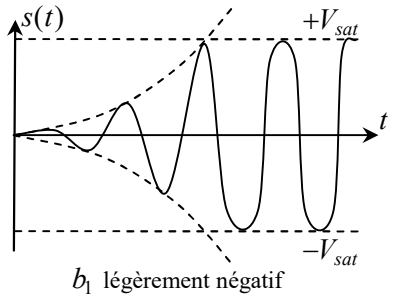
Un système linéaire est régi par une équation différentielle à coefficients constants. En se limitant à des systèmes d'ordre 2, la sortie $s(t)$ vérifie donc :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 .$$

On admet que b_0 et b_2 sont positifs, mais que le terme b_1 peut être soit positif (perte d'énergie = amortissement), soit nul, soit négatif (gain d'énergie = amplification).

→ Si $b_1 = 0$, la solution de l'équation différentielle est purement sinusoïdale. **C'est le cas idéal de l'oscillateur harmonique sans pertes**, qui est purement théorique. Il n'est pas possible d'obtenir b_1 rigoureusement nul en pratique.

→ Si $b_1 < 0$ mais proche de 0, la solution est de la forme $\exp\left(\frac{|b_1|}{2b_2}t\right)\sin(\omega t + \varphi)$. Le signal est sinusoïdal avec une amplitude qui s'accroit progressivement. Ce sont **les non linéarités** qui stoppent cet accroissement et bornent l'amplitude (à $\pm V_{sat}$ pour un ALI).



b_1 légèrement négatif

⇨ **Méthode 1.2. Dans le domaine temporel : l'équation différentielle**

En pratique, on cherche à avoir b_1 négatif pour obtenir un amorçage des oscillations, mais **le plus proche possible de 0**. Le signal obtenu est **quasi**-sinusoïdal : les non linéarités nécessaires pour stopper l'accroissement des oscillations déforment un peu le sinus obtenu, et ce d'autant plus que b_1 est éloigné de 0.

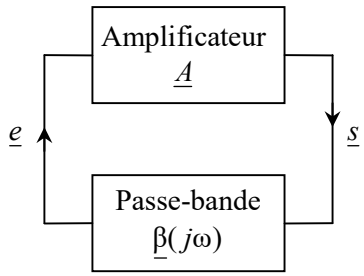
❑ Étude dans le domaine fréquentiel : la condition de Barkhausen

L'oscillateur comporte un montage à amplificateur $\underline{A}$ avec une boucle de rétroaction $\beta(j\omega)$ composé d'un filtre passe-bande du second ordre.
Dans le cas de l'oscillation quasi-sinusoïdale :

→ $\underline{s} = \underline{A}\,\underline{e}$ pour l'amplificateur ;

→ $\underline{e} = \underline{\beta}\,\underline{s}$ pour le filtre passe-bande.

Il vient $\underline{s} = \left(\underline{A}\,\underline{\beta}\right)\underline{s}$. Pour avoir une solution $\underline{s} \neq 0$, donc oscillation, la condition de Barkhausen $\underline{A}\,\underline{\beta} = 1$ doit être vérifiée.



Pour obtenir un oscillateur quasi-linéaire, **l'idéal** est de respecter **la condition de Barkhausen** $\boxed{\underline{A}\,\underline{\beta} = 1}$.

En TP, il n'est pas possible d'obtenir une égalité parfaite : on se place alors à $\left|\underline{A}\,\underline{\beta}\right|$ très légèrement supérieur à 1 pour avoir légère divergence. Les non linéarités (saturation des ALI) stoppent la divergence.

⇨ **Méthode 1.1. Dans le domaine fréquentiel : la condition de Barkhausen**

La condition de Barkhausen $\underline{A}(j\omega)\,\underline{\beta}(j\omega) = 1$ est une égalité entre grandeurs complexes, qui donne donc 2 égalités réelles :

– l'une impose une condition sur les valeurs des composants (R, L ou C) à choisir ;

– l'autre fait intervenir la pulsation ω : c'est la pulsation spontanée de l'oscillateur électronique.

■ Traitement du signal analogique

Il est possible d'effectuer un spectre de manière analogique, sans calcul de transformée de Fourier. L'oreille humaine, par exemple, réalise cet exploit ! Nous allons voir ici comment réaliser une analyse spectrale à l'aide de montages électroniques analogiques.

⇨ **Méthode 1.4. Réaliser un analyseur de spectre analogique**

Utilisation d'un filtre passe bande très sélectif

L'idée est d'utiliser un filtre passe-bande très sélectif, c'est-à-dire de bande passante très étroite. Un composant électronique, comme une résistance variable, permet de faire varier la fréquence passante. On peut ainsi réaliser, en quelque sorte, un « scan » de l'ensemble du spectre en parcourant toutes les fréquences. Une tension de sortie non nulle pour une fréquence passante f_0 indique que le signal d'entrée comporte cette fréquence dans son spectre. La précision relative d'un tel spectre est $1/Q = \Delta f / f_0$: le facteur de qualité doit donc être important.

Détection synchrone

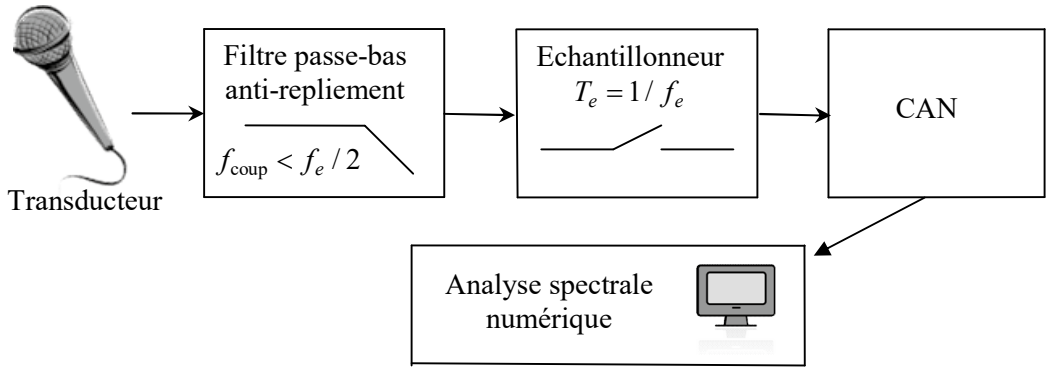
Le signal $e(t)$ à analyser est multiplié (à l'aide d'un multiplieur analogique) par un signal de la forme $a(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t\right)$. Si $e(t)$ contient une composante $e_0\cos\left(2\pi f_0 t\right)$, le signal de sortie comporte le produit des 2 termes, soit $\left(Ae_0/2\right)\left(1+\cos\left(4\pi f_0 t\right)\right)$. Puis un filtrage passe-bas de fréquence de coupure très basse garde le signal continu égal à $Ae_0/2$. Connaissant A, on en déduit e_0, amplitude de la composante f_0 du signal $e(t)$.

→ Avantage du détecteur synchrone : il peut extraire un signal faible même noyé dans le bruit.

→ Difficulté : $a(t)$ doit être non seulement de même fréquence, mais aussi de même phase que le signal à extraire (donc synchrone).

■ Acquisition et traitement numérique du signal

Les phénomènes réels varient manière **continue**. Un son, une température, un signal électrique peuvent prendre n'importe quelle valeur : on parle de signal analogique.
La grandeur à traiter est d'abord convertie en signal électrique à l'aide d'un capteur (microphone, sonde, …), puis numérisée à l'aide d'un convertisseur numérique analogique (CAN).
La numérisation consiste à coder le signal en **nombre limité de valeurs bien définies**. Le signal devient alors discret et codé sous forme de bits prenant la valeur 0 ou 1. Soit le signal est supérieur à un niveau et prend la valeur 1, soit il est en dessous et prend la valeur 0. Un bruit additif assez faible ne viendra pas perturber le signal. Il peut ainsi facilement être enregistré, traité et restitué très fidèlement. De plus, on peut faire apparaître une certaine redondance dans le signal avec des bits de contrôle pour détecter et corriger d'éventuelles erreurs.
Enfin, le signal numérique est filtré ou analysé à l'aide d'un simple calcul réalisé par calculateur, sans utiliser de composants électroniques. Les caractéristiques du traitement peuvent également être modifiées suivant les besoins, ou améliorées, en changeant simplement quelques paramètres à l'aide d'un logiciel dans un ordinateur par exemple. Enfin, ces caractéristiques ne dérivent pas dans le temps, contrairement aux composants électroniques.



❑ La conversion analogique/numérique (CAN)

La numérisation (CAN) nécessite un échantillonnage et une quantification.
L'échantillonnage consiste à prendre périodiquement une mesure du signal, à $t = nT_e$. T_e est la période d'échantillonnage (n entier). On note aussi $f_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage. Cette opération est réalisée par un interrupteur commandé appelé échantillonneur.
La quantification affecte une valeur numérique approchée à chaque échantillon prélevé, parmi un nombre limité de valeurs possibles, puis cette valeur est convertie en binaire.

De plus, l'acquisition ne peut se faire que sur une durée τ limitée, que l'on appelle durée d'acquisition (ou fenêtre d'analyse). En notant N le nombre d'échantillons prélevés, on a $\tau = N T_e$.

Dans l'exemple ci-dessus, le signal analogique (courbe continue) est échantillonné avec une période T_e, avec 15 échantillons, et quantifié sur 3 bits, soit $2^3 = 8$ niveaux de quantification.

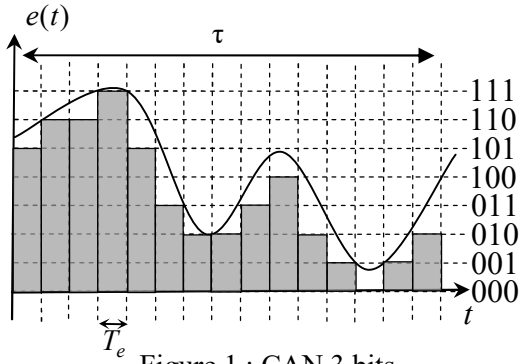


Figure 1 : CAN 3 bits

Les CAN sont situés dans la carte d'acquisition pour l'ordinateur, ou directement dans l'oscillateur numérique. Ils sont utilisés pour quantifier et coder une valeur analogique en binaire. Citons, entre autres :

– le CAN à rampe (ou comptage d'impulsion) intègre la tension analogique jusqu'à une tension de réérence ; un compteur binaire compte le temps écoulé ;

– le CAN à approximations successives ;

– le CAN Flash (ou parallèle) compare le signal à $2^N - 1$ tensions de référence obtenues à l'aide d'un pont diviseur de tension composé de 2^N résistances (voir exercice 1.4).

❑ Analyse spectrale et condition de Nyquist-Shannon

La tension étant maintenant enregistrée sous forme de suite de valeurs numériques, un calcul numérique permet d'obtenir le spectre. Les logiciels utilisent souvent un algorithme appelé FFT (« Fast Fourier Transform »).

⇨ Méthode 1.5. Transformée de Fourier discrète en Python et limitation introduite par l'échantillonnage

Toutefois, ce traitement n'est pas sans défauts, dont les 2 principaux sont les suivants.

Prenons l'exemple de l'acquisition du signal $e(t) = A\cos(2\pi f t)$.

– Une durée d'acquisition τ non adaptée a pour effet d'élargir les raies du spectre, voire de faire apparaître dans le spectre des raies parasites tous les $f_P = 1/\tau$ de chaque côté de f. Pour remédier ou atténuer ce problème, on peut soit prendre une fenêtre qui contient un nombre entier de périodes de $e(t)$ (c'est l'idéal, mais pas toujours possible), soit choisir une durée d'acquisition assez grande devant la période de $e(t)$. Les logiciels ou oscilloscopes numériques proposent aussi des fenêtres d'analyse adaptées pour limiter ce problème (la fenêtre « Hamming » est la plus courante).

– La fréquence d'échantillonnage f_e introduit une discrétisation dans le domaine temporel, qui se traduit par une périodicité f_e dans le domaine fréquentiel.

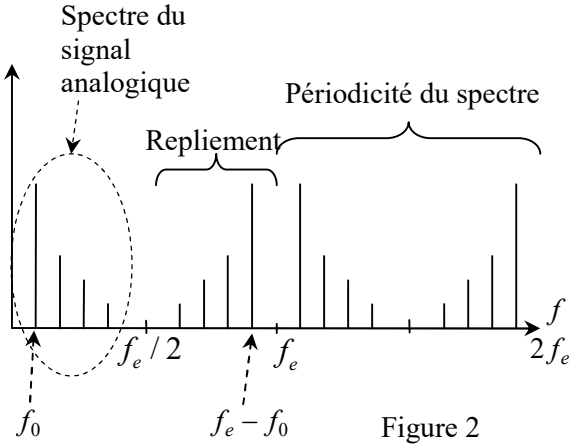


Figure 2

Un signal périodique temporellement de période T se décompose en une somme discrète de termes dans le domaine fréquentiel (se reporter à l'annexe 2 sur les séries de Fourier). Le spectre se présente avec des raies de fréquences multiples de $f = 1/T$. L'inverse est valable également : une discrétisation avec une durée d'échantillonnage T_e dans le domaine temporel donne une périodicité $f_e = 1/T_e$ dans le domaine fréquentiel.

Il y a dualité entre domaines temporel et fréquentiel : une discrétisation a dans un domaine donne une périodicité $1/a$ dans l'autre domaine, et réciproquement.

A cette périodicité du spectre s'ajoute **un repliement de spectre** : tout signal de fréquence f_0 échantillonné à la fréquence f_e fait aussi apparaître une raie à la fréquence $(f_e - f_0)$. Cela s'observe facilement lorsque l'on filme une roue, qui semble parfois tourner à l'envers (effet stroboscopique).
Si le signal comporte une fréquence supérieure à $f_e / 2$, celui-ci fait apparaître une fréquence égale à $f_0 - f_e$ qui est inférieure à $f_e / 2$. On ne peut alors plus distinguer les fréquences réelles du signal des répliques apparues par repliement de spectre ! Dans l'exemple figure 3, un signal de fréquence $f_0 = 1\,\text{kHz}$ a été échantillonné à $f_e = 1{,}05\,\text{kHz}$ (carrés noirs) : les carrés semblent parcourir un sinus de basse fréquence ($f_e - f_0 = 1050 - 1000 = 50\,\text{Hz}$).

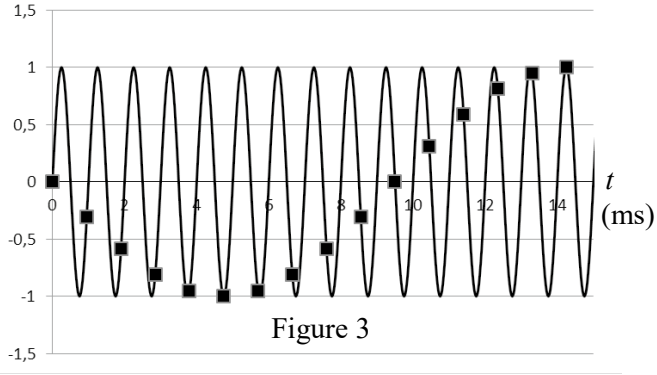


Figure 3

Il est donc indispensable de ne traiter que des signaux ne comportant pas de fréquences supérieures à $f_e / 2$: c'est le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon.

Afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, on cherche donc à augmenter la fréquence d'échantillonnage, de sorte à avoir **2 points minimum par période** de la plus haute fréquence du signal traité. Toutefois, si ce signal contient beaucoup d'harmoniques (créneau par exemple), le critère de Shannon peut ne pas être respecté pour les harmoniques élevées, ce qui parasitera le signal par des fréquences non souhaitées dues au repliement de spectre. Il est alors nécessaire de placer un filtre passe-bas anti-repliement en amont de l'échantillonneur pour supprimer les fréquences supérieures à $f_e/2$. Il y a alors perte des informations contenues dans ces fréquences filtrées.

Par contre, si l'on augmente la fréquence d'échantillonnage à nombre de points N constants, cela diminue la durée d'acquisition. Or la durée d'acquisition doit rester supérieure à la période du fondamental du signal. L'idéal est donc d'avoir un très grand nombre de points, ce qui augmente sensiblement le temps de calcul de la FFT (logiciels ou oscilloscopes limités en nombres de points). Il faut trouver un compromis.

⇨ **Méthode 1.3. Effectuer un compromis respectant le critère de Nyquist-Shannon**

■ Comment étudier un oscillateur quasi-sinusoïdal ?

❑ Méthode 1.1. Dans le domaine fréquentiel

Cette méthode nécessite de pouvoir séparer le montage en 2 blocs : l'amplificateur, et le filtre. Il faut donc commencer par trouver les 2 points de séparation des 2 montages ($\underline{e}$ et $\underline{s}$).

– L'amplificateur comporte élément actif, qui peut être un ALI (amplificateur linéaire intégré).

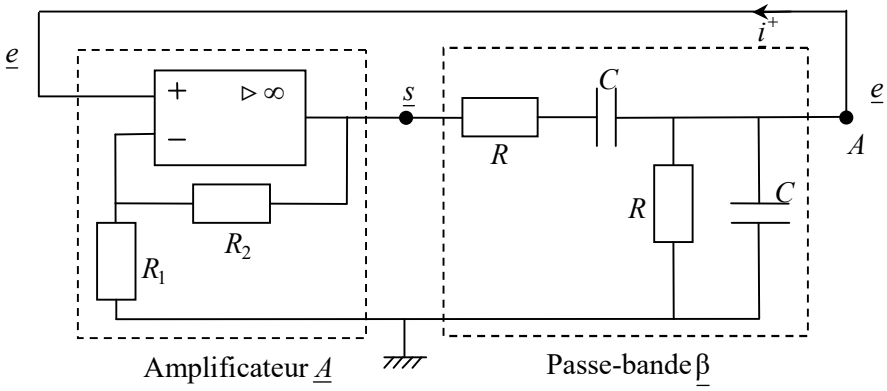
– Les autres éléments, passifs sont regroupés dans le 2e bloc (le filtre passe bande).

Ensuite, étudier **séparément** le bloc amplificateur et le filtre en déterminant leur fonction de transfert respective $\underline{A}(j\omega)$ et $\underline{\beta}(j\omega)$.

Reste à écrire la condition de Barkhausen $\underline{A}(j\omega)\underline{\beta}(j\omega)=1$ qui donne une égalité entre 2 complexes. Les dénominateurs éventuels sont remontés dans le membre opposé de l'égalité. L'égalisation des parties réelles d'une part, et des parties imaginaires d'autre part donne 2 relations. L'une impose une condition à vérifier entre les composants, et l'autre impose la pulsation de l'oscillation.

⇨ Exercices 1.1 et 1.2

Un des exemples les plus classiques est l'oscillateur à pont de Wien représenté ci-après.



Etudions cet oscillateur d'abord dans le domaine fréquentiel.

L'ALI, présent dans le bloc amplificateur, est supposé fonctionner en régime linéaire, donc $\underline{V}^+ = \underline{V}^-$. D'autre part, sa résistance d'entrée est infinie, donc n'admet pas de courant en entrée.

→ Commençons par étudier le bloc amplificateur $\underline{A}$ seul.

$\underline{V}^+ = \underline{V}^-$ aux entrées de l'ALI. Or $\underline{V}^+ = \underline{e}$ d'une part, et $\underline{V}^- = \underline{s}\, R_1/(R_1+R_2)$ d'après le pont diviseur de tension. On en déduit $\underline{A} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{R_1+R_2}{R_1}$ noté A car réel.

→ Etudions maintenant le bloc $\underline{\beta}$. Comme $i^+ = 0$, il est possible d'appliquer un pont diviseur de tension : $\underline{\beta} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{s}} = \dfrac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R + 1/jC\omega}$ avec $\underline{Z}_{eq}$ l'impédance de l'association $R//C$: $\dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{R} + jC\omega = \dfrac{1+jRC\omega}{R}$. Il vient : $\underline{\beta} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}}\left(R+\dfrac{1}{jC\omega}\right)} = \dfrac{1}{3+jRC\omega+\dfrac{1}{jRC\omega}}$.

On reconnaît un passe-bande du second ordre.

La condition de Barkhausen donne $1/\underline{\beta}(j\omega) = A$ soit $3 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega} = A$.

– L'égalité des parties réelles donne $A = 3$, soit $R_2 = 2R_1$: condition à respecter ;

– l'égalité des parties imaginaires impose $RC\omega - 1/RC\omega = 0$ soit $\omega = 1/RC$: pulsation d'oscillation spontanée de l'oscillateur.

❑ Méthode 1.2. Dans le domaine temporel : l'équation différentielle

On cherche à établir une équation différentielle sur une tension ou une intensité du montage. Pour cela, on utilise les lois de Kirchhoff, reliant intensités et tensions, puis on combine les relations obtenues pour ne plus garder qu'une seule tension ou intensité vérifiant : $b_2 \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1 \dfrac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = 0$.

La condition idéale d'oscillation est $b_1 = 0$, ce qui impose une relation entre les valeurs des composants. L'équation différentielle devient alors $\dfrac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = 0$ avec ω_0 la pulsation de l'oscillateur.

→ Ne pas oublier qu'en pratique b_1 ne peut pas être rigoureusement nul et doit être de signe opposé à b_0 et b_2. L'oscillation sinusoïdale obtenue est un peu déformée, donc contenant un peu d'harmoniques supérieures car limitée par les saturations.

⇨ Exercices 1.1 et 1.2

Reprenons l'exemple de l'oscillateur à pont de Wien. β s'écrit en notation de Laplace : $\dfrac{e}{s} = \dfrac{RC\,p}{1+3RC\,p+RC\,p^2}$ ce qui donne l'équation différentielle $\left[1+3RC\,p+RC\,p^2\right]e = \left[RC\,p\right]s$.

Mais on a aussi $e = s/A$. Avec les 2 équations, on peut écrire une équation différentielle avec uniquement $s(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + (3 - A)\omega_0 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s(t) = 0 \qquad \text{avec } \omega_0 = RC .$$

On retrouve, comme dans le domaine fréquentiel, que le cas idéal est $A = 3$, et cela donne une solution purement sinusoïdale de pulsation $\omega = \omega_0 = 1/RC$.

Toutefois, la condition $A = 3$ n'est pas possible à obtenir exactement en TP (incertitudes sur la valeur des composants). L'écriture de l'équation différentielle montre que pour obtenir une solution légèrement divergente, il faut avoir $(3 - A)$ légèrement négatif, donc A légèrement plus grand que 3, condition d'amorçage des oscillations.

■ Comment choisir les paramètres d'une acquisition numérique ?

❑ Méthode 1.3. Effectuer un compromis respectant le critère de Nyquist-Shannon

Il y a 3 paramètres à choisir, liés entre eux : la durée d'échantillonnage T_e, le nombre de points d'acquisition N et la durée d'acquisition τ, les paramètres étant liés entre eux par la relation $\tau = N T_e$.

→ La durée d'échantillonnage doit respecter le critère de Shannon. Il faut avoir une estimation de la plus haute fréquence contenue dans le signal, la multiplier par 2, et prendre f_e supérieure à cette valeur. On a alors $T_e = 1/f_e$.

→ La durée d'acquisition doit contenir au moins une période si le signal est périodique et que l'objectif est ensuite d'en faire une analyse spectrale. Par contre, si l'objectif est d'enregistrer un concert, la durée doit évidemment être au moins égale à la durée du concert !

→ L'idéal est donc de prendre une fréquence d'échantillonnage la plus grande possible pour être sûr de respecter le critère de Shannon, tout en ayant une durée d'acquisition assez longue…. Ce qui peut faire « exploser » le nombre de données à acquérir, car $N = \tau f_e$! Les capacités des logiciels d'analyse sont limitées. Pour l'enregistrement du concert, le CD audio a également une capacité limitée. Pour la transmission d'un film en numérique (TNT ou internet), c'est le débit de la transmission qui est limité… C'est là que le compromis doit être fait.

⇨ **Exercices 1.4, 1.5, 1.6 et 1.7**

→ Un internaute souhaite écouter de la musique à distance en « streaming » (en temps réel). Il dispose d'un débit de 1 Mb/s (10^6 bytes/s). Etant amateur de Hifi (restitution haute-fidélité avec un encodage sur 16 bits, sans compression, en stéréo donc sur 2 canaux, et comportant la totalité du spectre audible), il souhaite calculer si son débit est suffisant. Pouvez-vous l'aider ?

Le paramètre important pour une bonne restitution du spectre est le critère de Nyquist-Shannon. Pour garder la totalité du spectre audible qui monte jusqu'à $20\,\text{kHz}$, il faut une fréquence d'échantillonnage au moins double, soit $40\,\text{kHz}$. En réalité, le son Hifi est échantillonné à $44{,}1\,\text{kHz}$. Chaque mesure contient 16 bits, et la stéréo est composée de 2 sons. Chaque seconde, il faut donc envoyer $44\,100 \cdot 16 \cdot 2 = 1{,}41.10^6$ bits soit $1{,}41\,\text{Mb/s}$. Le débit de sa connexion est insuffisant, et il aura donc un son haché. A défaut, il pourra toujours télécharger sa musique avant de l'écouter, mais il lui faudra environ 1h 30 de téléchargement pour 1h de musique.

→ Il constate néanmoins qu'il peut téléphoner sans problème à l'aide de sa connexion internet. La fréquence d'échantillonnage est de $8\,\text{kHz}$ avec une quantification sur 8 bits sur 1 canal. Calculer le débit nécessaire correspondant. Que devient un son de $7\,\text{kHz}$ (donc audible) après échantillonnage ? Quelle solution proposez-vous ?

Le débit nécessaire est de $8\,000 \cdot 8 = 64\,\text{Kb/s}$: son débit est donc très largement suffisant !

Par contre, avec $f_e = 8\,\text{kHz}$, seules les fréquences inférieures à $4\,\text{kHz}$ respectent le critère de Shannon. Le téléphone ne peut pas transmettre les fréquences supérieures à $4\,\text{kHz}$, ce qui n'est pas gênant pour le son de la voix.

Toutefois, il y a repliement du spectre : les fréquences f_i font apparaître des fréquences $f_e - f_i$ dans le spectre. Un son de fréquence $8 - 7 = 1\,\text{kHz}$ (tout à fait audible) est donc transmis et restitué à l'auditeur ! La solution consiste à mettre un filtre passe-bas, appelé filtre anti-repliement, avant la numérisation de la voix pour supprimer les fréquences inférieures à $f_e / 2$. En pratique, seules les fréquences inférieures à $3{,}5\,\text{kHz}$ sont conservées.

■ Comment tracer expérimentalement le spectre d'un signal ?

❑ Méthode 1.4. Réaliser un analyseur de spectre analogique

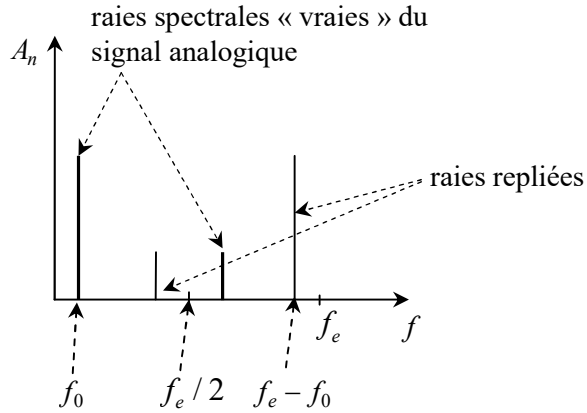
→ Si le signal n'est pas trop bruité, on peut réaliser un filtre passe-bande dont la bande passante peut être décalée à l'aide d'un composant variable, comme un potentiomètre par exemple. Ce filtre doit avoir une bande passante très étroite pour que la précision soit suffisante. La précision relative est $\Delta f / f_0 = 1 / Q$.

→ Si le signal $e(t)$ est de mauvaise qualité, par exemple très bruité, et que l'on veut mesurer l'amplitude e_0 de la fréquence f_0 présente de ce signal, on utilise la détection synchrone. $e(t)$ est multiplié à l'aide d'un multiplieur analogique par $A\cos(\omega_0 t)$. La composante f_0 du signal $e(t)$ devient alors une composante continue de valeur $Ae_0 / 2$ que l'on extrait à l'aide d'un passe-bas de coupure très basse. On en déduit alors la valeur de e_0.

⇨ **Exercice 1.3**

❑ Méthode 1.5. Transformée de Fourier discrète en Python et limitation introduite par l'échantillonnage

L'échantillonnage à la fréquence f_e d'un signal contenant une fréquence f_0 fait apparaître dans le spectre une raie à la fréquence $(f_e - f_0)$. Une limitation au traitement d'un signal numérique (échantillonné) est que si le signal analogique comporte une fréquence supérieure à $f_e/2$, son échantillonnage fait apparaître une fréquence inférieure à $f_e/2$. Voyons pour fixer les idées le spectre d'amplitude d'un signal comportant un fondamental de fréquence f_0 inférieure à $f_e/2$ et une harmonique de rang n de fréquence supérieure à $f_e/2$ (voir Annexe 2 : éléments d'analyse spectrale pour la terminologie).



On voit apparaitre la raie repliée correspondant à l'harmonique entre celles relatives au signal analogique (le « vrai » spectre). C'est le problème du **repliement de spectre** : on ne peut plus distinguer les raies spectrales liées aux fréquences réelles du signal de celles apparues par repliement de spectre. Aucun filtrage ultérieur ne permettra de se débarrasser de ces raies « fantômes ». Le problème se manifeste donc si le signal comporte une fréquence supérieure à $f_e/2$. Le critère de **Nyquist-Shannon** impose théoriquement une fréquence d'échantillonnage deux fois supérieure à la plus haute fréquence du signal. En pratique, si le signal contient beaucoup d'harmoniques (créneau par exemple), le critère de Shannon peut ne pas être respecté pour les fréquences des harmoniques de rang élevé, et des raies « fantômes » correspondant à ces harmoniques apparaitront alors dans son spectre à moins qu'elles ne soient filtrées avant échantillonnage (par un filtre anti-repliement). Ce filtrage analogique préalable évitera le repliement mais appauvrira l'information contenue dans le signal (en coupant les hautes fréquences).

⇨ Exercice 1.6

Voyons comment illustrer ce problème de repliement de spectre à l'aide de Python. Il nous faut d'abord obtenir le spectre d'un signal échantillonné.
Pour montrer le repliement de spectre on utilisera la fonction FFT (fast Fourier transform) que l'on notera `fourier` et qui sous Python s'écrit avec la bibliothèque `fftpack` de `scipy` ou aussi par la commande `rfft` de la bibliothèque `numpy.fft`. Appliquée au signal temporel, elle donne accès à son spectre (voir annexe). Les différentes bibliothèques adaptées seront `scipy`, `numpy` et `matplotlib`. On les importera classiquement en début de code :

```
import numpy as np
from scipy import fftpack (ou from numpy.fft import rfft)
from matplotlib import pyplot as plt
```

`fourier =np.fft.fft(…)` appliqué à une liste représentant le signal échantillonné renvoie une liste de *N* termes qui peuvent être complexes correspondant à la transformée de Fourier du signal.
À noter que l'on peut diviser par la taille de la matrice pour normaliser la FFT :
`fourier = np.fft.fft(…)/np.size(…)`

Voyons comment tracer le spectre d'une sinusoïde pure. Dans un premier temps on simule donc l'échantillonnage du signal $s(t)$ purement sinusoïdal de période temporelle $T_0 = 1\text{sec}$ à une fréquence f_e respectant le critère de Shannon. On peut commencer par tracer le signal en faisant apparaitre au moins deux périodes en superposant le signal échantillonné et les points figurant les échantillons. On se place dans le cas où $f_e = 10 f_0$.
On tracera ensuite le spectre qui doit comporter en ordonnée le module de la FFT et en abscisses la liste des fréquences notée `axe_f` comprenant `N` termes de `0` à la fréquence d'échantillonnage f_e (ne pas se limiter au départ à `fe/2` pour voir apparaitre la fréquence repliée).
L'axe fréquentiel est obtenu comme suit :

`axe_f = np.arange(0.,N)*fe/N` où `np.arange(min,max,p)` renvoie la liste des valeurs de `min` à `max-1` par pas de `p`.
On peut aussi utiliser `np.linspace (début, fin, nombre d'intervalles)` ce qui donne :
`axe_f =np.linspace(0.,fe,N)`

Le spectre est obtenu alors en traçant le module de la FFT donc `np.abs(fourier)` en fonction de `axe_f` comme suit :
`plt.plot(axe_f,np.abs(fftfourier))`

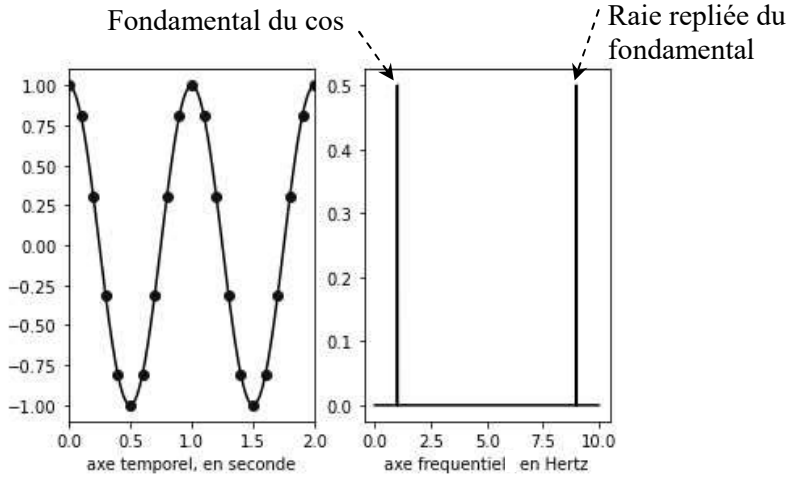
Le choix de la durée du signal n'est pas anodin. En effet, une durée non adaptée a pour effet d'élargir les raies du spectre ce qui peut le rendre inexploitable. Pour remédier à ce problème, on peut soit prendre une fenêtre qui contient un nombre entier de périodes du signal (ce n'est pas toujours possible), soit choisir une durée assez grande devant la période. Ici on prendra 100 fois la période du signal.
Le code associé est le suivant :

```
import numpy as np #appel des bibliothèques
from matplotlib import pyplot as plt
fe = 10 #définition de la fréquence d'échantillonnage en Hz
```

```
T = 100 #durée du signal en seconde
N = int(T*fe) #nombre de points d'échantillonnage, N est entier
#définition de la liste temporelle discrétisée (c'est une matrice une
#ligne N-1 colonnes)
t = np.arange(0.,N)/fe
f0 = 1 #définition de la fréquence du signal en Hz
signal_discret = np.cos(2*np.pi*f0*t)  #définition de la liste du signal
#échantillonné donc discret
#définition de la liste modélisant le signal analogique "continu" en
#créant une liste temporelle de pas très petit
tcont = np.linspace(0, 2, 100)
signal_continu= np.cos(2*np.pi*f0*tcont)

#passage au spectre du signal avec la transformée de fourier rapide, à
#noter que l'on divise par la taille de la matrice pour normaliser la FFT
fourier = np.fft.fft(signal_discret)/np.size(signal_discret)

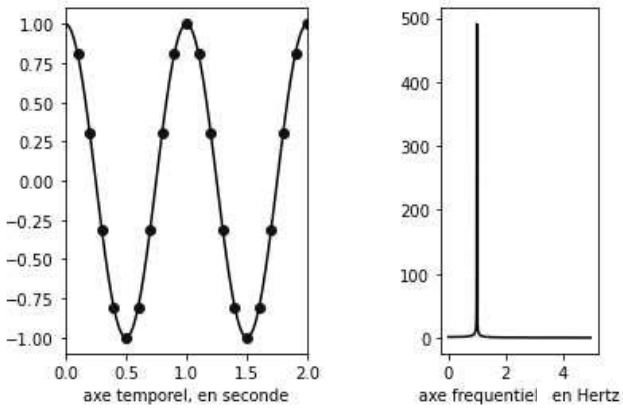
freq = np.arange(0.,N)*fe/N  #construction de l'axe fréquentiel
plt.figure()
plt.subplot(121) #on va tracer sur une ligne et deux colonnes avec ici
#les deux courbes du signal continu et discret après échantillonnage sur
#le même tracé
plt.plot(tcont,signal_continu,'k-') #figure le signal analogique continu
#avant échantillonnage
plt.plot(t,signal_discret,'bo') #les points (obtenus avec bo) représentent
#les valeurs discrètes aux instants successifs d'échantillonnage
plt.xlim(0,2)
plt.xlabel('axe temporel, en seconde')
plt.subplot(122)
plt.plot(freq,np.abs(fourier),'k-')
plt.xlabel('axe frequentiel en Hertz')
plt.show()
```



Le spectre replié étant totalement séparé du spectre du signal, il est aisé de s'en affranchir. Il suffit de ne tracer que la raie inférieure à `fe/2`. De façon à ne garder que les fréquences au-dessous de `fe/2` on remplace `freq = np.arange(0.,N)*fe/N` par :

```
freq = (np.arange(0.,N)*fe/N) [:N//2]
```

On obtient ainsi une matrice de taille `N/2+1`. Attention, dans le plot on trace le module de la FFT en ordonnée en fonction des fréquences en abscisse en veillant bien à ce que les deux matrices aient la même taille `N/2+1` : `plt.plot(freq,np.abs(fourier[0:N//2]),'k-')`



Il est possible d'obtenir le même résultat en utilisant la fonction `rfft` de `numpy` que l'on appelle par `np.fft.rrft` dans la ligne de code pour remplacer la fonction `fft` de `scipy` :

```
fourier = np.fft.rfft(cosinus)
```

Cette fonction est particulièrement efficace lorsqu'on veut réaliser le spectre d'une fonction réelle. En effet dans ce cas, les fréquences négatives sont complexes conjuguées des fréquences positives correspondantes et sont redondantes. La fonction `rfft` ne les traite pas (ce qui est plus rapide) et renvoie directement une matrice de taille `N/2+1` compatible avec l'axe fréquentiel coupé à `fe/2`. D'autre part, il n'est alors plus nécessaire de normaliser la FFT.

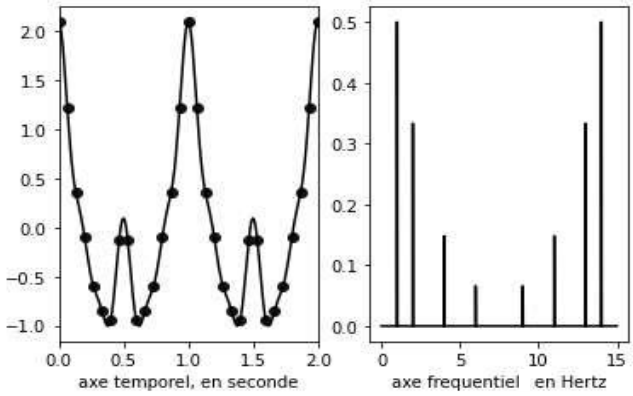
On envisage à présent un signal comportant le fondamental, la première harmonique de rang $n = 2$ pesant 2/3 du fondamental la suivante $n = 4$ pesant 8/27 et la dernière de rang $n = 6$ pesant 32/243. Pour un fondamental à 1 Hz, l'harmonique de rang 6 (la plus élevée) est de fréquence 6 Hz et une fréquence d'échantillonnage à 15 Hz permettra éviter les raies fantômes.

```
import numpy as np
from scipy import fftpack
from matplotlib import pyplot as plt
#définition de la fréquence d'échantillonnage en Hz correctement choisie
#pour éviter les raies fantômes
fe = 15
T = 100  #durée du signal en seconde
N = T*fe  #nombre de points d'échantillonnage
t = np.arange(0.,N)/fe  #définition de la matrice temporelle
f0 = 1  #définition de la fréquence du fondamental du signal en Hz

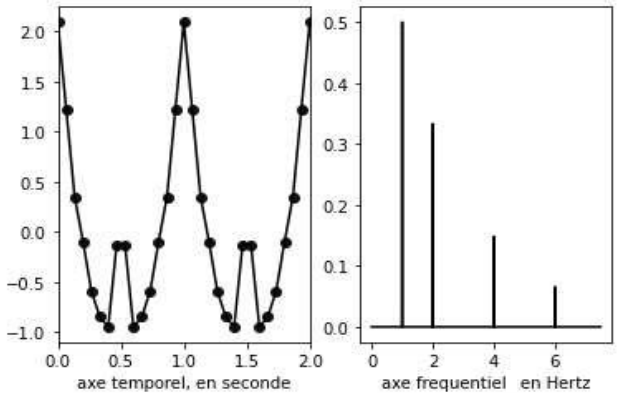
#définition de la matrice du signal temporel
fondamentale = np.cos(2*np.pi*f0*t)
harmonique2 = (2/3)*np.cos(4*np.pi*f0*t)
harmonique4 = (8/27)*np.cos(8*np.pi*f0*t)
harmonique6 = (32/243)*np.cos(12*np.pi*f0*t)
signal = fondamentale + harmonique2 + harmonique4 + harmonique6
```

```
#passage au spectre du signal avec la transformée de Fourier rapide que
#l'on divise par la taille de la liste du signal pour normaliser la FFT
fourier = fftpack.fft(signal)/np.size(signal)
#axe fréquentiel
axe_f = np.arange(0.,N)*fe/N

plt.figure()
plt.subplot(121)
plt.plot(t,signal,'bo')
plt.plot(t,signal,'k-')
plt.xlim(0,2)
plt.xlabel('axe temporel, en seconde')
plt.subplot(122)
plt.plot(axe_f,np.abs(fourier),'k-')
plt.xlabel('axe frequentiel en Hertz')
plt.show()
```

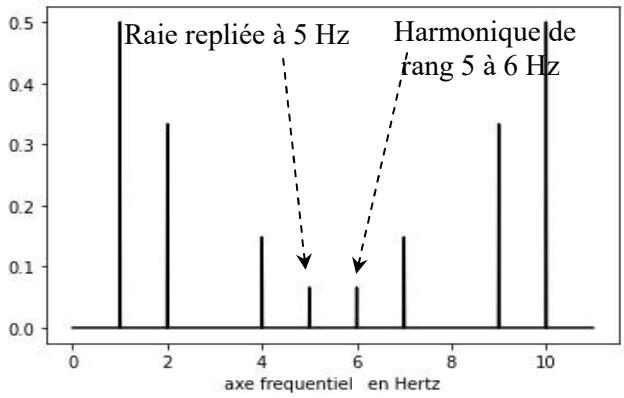


L'utilisation de `rfft` permet dans ce cas de s'affranchir des raies repliées en procédant comme dans l'exemple du spectre du cosinus. On obtient :



Par contre, un mauvais choix de fréquence d'échantillonnage, par exemple à 11 Hz conduit à l'apparition de raies fantômes en dessous de `fe/2`, comme on le voit ici avec l'apparition d'une raie fantôme de l'harmonique de rang 5 à la fréquence 11 – 6 = 5 Hz.

Il n'est pas possible de couper cette raie fantôme sans perdre en même temps la « vraie » raie d'ordre 5 et donc de l'information, comme l'illustre la figure suivante.



❑ Méthode 1.6. Filtre passe bas du premier ordre en Python

Il s'agit d'appliquer un filtrage passe-bas d'ordre 1 à un signal discret généré en Python comme l'illustre l'exemple de la méthode précédente. On parle de filtrage numérique, par opposition au filtrage analogique (par exemple le filtre *RC* passe bas du premier ordre agissant sur un signal analogique).

La fonction de transfert est de la forme : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$. Si $\omega << \omega_0$, alors on peut négliger le terme en $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ au dénominateur : $\underline{H} \approx 1$, l'équation de l'asymptote est : $G_{\text{dB}} = 20\log\left(\left|\underline{H}\right|\right) \approx 0$. Le gain maximum est obtenu pour $\omega = 0$: il est nul.

Si $\omega >> \omega_0$, alors : $\underline{H} \approx \dfrac{1}{\dfrac{j\omega}{\omega_0}} = \dfrac{\omega_0}{j\omega}$ soit $G_{\text{dB}} = 20\log(\omega_0) - 20\log(\omega)$.

Lorsque $\omega = \omega_0$, alors $\left|\underline{H}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, ω_0 est donc la pulsation de coupure et la fréquence de coupure est $\omega_0/2\pi$.

Il nous faut discrétiser la fonction de transfert pour coder le filtre numérique. Notons e et s les signaux d'entrée et de sortie du filtre. On commence en discrétisant la dérivée première comme suit : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{s(t) - s(t - T_e)}{T_e}$ avec $T_e = 1/f_e$ la période d'échantillonnage.

On peut alors exprimer $s(t)$ en fonction de $e(t)$ et $s(t - T_e)$ comme suit :

$$\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right)\underline{S} = \underline{E} \quad \text{soit :} \quad s + \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = e.$$

Ainsi, $s(t)+\frac{s(t)-s(t-T_e)}{\omega_0 T_e}=e(t)$ ou encore :

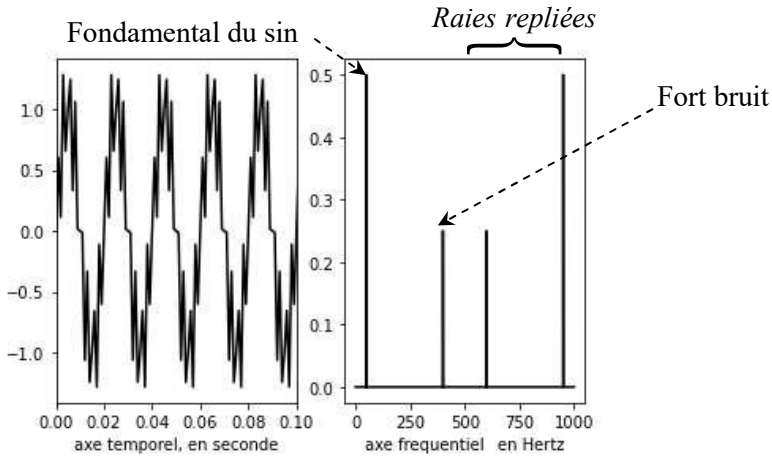
$s(t)=\frac{\omega_0 T_e\, e(t)+s(t-T_e)}{1+\omega_0 T_e}$. Comme $s(t)$ correspond à $Sf[i]$, $s(t-T_e)$ à $Sf[i-1]$ et $e(t)$ à $S[i]$, on obtient : $Sf[i]=\frac{\omega_0 T_e\, S[i]+Sf[i-1]}{1+\omega_0 T_e}$. On parle de filtre récursif car ici, la liste *Sf* est par itérations successives à partir d'elle-même. Il ne reste qu'à coder la boucle correspondante.

⇨ **Exercice 1.7**

Pour illustrer l'intérêt du filtrage numérique imaginons qu'on enregistre un signal sonore modélisé ici par une sinusoïde pure et qu'un bruit vienne entacher le signal. Si le signal est correctement échantillonné, il sera possible de couper ce bruit par application d'un filtre PB de fréquence de coupure adaptée. Si au contraire l'échantillonnage a été mal réalisé et qu'un repliement de spectre se manifeste, le filtrage sera inefficace. On commence par générer un signal sinusoïdal de fréquence 50 Hz fortement bruité à 400 Hz et correctement échantillonné :

```
#Appel des bibliothèques utiles
import numpy as np
from math import *
from scipy import fftpack
from matplotlib import pyplot as plt
#Définition de la fréquence d'échantillonnage en Hz choisie pour éviter
#les raies fantômes
fe = 1000
T = 10  #durée du signal en seconde
N = int(T*fe)  #nombre de point d'échantillonnage
t = np.arange(0.,N)/fe  #définition de la matrice temporelle
#Définition de la matrice du signal discrétisé
fondamentale = np.sin(2*pi*50.*t) #signal sinusoïdal à 50 Hz
bruit = (1./2)*np.sin(2*pi*400.*t) #bruit à 400 Hz
signal_discret = fondamentale + bruit
#Passage au spectre du signal avec la transformée de Fourier rapide que
#l'on divise la taille de la liste du signal pour normaliser la FFT
fourier = fftpack.fft(signal_discret)/np.size(signal_discret)

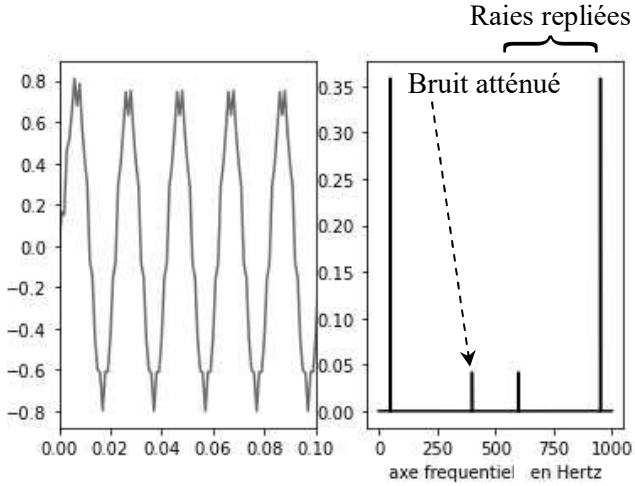
#Axe fréquentiel qui doit avoir la même taille de la matrice temporelle
axe_f = np.arange(0.,N)*fe/N
plt.figure()
plt.subplot(121)
plt.plot(t,signal_discret,'k-')
plt.xlim(0,.1)
plt.xlabel('axe temporel, en seconde')
plt.subplot(122)
plt.plot(axe_f,np.abs(fourier),'k-')
plt.xlabel('axe frequentiel en Hertz')
plt.show()
```



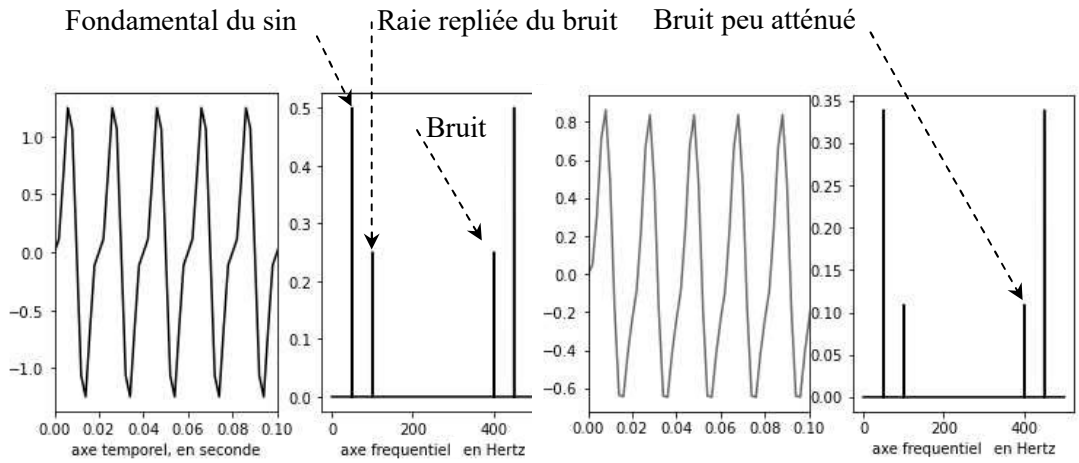
On applique à présent le filtre-passe bas récursif d'ordre 1. On constate que le bruit est atténué et que le signal en sortie du filtre se rapproche d'une sinusoïde (un filtre d'ordre plus élevé donnerait de meilleurs résultats) :

```
#Filtre passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure 60 Hz
#Définition de la fréquence de coupure du filtre et des coefficients de la
#fonction de transfert
w0 = 2*pi*60
W0Te=w0/fe
Sf=np.zeros(N) # initialisation de la liste du signal filtré
for i in range(1,N):
    Sf[i]=(Sf[i-1]+(W0Te)*signal_discret[i])/(1+W0Te)
fourierSf = fftpack.fft(Sf)/np.size(Sf)
plt.subplot(121)
plt.xlim(0,.1)
plt.plot(t,Sf)
plt.subplot(122)
plt.plot(axe_f,np.abs(fourie\
Sf),'k-')
plt.xlabel('axe frequentiel\
en Hertz')
plt.show()
```

On obtient le plot ci-contre.



En cas de mauvais échantillonnage, d'une part le signal n'est plus correctement imagé et d'autre part la raie fantôme du bruit posera problème car elle ne pourra pas être efficacement atténuée tout en conservant le fondamental (l'information).
Ci-dessous le même signal échantillonné à 500 Hz :



■ Comment élaborer un signal électrique modulé en fréquence ?

❑ Méthode 1.7. Utiliser la fonction de commande externe de la fréquence d'un GBF

Le GBF contient une entrée VCF IN (Voltage Control Frequency) permettant de faire varier la fréquence du signal de sortie. Une tension $u(t)$ appliquée à l'entrée VCF donne en sortie (OUTPUT) du GBF une tension de la forme $s(t) = s_0 \cos\left(2\pi f_m(t)\, t\right)$ avec $f_m(t) = f_0 + \alpha\, u(t)$. On prendra $u(t)$ variant lentement. La fréquence de $s(t)$ varie donc lentement autour de f_0 en suivant $u(t)$. On parle de **wobulation** du signal.

$\rightarrow$ Cette opération peut être utilisée en radio pour transmettre un signal par ondes électromagnétiques. Comme le son (converti en tension par un micro) a une fréquence trop basse pour être transmis correctement), on utilise une porteuse de haute fréquence f_0. La modulation de fréquence (FM) consiste à partir du signal utile $u(t)$ (plus lent) et moduler la fréquence de la porteuse $s(t)$ (voir figure 1). On obtient donc un signal de haute fréquence contenant l'information utile $u(t)$. Il faudra ensuite démoduler le signal après réception pour en extraire $u(t)$.

$\rightarrow$ Cette opération peut aussi être utile pour tracer de manière analogique le diagramme de Bode d'un filtre : un signal lent triangulaire $u(t)$ sert à faire varier linéairement la fréquence $f_m(t)$ du signal $s(t)$. $s(t)$ est envoyé en entrée du filtre à étudier. La sortie du filtre est envoyée dans un détecteur de crête (qui ne garde que son amplitude $y(t)$). Reste à tracer le diagramme de Bode sur l'oscilloscope en se plaçant en mode *XY*, avec $u(t)$ sur X et $y(t)$ sur Y (voir figure 2).

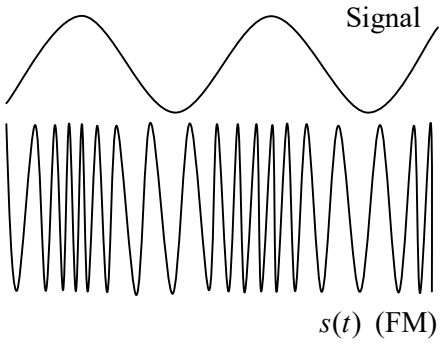


Figure 1

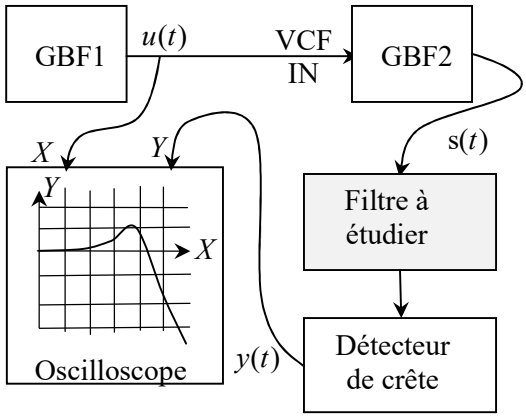


Figure 2

■■ Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Un oscillateur électronique est auto-oscillant : il n'a pas besoin d'alimentation pour fonctionner.	☐	☐
2.	Un oscillateur quasi-sinusoïdal est composé d'un amplificateur et d'un filtre passe-bande.	☐	☐
3.	On peut changer la valeur des composants (R , C …) d'un oscillateur quasi-sinusoïdal : cela ne fait que modifier la fréquence des oscillations.	☐	☐
4.	La condition de Barkhausen ne peut jamais être rigoureusement vérifiée en pratique.	☐	☐
5.	Nous passons aujourd'hui au « tout numérique » car le signal numérique est parfait.	☐	☐
6.	Pour enregistrer un concert sur un CD, un équipement numérique permet de s'affranchir totalement des signaux analogiques.	☐	☐
7.	Un signal sinusoïdal de 1 kHz est numérisé en vue d'une analyse spectrale. Une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz convient.	☐	☐
8.	Un signal créneau de 1 kHz est numérisé en vue d'une analyse spectrale. Une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz convient.	☐	☐
9.	Un signal contenant les fréquences 3 kHz, 6 kHz et 8 kHz est échantillonné à $f_e = 10$ kHz. En dessous de f_e, le spectre est alors composé, une fois numérisé, des fréquences 2 / 3 / 4 / 6 / 7 et 8 kHz.	☐	☐
10.	Une caméra (24 images par seconde) filme une voiture qui démarre, accélère, puis roule à vitesse constante. La roue semble d'abord tourner à l'endroit, puis finalement à l'envers à 1 tour par seconde. J'en déduis que la vitesse de rotation de la roue est de 23 tours par seconde.	☐	☐
11.	Une analyse spectrale d'un signal contenant les fréquences 100 Hz et 100 kHz est effectuée. Un échantillonnage à 500 kHz avec une acquisition de 1000 points peut convenir.	☐	☐
12.	Un spectre ne peut s'obtenir que par le calcul numérique de la transformée de Fourier.	☐	☐

■ Production d'un signal : l'oscillateur quasi-sinusoïdal

❑ Exercice 1.1. L'oscillateur à pont de Wien

Dans toute cette partie, on supposera les amplificateurs opérationnels idéaux, fonctionnant en régime linéaire.

1. On considère le quadripôle figure 1.

a) Préciser le modèle de l'amplificateur idéal en régime linéaire. Déterminer la fonction de transfert $\underline{F} = \underline{S} / \underline{E}$ en fonction de R_1 et R_2 quand l'ALI fonctionne en régime linéaire. Préciser les limitations pratiques que l'on peut rencontrer.

b) Tracer la caractéristique $s(e)$, c'est-à-dire le graphe représentant s en ordonnée en fonction de e en abscisse.

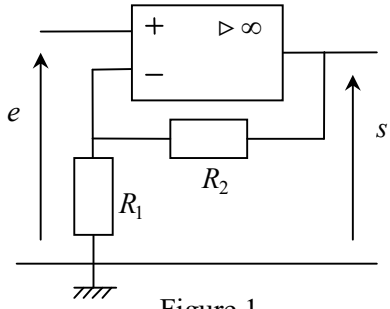


Figure 1

2. Étude du filtre de Wien ci-contre (figure 2).

Déterminer la fonction de transfert $\underline{G} = \dfrac{\underline{S}'}{\underline{E}'}$

Préciser les paramètres caractéristiques du filtre (gain maximum, facteur de qualité, pulsation particulière). Quelle est la fonction de ce quadripôle ?

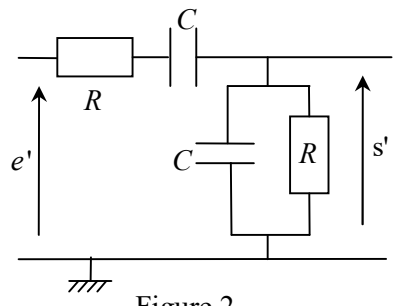


Figure 2

3. a) On couple le filtre de Wien avec le montage amplificateur du 1. (voir figure 3). On ne tient aucun compte de la réponse fréquentielle de l'amplificateur et on suppose le régime linéaire toujours établi. À partir des expressions $\underline{F}$ et $\underline{G}$, montrer qu'il peut théoriquement exister un signal sinusoïdal sans générateur basse fréquence pour une valeur $r = R_2 / R_1$ et une fréquence f particulière à déterminer.

b) En utilisant la relation imposée par l'amplificateur et l'équation différentielle du filtre de Wien, établir l'équation différentielle vérifiée par s'. Montrer qu'il peut exister un signal sinusoïdal sans générateur B.F. Retrouver les conditions du 3.a.

c) Calculer numériquement f si $R = 10\,\text{k}\Omega$ et $C = 4{,}8\,\text{nF}$. Peut-on légitimement ignorer la réponse fréquentielle de l'ALI ?

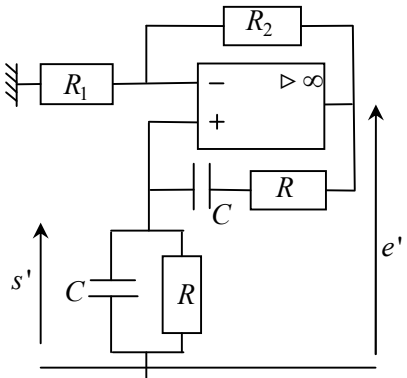


Figure 3

d) En pratique, on ne sait pas réaliser exactement la condition $r = R_2 / R_1$. À partir de l'équation différentielle précédente, montrer qu'une condition d'apparition des oscillations est $r = R_2 / R_1 > n$ (n entier à définir). Si on choisit $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$, les valeurs disponibles dans les catalogues étant $4{,}7\ \text{k}\Omega$, $5{,}6\ \text{k}\Omega$ et $10\ \text{k}\Omega$, quelle valeur doit-on prendre pour R_1 ?

e) On fait varier la valeur de R_1 de $10\ \text{k}\Omega$ à $1\ \text{k}\Omega$ à l'aide d'un potentiomètre. Décrire ce que l'on observe suivant la valeur de R_1. Donner l'amplitude des oscillations pour $e'(t)$ et $s'(t)$. Faire l'application numérique si la tension de saturation de l'ALI vaut 13 V.

D'après concours Centrale/Supélec

❑ Exercice 1.2. Oscillateur à inductance et double condensateur

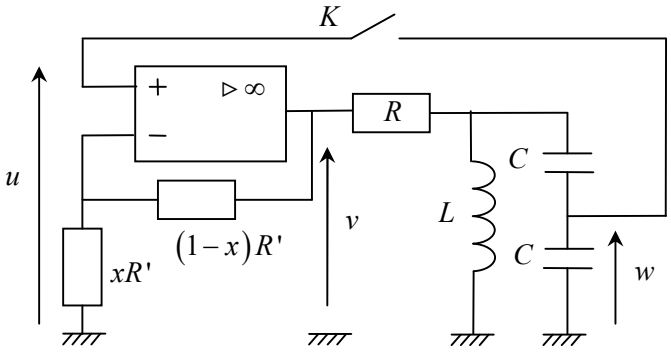
On considère le montage de la figure ci-dessous utilisant un potentiomètre de résistance totale R' et de coefficient $0 \le x \le 1$, une résistance R et une inductance L, deux condensateurs de capacités C, et un amplificateur opérationnel considéré comme idéal et fonctionnant en régime linéaire.

1. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, calculer en régime sinusoïdal de pulsation ω la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{w} / \underline{u}$.

Montrer que $\underline{H}$ s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}\right)},$$

avec $H_0 = \dfrac{1}{2x}$, $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{2L}}$ et $\Omega = \sqrt{\dfrac{2}{LC}}$.



À défaut, on pourra admettre ce résultat pour faire la suite.

En déduire l'équation différentielle liant $u(t)$ et $w(t)$ sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + b\,w = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

On exprimera les coefficients a, b, c en fonction de Ω, H_0, Q.

2. On ferme l'interrupteur afin de boucler le système. En traduisant la condition de Barkhausen, montrer que le circuit peut être le siège d'une tension w sinusoïdale pour une valeur particulière x_0 de x. Exprimer la pulsation ω_0 des oscillations en fonction de L et C.

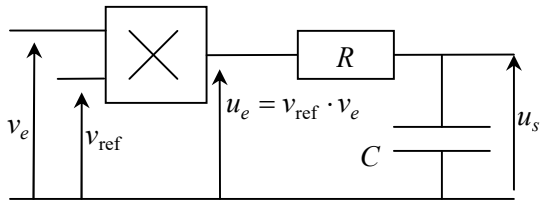
3. En pratique, il est impossible de réaliser exactement la condition $x = x_0$. Observe-t-on l'apparition des oscillations pour x légèrement inférieur ou supérieur à x_0 ? On pourra écrire l'équation différentielle satisfaite par $w(t)$.

4. Quel phénomène détermine l'amplitude des oscillations ?

D'après concours École de l'Air

❑ Exercice 1.3. Détection synchrone

Le détecteur synchrone étudié est un système analogique de détection de spectres qui permet d'extraire des signaux électriques faibles qui sont noyés dans le bruit de la mesure. Le montage électrique est donné figure ci-contre. La tension d'entrée $V_e(t)$ délivrée par le photo-détecteur est multipliée par un signal de référence $V_{\text{ref}}(t)$ et est ensuite filtrée.



1. Etudions tout d'abord le filtre RC. On se place en régime sinusoïdal. Associons à la grandeur $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$, la grandeur complexe $\underline{u} = U\exp j(\omega t + \varphi)$.

a) A partir d'un raisonnement qualitatif basé sur le comportement à haute et basse fréquence d'un condensateur, prévoir la nature du filtre étudié.

b) Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \underline{u}_s / \underline{u}_e$. Mettre le résultat sous la forme $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\,f / f_0}$. Exprimer H_0 et f_0 en fonction de R et C.

c) En déduire la fréquence de coupure du filtre notée f_c pour laquelle $|\underline{H}| = H_0 / \sqrt{2}$.

d) On note $\underline{H} = |\underline{H}|\exp(j\psi)$ où $|\underline{H}|$ et ψ représentent respectivement le module et l'argument de $\underline{H}$. Tracer l'allure du module $|\underline{H}|$.

e) Exprimer ψ en fonction de R, C et ω.

2. Le signal d'entrée $v_e(t)$ est la somme d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d'un terme de bruit que l'on notera $b(t)$ et que l'on supposera de fréquence f_b, $b(t) = b_0\cos(2\pi f_b t)$, soit $v_e(t) = V_e\cos(2\pi f t) + b(t)$. Le principe de la détection synchrone est alors d'accéder expérimentalement à une mesure du signal v_e tout en s'affranchissant du bruit.

Le signal de référence a la même fréquence f et s'écrit $v_{\text{ref}}(t) = V_{\text{ref}}\cos(2\pi f t)$.

a) Montrer que le produit $v_{ref}(t)\,v_e(t)$ s'écrit sous la forme d'une somme :

$v_{\text{ref}}(t)\,v_e(t) = \text{A} + B\cos(4\pi f t) + C\cos(2\pi(f_b - f)t) + C\cos(2\pi(f_b + f)t)$.

On explicitera les constantes A, B et C en fonction de V_e, V_{ref} et b_0. On remarquera en particulier que certaines de ces constantes ne s'expriment qu'en fonction de V_e et V_{ref}, ce qui, connaissant V_{ref}, permettrait de mesurer V_e en s'affranchissant du bruit.

b) Supposons que le signal parasite a une fréquence $f_b = 600\,\text{Hz}$ et que la fréquence f du signal de référence est $f = 500\,\text{Hz}$. Quelles sont les fréquences des deux composantes sinusoïdales du signal parasite que l'on obtient à la sortie du multiplieur ?

c) Le circuit RC étant composé d'éléments linéaires, on peut appliquer le principe de superposition. Rappeler l'énoncé du principe de superposition. En déduire comment on pourrait exprimer le signal de sortie $u_s(t)$, sans chercher à l'expliciter.

d) Le signal parasite a une amplitude b_0 10 fois plus importante que l'amplitude V_e du signal que l'on cherche à mesurer. Si on souhaite atténuer l'amplitude de la composante de $u_s(t)$ associée au bruit parasite (c'est-à-dire reliée à l'amplitude b_0 de plus basse fréquence) par un facteur 1000 grâce au filtre RC, quelle valeur numérique doit-on choisir pour f_c ?
Quel est alors l'intérêt d'un tel filtre ?

D'après concours Banque Agro

■ Acquisition et traitement numérique du signal

❑ Exercice 1.4. Critère de Nyquist-Shannon et repliement de spectre

Une tension analogique périodique $e(t)$ est numérisée avec une fréquence d'échantillonnage f_e.

1. Rappeler le critère de Nyquist-Shannon.

2. Les fréquences f_1 et f_2 valent respectivement 1 kHz et 200 Hz, et on note $T_2 = 1/f_2$. Dans chacun des cas suivants, donnez la fréquence minimale d'échantillonnage f_e à appliquer pour le signal $e_i(t)$ soit correctement échantillonné :

a) $e_1(t) = E\cos(2\pi f_1 t)$

b) $e_2(t) = E\sin(2\pi f_2 t)$

c) $e_3(t) = E\cos\left(2\pi(f_1 + f_2)t\right)$

d) $e_4(t) = E\left(\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right)$

e) $e_5(t) = E\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$

f) $e_6(t) = E\cos^2(2\pi f_1 t)$

g) $e_7(t)$ signal créneau de période T_2 dont la série de Fourier s'écrit

$$e_7(t) = \frac{2E}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left(2\pi(2k-1)f_2 t\right)\right).$$

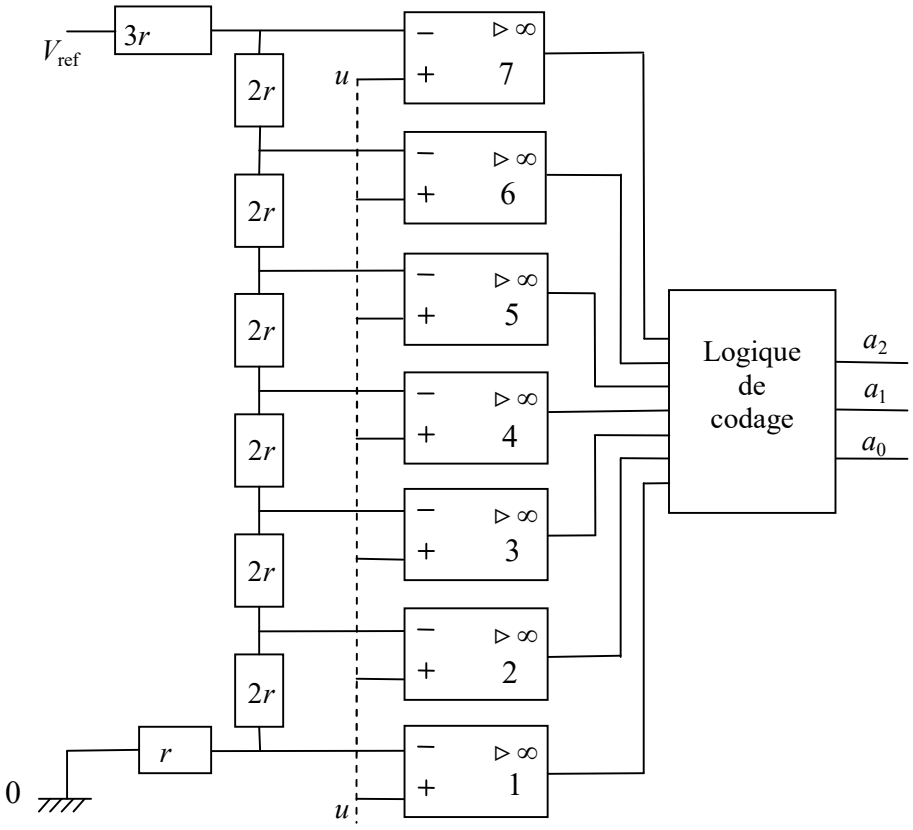
3. Dans le cas du signal créneau $e_7(t)$, une fréquence d'échantillonnage de 1,5 kHz a été choisie. Convient-elle ? Quelles sont les fréquences parasites obtenues en dessous de $f_e/2$?

4. Dans ce cas, quelle solution proposez-vous si l'on accepte de perdre les harmoniques dont l'amplitude est inférieure à 5% de celle du fondamental ?

❑ Exercice 1.5. Convertisseur analogique/numérique parallèle 3 bits

La figure ci-dessous représente un convertisseur $N = 3$ bits, qui convertit une tension u qui vérifie $0 < u < V_{ref}$. Il est composé de 7 comparateurs, d'une logique de commande et de résistances de valeur r, $2r$ et $3r$. Les comparateurs ont une impédance d'entrée infinie et

délivrent un signal logique qui est au niveau haut lorsque la patte reliée à u a un potentiel supérieur à celui de la patte reliée à V_{ref} par l'intermédiaire des résistances et au niveau bas sinon.



1. Expliquer le fonctionnement de ce convertisseur.

On note $a_2\, a_1\, a_0$ le nombre binaire obtenu en sortie du numériseur, et s_N sa conversion en base décimale. Soit u_N la tension reconstituée de u à partir de s_N. Comment passe-t-on de s_N à u_N ?

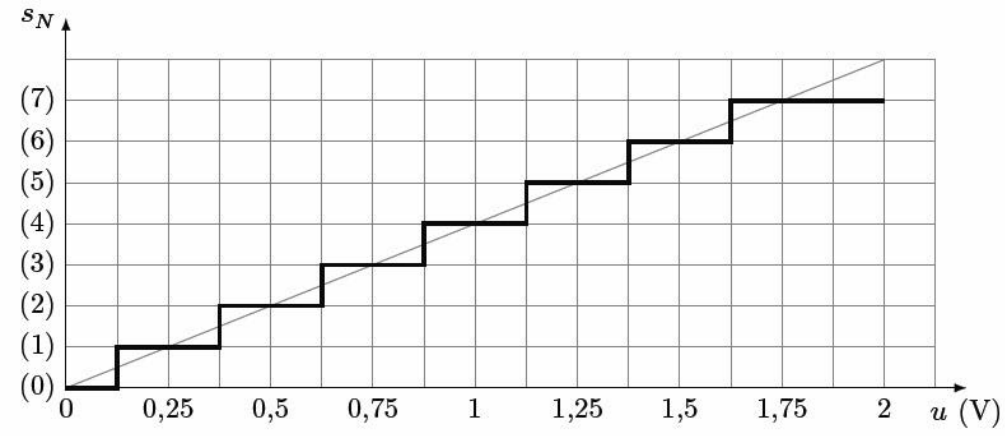
2. Pour un convertisseur 8 bits, combien faut-il de comparateurs ?

La figure suivante représente le signal numérisé s_N en fonction de la tension à numériser u.

3. Que vaut N nombre de bits dans l'exemple donné ?

4. Donner les valeurs de s_N en base 2 et de u_N pour $u = 1{,}28$ V

5. Quel type d'erreur induit la numérisation ? Préciser l'écart maximal entre la valeur de la tension numérisée u_N et u.



On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un composant intégré, le LMF100, réalise différents types de filtrages, selon les branchements qu'on lui applique

6. Quel type de filtre doit-on utiliser et pourquoi ? Préciser la bande de fréquences qu'il doit sélectionner.

7. Proposer une valeur de la fréquence d'échantillonnage adaptée à la situation.

D'après concours Centrale-Supélec

❑ Exercice 1.6. Le CD audio

Nous cherchons à enregistrer un concert sur un CD audio, en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), puis filtré par un passe-bas, et enfin échantillonné avec une fréquence f_e. La fréquence d'échantillonnage d'un CD audio est de $f_e = 44100\,\text{Hz}$, et la quantification est faite sur 16 bits (chaque mesure est codée sur 16 bits).

1. Quelle est la gamme de fréquence audible ? Quelle doit-être alors la fréquence d'échantillonnage minimale pour enregistrer tout le spectre audible ? La fréquence $f_e = 44100\,\text{Hz}$ est-elle compatible ?

2. On choisit tout d'abord de ne pas mettre le filtre passe-bas en amont du CAN. Un son de fréquence $f_1 = 43000\,\text{Hz}$ est présent lors du concert.

a) Ce son est-il audible lors du concert ? Que deviendra-t-il après échantillonnage ? En quoi cela pose problème ?

b) Expliquer en quoi l'ajout du filtre passe-bas en amont de l'échantillonneur peut résoudre ce problème. Estimer sa fréquence de coupure.

c) Quel autre problème peut apporter à son tour ce filtre ? Pour atténuer ce problème, on augmente l'ordre du filtre, et on effectue un sur-échantillonnage (f_e un peu plus élevée que prévu par le critère de Shannon). Expliquer pourquoi.

3. On cherche maintenant à calculer la durée d'enregistrement que peut contenir un CD audio enregistrable du commerce, soit 700 Mo.

a) Sachant que l'enregistrement s'effectue à $f_e = 44100\,\text{Hz}$ sur 16 bits d'échantillonnage, et que l'on enregistre en stéréo, donc 2 sons (2 signaux), de combien de bits a-t-on besoin pour enregistrer 1 seconde de concert ?

b) Quelle durée de concert peut-on enregistrer sur le CD de 700 Mo ? On rappelle que 1 octet vaut 8 bits.

c) Il est possible de compresser le signal pour l'enregistrer au format MP3. La fréquence d'échantillonnage et la quantification sont inchangées, mais un traitement numérique du signal repère les redondances pour ne les écrire qu'une seule fois, et enlève les signaux peu audibles. Le taux de compression peut aller de 4 à 20. Quelle durée de musique peut-on alors enregistrer sur 700 Mo ?

❑ Exercice 1.7. Filtre numérique à moyenne glissante

L'objectif de ce problème est de réaliser un filtre numérique et de comparer ses propriétés avec le filtre analogique analogue.

Pour cela, on réalise un filtre à moyenne glissante. Un signal d'entrée $e(t)$ analogique est échantillonné à la fréquence $f_e = 1000\,\text{Hz}$. On appelle e_k la valeur de l'échantillon n°k : $e_k = e(t = kT_e)$ avec $T_e = 1/f_e$ la période d'échantillonnage du CAN.

Commençons par étudier un filtre à moyenne glissante sur $n = 4$ échantillons dont le signal de sortie s_k est la moyenne des 4 derniers échantillons de e : $s_k = \left(e_k + e_{k-1} + e_{k-2} + e_{k-3}\right)/4$.

1. On applique un échelon de tension unitaire en entrée : $e(t) = 0$ pour $t \le 0$ et $e(t) = 1$ pour $t \ge 0$. Donner les valeurs de s_k obtenues et les représenter graphiquement. En déduire le type de filtre obtenu ainsi que la valeur du gain $G = |H|$ dans sa bande passante. Ce résultat était-il prévisible ?

2. Afin de tracer la courbe de gain $G(f)$ en fonction de la fréquence, on place en entrée un signal sinusoïdal de la forme $e(t) = 1\cos(2\pi f t)$ (en volt). On teste successivement les fréquences $f = \frac{f_e}{4}, \frac{f_e}{3}, \frac{f_e}{2}, \frac{2f_e}{3}, \frac{3f_e}{4}$ et f_e.

a) Pour chaque fréquence, remplir un tableau avec les valeurs de e_k pour $0 \le k \le 8$ et les valeurs de s_k correspondantes. En déduire l'amplitude du signal sinusoïdal de sortie ainsi que le gain pour chacune des fréquences testées. Reporter ces valeurs sur un diagramme du gain en fonction de la fréquence.

b) Le filtrage des hautes fréquences est-il progressif comme un passe-bas analogique ? Y a-t-il des fréquences rejetées (complètement coupées) ?

c) La fréquence f_e est-elle filtrée comme devrait le faire un passe-bas ? Expliquer en quoi ce résultat était prévisible compte tenu de l'échantillonnage. Quelle précaution prend-on en amont de l'échantillonnage pour éviter ce problème ?

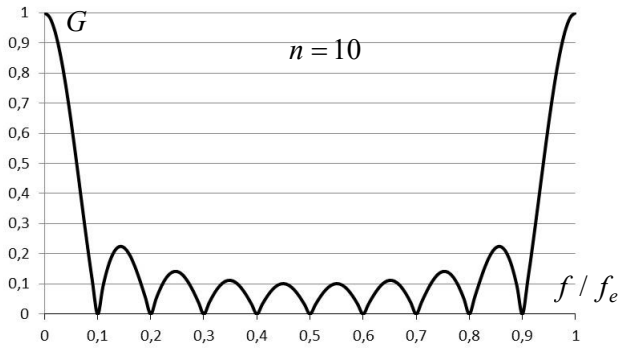
3. Pour affiner le tracé du diagramme de gain, on effectue à l'aide d'une feuille de calcul les mêmes calculs que dans la question précédente pour diverses fréquences. Le tableau reporté ci-dessous a été effectué à l'aide d'une feuille Excel pour différentes fréquences f et différents k. La formule entrée pour chaque case est :

$$s_k = \cos(2\pi f\, k / 1000) + \cos(2\pi f\,(k-1)/1000)$$
$$+ \cos(2\pi f\,(k-2)/1000) + \cos(2\pi f\,(k-3)/1000)$$

Compléter le diagramme du gain et en déduire son allure.
Estimer la fréquence de coupure à $-3\,\text{dB}$ de ce filtre.

	k=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f=100	0,45	0,73	0,73	0,45	0,00	-0,45	-0,73	-0,73	-0,45	0,00	0,45	0,73	0,73	0,45	0,00
200	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25	-0,08	0,20	0,20	-0,08	-0,25
300	0,17	-0,11	-0,11	0,17	0,00	-0,17	0,11	0,11	-0,17	0,00	0,17	-0,11	-0,11	0,17	0,00
400	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25	0,20	-0,08	-0,08	0,20	-0,25

4. Afin de voir si l'on peut généraliser les résultats précédents, le même travail a été effectué avec une moyenne glissante sur $n = 10$ échantillons. Le tracé du gain est reproduit ci-contre. Estimer à nouveau la fréquence de coupure à $-3\,\text{dB}$.

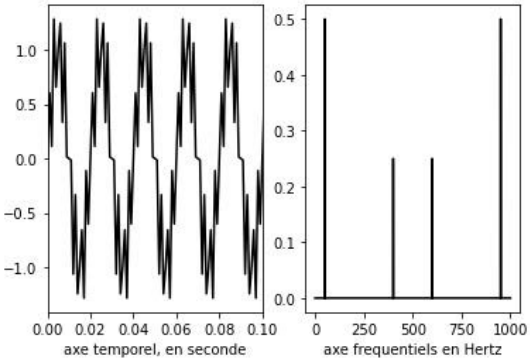


Le filtre semble-t-il plus efficace si l'on augmente n ? Expliquer le repliement de G observé.
Vérifier par lecture de diagramme que les fréquences rejetées sont les multiples de $(f_e / 10)$.
On admettra que ce résultat se généralise, et que les fréquences rejetées pour une moyenne glissante à n échantillons sont les fréquences multiples de (f_e / n), à l'exception de f_e.

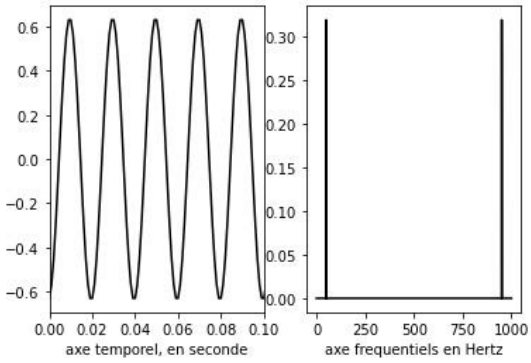
5. a) Filtrage numérique à moyenne glissante en Python. On envisage le cas d'un signal sonore enregistré puis échantillonné. Il est modélisé ici par une sinusoïde pure de fréquence 50 Hz et d'un bruit à 400 Hz venant entacher ce signal. Si le signal est échantillonné à 1000 Hz, montrer qu'il est possible de couper ce bruit par application d'un filtre à moyenne glissante sur 10 échantillons.

b) Proposer un script en Python permettant tout d'abord de générer le signal discret modélisant le signal bruité échantillonné puis de tracer le signal en fonction du temps ainsi que son spectre (on s'appuiera sur la méthode 1.6).

c) Coder ensuite le filtre à moyenne glissante sur 10 échantillons. On appellera `Sfmoy` la matrice du signal filtré. Coder le script permettant de tracer le signal en fonction du temps ainsi que son spectre.
On devra obtenir les plots suivants dans lesquels on note l'effet du filtrage permettant de totalement s'affranchir du bruit :



Avant filtrage



Après filtrage

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1. Question 2 : penser à introduire $\underline{Z}_{eq} = R \,//\, C$ pour faciliter les calculs, puis penser à écrire $\underline{G}$ sous forme normalisée pour en déduire les caractéristiques du filtre.
Exercice 1.2. Question 1 : faire le calcul en 2 étapes. Commencer par calculer $\underline{v}_L$ aux bornes de la bobine en utilisant $\underline{Z}_{eq} = L \,//\, (C \text{ série } C)$, puis en déduire $\underline{\omega}$.
Exercice 1.3. Question 2.a : transformer le produit de cosinus en somme.
Exercice 1.6. Question 1 : respecter le critère de Shannon ; Question 2 : il y a repliement de spectre.
Exercice 1.7. Une moyenne enlève les variations rapides, donc les basses fréquences.

■■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12
faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux

1. Certes, le montage n'a pas besoin de GBF en entrée, mais il doit bien trouver son énergie quelque part ! C'est l'alimentation continue de l'ALI qui la fournit.

3. Si l'on change la valeur d'un composant, l'oscillateur peut ne plus osciller du tout : il y a toujours une condition à vérifier sur la valeur des composants !

5. La conversion analogique-numérique s'accompagne de pertes d'information : nombre limité de niveaux de quantification, et discrétisation temporelle. Ceci peut apporter de mauvaises surprises, comme les repliements de spectres !

6. Le signal acoustique est analogique. Il devra de d'abord être converti en tension électrique analogique, puis être filtré (filtre analogique) pour respecter le critère de Shannon. Le traitement numérique n'intervient qu'après le CAN.

8. Le critère de Nyquist-Shannon est certes vérifié pour le fondamental, mais pas pour les harmoniques supérieures qui sont nombreuses pour un créneau.

9. Le signal numérisé contient les 3 fréquences f_i de départ mais aussi les 3 fréquences $f_e - f_i$ dues au repliement.

11. La fréquence d'échantillonnage respecte le critère de Nyquist-Shannon, puisque la fréquence d'échantillonnage est 5 fois la haute fréquence. Par contre, la durée d'acquisition est insuffisante : $\tau = N / f_e = 2\,\text{ms}$, alors que la période de la basse fréquence est $T_0 = 1/100\,\text{s} = 10\,\text{ms}$.

12. Les exemples d'analyse spectrale analogique sont nombreux : l'oreille sépare les sons graves et aigus, l'œil et le cerveau distinguent les couleurs ; les gouttes d'eau (ou le prisme de verre) séparent les couleurs (arc-en-ciel). En électronique, le détecteur synchrone permet d'extraire le contenu spectral….

❑ Les erreurs classiques

→ Se lancer dans les calculs d'un oscillateur électronique sans penser à séparer le montage en blocs : l'amplificateur et le filtre passe-bande.

→ Calculer la tension en sortie d'un ALI en appliquant un pont diviseur de tension en sortie de l'ALI : $i_s \neq 0$!

→ Oublier de brancher l'alimentation continue d'un ALI en travaux pratiques. Même si l'alimentation n'est jamais représentée sur un schéma électrique, elle doit obligatoirement être branchée car c'est elle qui fournit l'énergie de l'oscillateur.

→ Penser que le spectre donné par un logiciel est vraiment le spectre du signal analysé ! Ce n'est le cas que si les paramètres ont été correctement choisis. Une durée d'acquisition trop courte ou une durée d'échantillonnage trop longue peuvent donner des spectres « fantaisistes » !

→ Prendre une fréquence d'échantillonnage double de la fréquence du fondamental. En effet, un signal périodique peut contenir de nombreuses harmoniques supérieures. Il faut alors choisir une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la plus grande des fréquences présentes dans le spectre du signal. A défaut de pouvoir augmenter suffisamment f_e (fréquence d'acquisition imposée pour un oscilloscope donné par exemple), il faut filtrer le signal à $f_e / 2$ à l'aide d'un passe-bas, avant de le numériser. Mais attention à la perte d'information si des hautes fréquences sont enlevées !

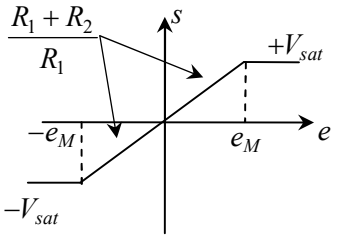
Exercice 1.1

1. a) Le modèle de l'ALI idéal est : $i^+ = i^- = 0$ (résistance d'entrée infinie), gain différentiel $\mu_0 \to \infty$, et résistance de sortie nulle. Si en plus il est en fonctionnement linéaire : $V^+ = V^-$.

On a alors $\underline{E} = \underline{V}^+ = \underline{V}^- = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\underline{S}$ soit $\underline{F} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$.

Les limitations pratiques sont (entre autres) : le courant de sortie de l'ALI ne peut pas dépasser une valeur limite, la tension de sortie ne peut pas dépasser $\pm V_{sat}$, et l'ALI se comporte comme un passe-bas (limitation en fréquence).

b) La caractéristique $s(e)$ est tracée ci-contre avec $e_M = V_{sat} / F$.



2. Appliquons un pont diviseur de tension : $\underline{G} = \dfrac{\underline{S}'}{\underline{E}'} = \dfrac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R + 1/jC\omega}$ avec $\underline{Z}_{eq} = R//C$:

$\dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{R} + jC\omega = \dfrac{1 + jRC\omega}{R}$. Il vient :

$$\underline{G} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}}\left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}$$ qui s'écrit sous la forme $\underline{G} = \dfrac{G_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$,

avec $\omega_0 = 1/RC$, $\boxed{G_0 = 1/3 \text{ et } Q = 1/3}$. C'est un **filtre passe-bande** du second ordre de pulsation de résonance ω_0, de gain maximum $\left|G(\omega = \omega_0)\right| = G_0$ (en ω_0) avec Q le facteur de qualité.

> ✎ *Il est préférable d'écrire $\underline{G}$ sous sa forme normalisée pour trouver les caractéristiques du filtre plutôt que de se lancer dans de lourds calculs de maximum, bande passante, etc.*

3. a) D'après le 1. : $\underline{F} = \underline{S} / \underline{E}$, et d'après le 2 : $\underline{G} = \underline{S}'/\underline{E}'$.

Il peut exister une solution ni nulle ni « infinie » pour $\underline{F} \cdot \underline{G} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} \cdot \dfrac{\underline{S}'}{\underline{E}'} = 1$.

> ✎ *On retrouve la condition de Barkhausen du cours.*

⇨ *Méthode 1.1*

Cette égalité donne $\frac{R_1+R_2}{R_1}=3+j\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$. L'égalité des parties réelles est $\frac{R_1+R_2}{R_1}=3$ soit $r=\frac{R_2}{R_1}=2$ et l'égalité des parties imaginaires impose $\omega=\omega_0=1/RC$, pulsation de l'oscillateur. La fréquence d'oscillation est $f=1/(2\pi RC)$.

✎ *La pulsation de l'oscillateur est la pulsation de résonnance du passe-bande.*

b) L'amplificateur impose $s=\frac{R_1+R_2}{R_1}e$. De plus $\frac{\underline{S}'}{\underline{E}'}=\frac{\underline{E}}{\underline{S}}=\frac{jRC\omega}{1+3jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$ pour le filtre de Wien, dont la transposition temporelle est : $R^2C^2\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}+3RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+e=RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. En remplaçant s par $(R_1+R_2)/R_1\,e$, l'équation différentielle devient :

$$R^2C^2\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}+RC\left(3-\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+e=0$$

Il aurait été maladroit de rechercher l'équation différentielle en repartant du début, avec les lois de Kirchhoff. La méthode mixte fréquentielle/temporelle en transposant temporellement les fonctions de transfert est moins calculatoire !

⇨ *Méthode 1.2*

Des oscillations sinusoïdales apparaissent pour $(R_1+R_2)/\mathrm{R}_1=3$ soit $r=2$. La pulsation des oscillations est alors $\omega=1/RC$ et la fréquence est $f=1/(2\pi RC)$.

c) A.N. : $f=3{,}3\,\mathrm{kHz}$ ce qui reste très inférieur à la fréquence de coupure de l'ALI avec rétroaction (de l'ordre de 10^5 Hz).

d) L'objectif est que le « bruit » environnant soit amplifié. C'est ainsi que s'amorcent les oscillations. La solution doit donc être légèrement divergente. On recherche donc à avoir $3-(R_1+R_2)/R_1\le 0$ soit $r\ge n=2$. Si $R_2=10\,\mathrm{k\Omega}$, R_1 doit être légèrement inférieure à $R_2/2$. On choisira la résistance de $4{,}7\,\mathrm{k\Omega}$.

e) Quand R_1 est supérieure à $5\,\mathrm{k\Omega}$, il n'y a aucun signal, ni en e' ni en s'. Quand R_1 passe légèrement en dessous de $5\,\mathrm{k\Omega}$, le montage se met à osciller tout seul. Le signal obtenu est proche d'un sinus, dont les sommets sont « aplatis » (écrêtés par la saturation). Si on continue encore à diminuer R_1, le signal devient fortement divergent, et va basculer alternativement de la saturation $+V_{sat}$ à la saturation $-V_{sat}$. Le signal obtenu ressemblera plus au signal carré de l'oscillateur à relaxation. Dans tous les cas non nuls, l'amplitude de l'oscillation crête-crête pour $e'(t)$ est $2\cdot 13=26\,\mathrm{V}$ et pour $s'(t)$: $26/3=8{,}7\,\mathrm{V}$.

⇨ *Méthode 1.2*

Exercice 1.2

1. L'ALI est considéré idéal et fonctionne en régime linéaire, donc $\underline{u} = \underline{V}^+ = \underline{V}^- = \left(xR'/R'\right)\underline{v} = x\underline{v}$: on reconnait l'amplificateur $A = \dfrac{\underline{v}}{\underline{u}} = \dfrac{1}{x}$. (1)

Notons C_{eq} la capacité (C série C) et $\underline{Z}_{eq}$ l'impédance équivalente à $L // C_{eq}$, et v_L la tension aux bornes de L. $\dfrac{1}{jC_{eq}\omega} = \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}$ donc $C_{eq} = \dfrac{C}{2}$.

$C_{eq} \neq C + C$ *pour des condensateurs en série !*

Un pont diviseur de tension donne $\underline{v}_L = \dfrac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R}\underline{v} = \dfrac{1}{1 + R/\underline{Z}_{eq}}\underline{v}$ avec $\dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{jL\omega} + jC_{eq}\omega$,

donc $\underline{v}_L = \dfrac{1}{1 + jRC_{eq}\omega + R/jL\omega}\underline{v} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega/2 + R/jL\omega}\underline{v}$. (2)

Enfin, un nouveau pont diviseur de tension donne $\underline{w} = \dfrac{1/jC\omega}{1/jC_{eq}\omega}\underline{v}_L = \dfrac{\underline{v}_L}{2}$ (3).

Partant de (3), en remplaçant v_L à l'aide de (2), puis remplaçant v à l'aide de (1), on a : $\underline{w} = \dfrac{1/2}{1 + jRC_{eq}\omega + R/jL\omega} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \underline{u}$ (4). On en déduit $\underline{H} = \dfrac{\underline{w}}{\underline{u}} = \dfrac{1/(2x)}{1 + jRC\omega/2 + R/jL\omega}$. (4)

L'identification avec la forme demandée donne $H_0 = \dfrac{1}{2x}$ ainsi que $\dfrac{Q}{\Omega} = \dfrac{RC}{2}$ et $Q\Omega = \dfrac{R}{L}$ soit $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{2L}}$ et $\Omega = \sqrt{\dfrac{2}{LC}}$.

Pour l'équation différentielle, l'écriture normalisée est ramenée sous forme de polynôme de $(j\omega)$ en multipliant numérateur et dénominateur par $(j\omega)$: $\dfrac{\underline{w}}{\underline{u}} = \dfrac{j\omega H_0}{j\omega + (j\omega)^2 Q/\Omega + Q\Omega}$ soit,

avec les notations de Laplace $p = j\omega$: $\left[p^2 + (\Omega/Q)p + \Omega^2\right]w = \left[(\Omega H_0/Q)p\right]u$.

On obtient l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + a\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + bw = c\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ avec $a = \dfrac{\Omega}{Q}$, $b = \Omega^2$ et $c = \dfrac{\Omega H_0}{Q}$.

2. L'amplificateur est $\underline{A} = \dfrac{\underline{v}}{\underline{u}}$ et le filtre est $\underline{\beta} = \dfrac{\underline{w}}{\underline{v}}$. Or $\underline{H} = \dfrac{\underline{w}}{\underline{u}} = \dfrac{\underline{v}}{\underline{u}} \cdot \dfrac{\underline{w}}{\underline{v}} = \underline{A} \cdot \underline{\beta}$: la condition de Barkhausen $\underline{A} \cdot \underline{\beta} = 1$ s'écrit simplement $\underline{H} = 1$ (ce qui est normal puisque $\underline{w} = \underline{u}$ avec l'interrupteur fermé). Partant de (4), $\underline{H} = 1$ donne $\dfrac{1}{2x} = 1 + jR\left(\dfrac{C\omega}{2} - \dfrac{1}{L\omega}\right)$.

⇨ *Méthode 1.1*

- De l'égalité des parties réelles, on déduit $x_0 = \dfrac{1}{2}$ condition d'oscillation.

Corrigé

• De l'égalité des parties imaginaires, on déduit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2}{LC}}$ pulsation des oscillations.

3. Repartons de l'équation différentielle du 1, avec $u = w$ car l'interrupteur est fermé : $\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + (1 - H_0)\dfrac{\Omega}{Q}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \Omega^2 w = 0$. Pour observer des oscillations, il faut que $H_0 > 1$ légèrement, soit $H_0 = \dfrac{1}{2x} > 1$ ou encore $x < 0{,}5$ légèrement.

⇨ *Méthode 1.2*

4. Ce sont les non linéarités (saturations en tension de l'ALI) qui vont limiter la divergence, donc l'amplitude des oscillations.

Exercice 1.3

1. a) A basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : $i = 0$ et donc $u_s = u_e$.

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil : la sortie est donc court-circuitée, soit $u_s = 0$.

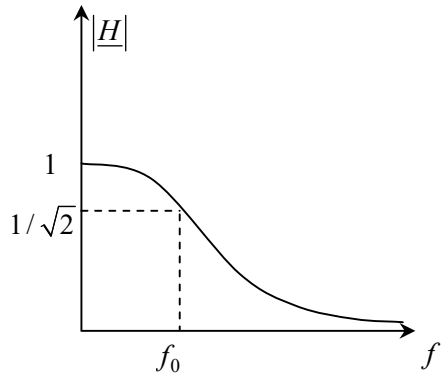
Le filtre de sortie est donc un **passe-bas**.

b) Un pont diviseur de tension donne : $\underline{u_s} = \dfrac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_c} + \underline{Z_R}}\underline{u_e}$ soit $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$, qui peut s'écrire sous la forme $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\, f / f_0}$ avec $H_0 = 1$ et $f_0 = \dfrac{1}{2\pi R C}$.

c) À la pulsation de coupure : $|\underline{H}|_{\text{coup}} = |\underline{H}|_{\max} / \sqrt{2}$. Ici $|\underline{H}|_{\max} = H_0$ et donc $|\underline{H}|_{\text{coup}} = \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + (f_c / f_0)^2}} = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $f_c = f_0$.

d) On a $|\underline{H}| = \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + (f / f_0)^2}}$.

C'est une fonction décroissante de f qui part de 1 (gain statique) pour tendre vers 0 à hautes fréquences.



e) $\psi = \arg\left(\dfrac{1}{1 + jRC\omega}\right) = \arg(1) - \arg(1 + jRC\omega)$. Or $\arg(1) = 0$ et $\arg(1 + jRC\omega) = \arctan(RC\omega)$ donc $\psi = -\arctan(RC\omega)$.

2. a) En multipliant $v_{\text{ref}}(t)$ par $v_e(t)$, et en développant le produit :

$$v_{\text{ref}}(t)v_e(t) = V_{\text{ref}}\cos\left(2\pi f\,t\right)\left(V_e\cos\left(2\pi f\,t\right)+b_0\cos\left(2\pi f_b\,t\right)\right)$$
$$= V_{\text{ref}}V_e\cos\left(2\pi f\,t\right)\cos\left(2\pi f\,t\right)+V_{\text{ref}}b_0\cos\left(2\pi f\,t\right)\cos\left(2\pi f_b\,t\right)$$

Sachant que $\cos a\,\cos b = 1/2\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$, on en déduit :

$$v_{\text{ref}}(t)\,v_e(t) = \frac{V_{\text{ref}}V_e}{2}+\frac{V_{\text{ref}}V_e}{2}\cos\left(4\pi f\,t\right)+\frac{V_{\text{ref}}b_0}{2}\cos\left(2\pi\left(f+f_b\right)t\right)+\frac{V_{\text{ref}}b_0}{2}\cos\left(2\pi\left(f-f_b\right)t\right)$$

et donc $A = B = \frac{V_{\text{ref}}V_e}{2}$, et $C = \frac{V_{\text{ref}}b_0}{2}$. A et B ne s'expriment qu'en fonction de V_e et V_{ref}.

b) Les fréquences des 2 composantes obtenues en sortie de multiplieur à cause du signal parasite sont $f+f_b = 1100$ Hz et $f-f_b = 100$ Hz.

c) Théorème de superposition : si l'on connait le signal de sortie s_i réponse à chaque entrée e_i, la réponse au signal d'entrée $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$ est $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

Ici, il y a 4 termes dans le signal d'entrée, de fréquences respectives $f_i = 0$, $2f = 1\,000$ Hz, $f+f_b = 1100$ Hz et $f-f_b = 100$ Hz. Pour chacun des 4 termes $e_i = A_i\cos\left(2\pi f_i\,t\right)$ en entrée, on a en sortie : $s_i = A_i\frac{H_0}{\sqrt{1+\left(f_i/f_0\right)^2}}\cos\left(2\pi f_i\,t-\arctan\left(RC\omega_i\right)\right)$

d) La plus basse fréquence liée au bruit (dépendant de b_0) est 100 Hz. On veut qu'elle soit atténuée d'un facteur 1000 soit $\frac{1}{\sqrt{1+\left(f_1/f_0\right)^2}} = \frac{1}{1000}$ avec $f_1 = 100$ Hz soit $1+\left(f_1/f_0\right)^2 = 10^6$. La fréquence de coupure est donc $f_0 = f_1/1000 = 0{,}1$Hz.

En fait, seule la composante continue doit passer, ce qui donne un signal de sortie constant $u_s = V_{\text{ref}}V_e/2$. Connaissant V_{ref}, on peut avoir accès à V_e, sans erreur causée par le bruit b_0.

⇨ *Méthode 1.4.*

Exercice 1.4

1. La fréquence utilisée pour échantillonner un signal doit au moins être le double de la fréquence maximale présente dans ce signal.

2. a) Le signal ne contient que la fréquence $f_1 = 1$ kHz. La fréquence d'échantillonnage doit au moins être le double, soit au minimum 2 kHz.

b) Peu importe la phase, sinus ou cosinus, la règle est la même : f_e doit être au moins le double de f_2, soit 400 Hz.

c) Le double de $\left(f_1+f_2\right)$ soit 2,4 kHz.

d) Pour une somme de cosinus, on prend la plus grande fréquence qui est f_1. L'échantillonnage doit donc être supérieur à $2f_1$ soit 2 kHz.

e) Il faut d'abord linéariser le produit de cosinus :

$e_5(t) = E/2\cos\big(2\pi(f_1+f_2)t\big) + E/2\cos\big(2\pi(f_1-f_2)t\big)$. La plus grande fréquence est (f_1+f_2). L'échantillonnage doit donc se faire à plus de 2,4 kHz.

f) Là encore, il faut linéariser le carré : $e_5(t) = E/2\big(1+\cos(2\pi.2f_1.t)\big)$, de fréquence maximale $2f_1$. L'échantillonnage doit se faire à fréquence supérieure à $4f_1 = 4$ kHz.

g) En toute rigueur, un signal créneau contient un nombre infini de raies, donc ne peut pas respecter le critère de Shannon.

3. D'après la réponse précédente, aucune fréquence d'échantillonnage ne convient.

Les fréquences présentes dans le créneau sont $(2k+1)f_2$ et présentent des repliements en $|f_e-(2k+1)f_2|$, listées en deuxième ligne dans le tableau ci-dessous.

k	1	2	3	4	5	6	7
$(2k+1)f_2$	200	600	1000	1400	1800	2200	2600
$\lvert f_e-(2k+1)f_2\rvert$	1300	900	500	100	300	700	1100

En dessous de $f_e/2 = 750$ Hz, on observerait les fréquences 100, 200, 300, 600 et 700 Hz.

En réalité, on observe des raies tous les 100 Hz (également à 400 et 500 Hz) à cause des repliements multiples : $|N f_e-(2k+1)f_2|$ *avec N = 1, 2, 3, ... Par exemple, avec N = 2, il apparaît :* $2f_e - 1600 = 400$ Hz.

4. La solution peut consister à éliminer à l'aide d'un filtre passe bas les harmoniques susceptibles de replier. Cette solution n'est envisageable que si les harmoniques supprimées par le filtre ne font pas perdre trop d'information dans le signal.

Dans le cas présent, garder les harmoniques jusqu'à $k=9$ soit $(2k+1)=19$ et donc $f_{\max} = (2k+1)f_2 = 3{,}8$ kHz ne supprime que les harmoniques d'amplitude inférieures à 1/20 de celle du fondamental, soit 5%. La fréquence d'échantillonnage doit alors être supérieure à 7,6 kHz.

⇨ *Méthode 1.3.*

Exercice 1.5

1. Notons V_i le potentiel à l'entrée (–) du comparateur i. Entre 0 et V_{ref}, il y a une impédance totale $R_{\text{tot}} = r + 6\times(2r) + 3r = 16r$. Comme les impédances d'entrée sont infinies, il est possible d'appliquer un pont diviseur de tension : $V_1 = \dfrac{r}{R_{\text{tot}}}V_{\text{ref}} = \dfrac{1}{16}V_{\text{ref}}$;

$V_2 = \dfrac{r+2r}{R_{\text{tot}}}V_{\text{ref}} = \dfrac{3}{16}V_{\text{ref}}$; $V_3 = \dfrac{r+2r+2r}{R_{\text{tot}}}V_{\text{ref}} = \dfrac{5}{16}V_{\text{ref}}$; $V_4 = \dfrac{7}{16}V_{\text{ref}}$; $V_5 = \dfrac{9}{16}V_{\text{ref}}$;

$V_6 = \dfrac{11}{16}V_{\text{ref}}$; $V_7 = \dfrac{13}{16}V_{\text{ref}}$.

Toutes les entrées (+) sont, elles, reliées à la tension u. Si $u > V_i$, la sortie du comparateur i a un potentiel haut, que l'on note 1, codage utilisé, et si $u < V_i$, la sortie est basse, codée 0.

En notant les codages 1 ou 0 en commençant par le comparateur 7, cela donne la correspondance du tableau ci-dessous. La ligne « cod » est le codage de sortie des comparateurs, et la ligne « bits » la correspondance en binaire (sortie $a_2a_1a_0$ du codeur logique)

$\frac{u}{V_{\text{ref}}}$		$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{16}$
cod	0000000	0000001	0000011	0000111	0001111	0011111	0111111	1111111
bits	000	001	010	011	100	101	110	111
s_N	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$\frac{u_N}{V_{\text{ref}}}$	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{14}{16}$

La conversion s'est donc faite sur 3 bits à l'aide de 7 comparateurs, et $u_N = \frac{2s_N}{16}.V_{\text{ref}}$.

2. Pour un convertisseur 8 bits contenant 2^8 valeurs possibles, il faut donc $2^8 - 1 = 255$ comparateurs.

3. Il y a 8 valeurs possibles de s_N, soit $N = 3$ bits, comme dans l'exemple étudié à la première question.

4. Pour $u = 1{,}28\,\text{V}$, on peut lire $s_N = (5)$, soit 101 en base 2.

Il vient donc $u_N = \frac{10}{16}.V_{\text{ref}} = \frac{5}{8}.2 = 1{,}25\,\text{V}$ au lieu de 1,28V. La numérisation arrondit au plus proche car s_N est nécessairement entier.

5. Comme s_N est nécessairement entier, cela induit une erreur maximale correspondant à la moitié de l'écart entre s_N et s_{N+1}, soit $V_{\text{ref}}/16 = 0{,}125\,\text{V}$.

6. Le filtre doit enlever les fréquences non audibles, car la numérisation du signal provoque des repliements de spectres. Le signal présent dans les ultrasons risque de faire apparaître des fréquences fantômes audibles. Le filtre passe-bas doit donc couper à 20 kHz.
La fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à $2.f_{\max}$ soit 40 kHz. Dans la pratique, un échantillonnage à 44,1kHz est couramment effectué.

⇨ *Méthode 1.3.*

Exercice 1.6

1. Les fréquences audibles vont de $20\,\text{Hz}$ à $20\,\text{kHz}$. Le critère de Nyquist-Shannon impose au moins 2 points de mesure par période, soit une fréquence d'échantillonnage au moins double de la plus haute fréquence que l'on souhaite restituer. Ici donc : $f_{\text{échant}} \geq 2 \cdot 20\,\text{kHZ} = 40\,\text{kHz}$. La fréquence d'échantillonnage de $44{,}1\,\text{kHz}$ est compatible avec le critère de Nyquist-Shannon.

⇨ *Méthode 1.1.*

2. a) Un son de $f_1 = 43\,\text{kHz}$ n'est pas audible lors du concert. Par contre, il est susceptible d'être capté par le microphone. Or l'échantillonnage à f_e est à l'origine d'un repliement du

spectre, et fait donc apparaître la fréquence $f' = |f_e - f_1| = 1100\,\text{Hz}$, qui se trouve dans le spectre audible ! Cette fréquence f' qui n'était pas présente lors du concert sera enregistrée et envoyée au haut-parleur lors de l'écoute du CD !

b) Un filtre passe-bas anti repliement de fréquence de coupure $f_c = f_e / 2 = 22{,}5\,\text{kHz}$ est intercalé entre la sortie du microphone et le CAN. Il a pour rôle de supprimer toutes les fréquences susceptibles de se replier à plus basse fréquence (donc gênantes).

⇨ *Méthode 1.5.*

c) Le problème qui se présente maintenant est que l'on ne sait pas construire un passe-bas qui laisse passer toutes les fréquences inférieures à f_c et coupe entièrement les fréquences supérieures à f_c. Le risque est de commencer à filtrer les hautes fréquences audibles… et à l'inverse, de garder un peu de fréquences supérieures à $20\,\text{kHz}$ susceptibles de se replier !

C'est la raison pour laquelle la fréquence d'échantillonnage est en fait supérieure à $40\,\text{kHz}$: cela laisse une marge pour la transition.

→ les fréquences inférieures à $f_{\max} = 20\,\text{kHz}$ doivent passer à travers le filtre ;

→ les fréquences supérieures susceptibles de se replier en dessous de $20\,\text{kHz}$ doivent être coupées : ce sont les fréquences supérieures à $f_e - f_{\max} = 24{,}1\,\text{kHz}$.

Entre 20 et $24{,}1\,\text{kHz}$, cela n'a pas d'importance : elles ne sont pas audibles, et le repliement n'est pas audible non plus. C'est la zone de transition du filtre passe-bas.

Enfin, plus l'ordre du filtre est grand, plus il coupe rapidement les fréquences supérieures à $20\,\text{kHz}$.

3. a) La fréquence d'échantillonnage donne le nombre de mesures effectuées chaque seconde. Or chaque mesure contient 16 bits. Les 2 signaux du son stéréo occupent donc $N = 44\,100 \cdot 16 \cdot 2 = 1{,}41.10^6$ bytes, soit $N = 1{,}41\,\text{Mb}$ par seconde d'enregistrement.

b) La durée d'enregistrement possible sur un CD enregistrable du commerce de $700\,\text{Mo}$ (soit $700 \cdot 8\,\text{Mb}$) est : $t = (700 \cdot 8) / 1{,}41 = 3970\,\text{s}$ soit 66 minutes

⇨ *Méthode 1.3.*

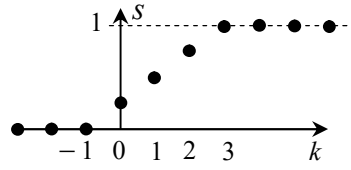
> ✎ *La durée d'enregistrement est un peu moins longue en réalité car on ajoute des bits de correction d'erreur qui permettent de corriger un peu le signal en cas de rayures… dans la limite du raisonnable !*

c) Pour un format MP3, la durée d'enregistrement est multipliée par 4 à 20 : sur $700\,\text{Mo}$, il est alors possible d'enregistrer 4 à 20 heures de concert !

Exercice 1.7

1. Calculons les valeurs de s_k obtenues en réponse à un échelon de tension en remplissant le tableau ci-dessous (toutes les valeurs de tension sont en volt) :

k	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
e_k	0	0	0	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0	0	1/4	1/2	3/4	1	1	1



Le signal d'entrée est constant pour $t \geq 0$ (signal continu donc fréquence nulle). Après un régime transitoire de durée $4\,T_e$, s atteint un régime établi non nul : le signal continu passe, donc les basses fréquences passent. C'est à priori un passe-bas. Ce résultat était prévisible, car l'opération réalisée est une moyenne, qui conserve la composante continue.

Le gain est le rapport de s et de e en régime établi, soit $G(f=0)=1$.

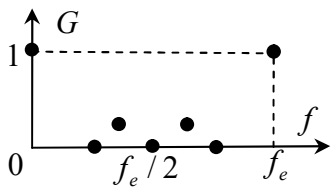
2. a) Pour la fréquence $f = f_e/4$, on a $e(t) = 1\cos(2\pi f\, t) = \cos(2\pi(f_e/4)t)$ avec $t_k = kT_e$ donc $e_k = \cos\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)$. De même, $f = \dfrac{f_e}{3} \Rightarrow e_k = \cos\left(k\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $f = \dfrac{f_e}{2} \Rightarrow e_k = \cos(k\pi)$,

$f = \dfrac{2f_e}{3} \Rightarrow e_k = \cos\left(k\dfrac{4\pi}{3}\right)$, $f = \dfrac{3f_e}{4} \Rightarrow e_k = \cos\left(k\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $f = f_e \Rightarrow e_k = \cos(k\,2\pi) = 1$.

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{f_e}{4}$	$\cos(k\pi/2)$	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1
	s_k	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{f_e}{3}$	$\cos(2k\pi/3)$	1	–1/2	–1/2	1	–1/2	–1/2	1	–1/2	–1/2
	s_k	1/4	–1/8	–1/8	1/4	–1/8	–1/8	1/4	–1/8	–1/8
$\frac{f_e}{2}$	$\cos(k\pi)$	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1
	s_k	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{2f_e}{3}$	$\cos(4k\pi/3)$	1	–1/2	–1/2	1	–1/2	–1/2	1	–1/2	–1/2
	s_k	1/4	–1/8	–1/8	1/4	–1/8	–1/8	1/4	–1/8	–1/8
$\frac{3f_e}{4}$	$\cos(3k\pi/2)$	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1
	s_k	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les valeurs de s_1, s_2 et s_3 ont été obtenues à l'aide de la périodicité de e_k.

Pour $f = f_e$, e_k vaut toujours 1 donc s_k vaut toujours 1 également. Il est ainsi possible de relever l'amplitude des sinusoïdes échantillonnées s_k : 0 pour $f_e/4$ ainsi que pour $f_e/2$ et $3f_e/4$ et 1/4 pour $f_e/3$ ainsi que pour $2f_e/3$ car il s'agit de la valeur maximale de s_k.
L'amplitude du signal d'entrée étant 1 volt, ces valeurs sont la valeur du gain que l'on reporte sur le tracé ci-contre.



b) Le filtrage n'est pas progressif puisque la fréquence $f_e/4$ est totalement coupée alors que la fréquence $f_e/3$ (supérieure à $f_e/4$) passe à nouveau, du moins en partie ($G = 0{,}25$). Ce comportement est différent du passe-bas analogique. Les fréquences rejetées sont les fréquences multiples de $f_e/4$, à l'exception de f_e.

c) Comme on vient de le voir, la fréquence f_e passe totalement, ce qui est gênant pour un passe-bas ! Ceci s'explique par l'échantillonnage temporel du signal qui donne une périodicité dans le domaine fréquentiel ainsi qu'un repliement (symétrie par rapport à $f_e/2$) bien visible

Corrigé