

Georges Henriot

ENGRENAGES

Conception • Fabrication
• Mise en œuvre

Préface de

Jacques Boisset

Président de l'Union nationale
des industries de transmissions mécaniques

8^e édition

DUNOD

Les premières éditions de cet ouvrage sont parues sous le titre *Traité
théorique et pratique des engrenages, tomes 1 et 2*

6^e édition © Bordas, Paris, 1979 pour le tome 1

5^e édition © Bordas, Paris, 1983 pour le tome 2

© Dunod, Paris, 1999, 2007, 2013 et 2020 pour la nouvelle présentation
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

EAN 9782100822645

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Préfacer la huitième édition de ce traité technique à l'origine en deux tomes est un redoutable honneur.

D'abord parce que le livre en question doit être un ouvrage indispensable pour justifier un intérêt si constant, ensuite parce que l'auteur et ses préfaciers sont des personnages très importants. Quant à l'objet de l'ouvrage, en tant qu'engrenagiste et fabricant de réducteurs et multiplicateurs, je suis obligé de confesser que c'est un sujet passionnant et fondamental.

L'auteur, Monsieur Georges Henriot, est un des pères fondateurs mondiaux de la théorie de l'engrenage. Il a été reconnu sur tous les continents, comme un de ceux qui ont permis la vulgarisation claire et simple de la technologie et sa mise à la portée du plus grand nombre. À ce titre, il a même reçu le prix spécial de la fondation allemande Sew Blickle décerné aux personnes ayant le plus contribué au développement de l'industrie de l'engrenage. Il est très significatif aussi que le Recteur Capelle, lui qui fut à l'origine des Instituts d'enseignement supérieur, ait été son premier préfacier. La contribution de Monsieur Henriot est immense en tant que somme la plus complète et la plus accessible du savoir nécessaire pour calculer, fabriquer, construire des engrenages ou des ensembles à la base d'engrenages.

Bien sûr, son passage chez Maag lui a donné l'accès aux clés du temple, mais c'est son expérience, pratique d'ingénieur des Arts et Métiers, à la SEIE et d'industriel chez Citroën, Messian, Durand, qui a donné à son ouvrage cet aspect simple, direct et pratique qui en fait son succès. Tous les bureaux d'études de mécanique disposent de ce traité. Il existe même encore de très grandes sociétés comme EDF qui font toujours systématiquement référence à la méthode Henriot. C'est dire si ses calculs sont fiables.

Au moment où les filières scientifiques n'attirent curieusement plus autant de jeunes, nous nous apercevons tous les jours que l'existence de ces traités complets dans une technique évolutive est un outil précieux indispensable pour les ingénieurs et techniciens de l'engrenage.

Et nous sommes bien là au cœur de la mécanique ; l'engrenage n'est-il pas le symbole le plus fréquent des entreprises ou associations opérant dans la mécanique ?

Dans ce métier du calcul et de la conception des engrenages où personne n'aboutit exactement à la même solution, où la détermination du module, du nombre de dents, du déport de denture, de l'hélice, de la largeur de la denture, des traitements thermiques, confine à l'art, le recours à un ouvrage tel que celui-ci permettra aux jeunes de mieux comprendre les paroles de Monsieur

Naegli, grand spécialiste des calculs chez Maag : « de même que vous ne confiez pas vos dents à n'importe quel dentiste, ne confiez pas vos dentures à qui que ce soit autre qu'un véritable engrenagiste ».

Ainsi, les mécaniciens pourront se référer à votre bible. Les linguistes ont le Larousse, nous autres mécaniciens nous avons le Henriot.

Et que vive l'involute !

Jacques Boisset
Président de l'Unitram
Union nationale des industries
de transmissions mécaniques

Table des matières

Avant-propos

XXI

A

Conception des engrenages

1 • Rappel des notions fondamentales	3
1.1 Théorie élémentaire sur les vecteurs	3
1.1.1 Composition des forces, 3	
1.1.2 Rappel sur les moments, 5	
1.1.3 Systèmes de forces équivalents, 7	
1.2 Vitesses et composition des vitesses	7
1.2.1 Mouvements fondamentaux, 8	
1.2.2 Composition des mouvements : mouvement relatif, mouvement d'entraînement, mouvement absolu, 11	
1.3 Mouvement d'un plan sur un plan fixe	15
1.3.1 Centre instantané de rotation, 15	
1.3.2 Base et roulante du mouvement, 16	
1.3.3 Exemple d'application des propriétés du centre instantané de rotation, 18	
1.3.4 Formule et construction d'Euler-Savary, 19	
2 • Surfaces primitives et surfaces de denture	24
2.1 Surfaces primitives	24
2.1.1 Engrenages parallèles, 24	
2.1.2 Engrenages concourants, 27	
2.1.3 Engrenages gauches, 31	
2.2 Surfaces de denture	31
2.2.1 Engrenages parallèles, 32	
2.2.2 Engrenage concourants, 89	

3 • Étude de l'engrènement des engrenages parallèles	116
3.1 Continuité d'engrènement	116
3.1.1 Engrenages parallèles extérieurs, à denture droite, 116	
3.1.2 Denture intérieure droite, 125	
3.1.3 Denture hélicoïdale. Rapport de recouvrement. Rapport total de conduite, 127	
3.2 Interférences	134
3.2.1 Engrenages parallèles extérieurs, 134	
3.2.2 Engrenages parallèles intérieurs, 146	
3.3 Glissement	155
3.3.1 Généralités, 155	
3.3.2 Glissement relatif total de deux profils conjugués depuis le début jusqu'à la fin de l'action, 159	
3.3.3 Glissement spécifique, 161	
4 • Corrections de denture	169
4.1 Mécanisme géométrique des corrections de denture	169
4.1.1 Définitions, 169	
4.1.2 Dentures déportées sans variation d'entraxe, 172	
4.1.3 Dentures déportées avec variation d'entraxe, 177	
4.2 Utilisation des dentures déportées pour éviter les interférences	194
4.2.1 Engrenage parallèle, extérieur, à denture droite, 194	
4.2.2 Engrenages à denture hélicoïdale, 197	
4.3 Équilibrage du glissement spécifique maximum sur le pignon et la roue aux points extrêmes de contact	197
4.3.1 Généralités, 197	
4.3.2 Détermination des déports, 199	
4.4 Propositions ISO	201
4.4.1 Diagramme, 201	
4.4.2 Choix des déports x_1 et x_2 , 201	
4.5 Influence des déports sur la géométrie des dentures	203
4.6 Engrenages multiplicateurs	204
4.7 Dentures hélicoïdales	205
4.8 Dentures intérieures	206
5 • Engrenages gauches : étude générale	214
5.1 Engrenages gauches hélicoïdaux	214
5.1.1 Généralités, 214	
5.1.2 Glissement relatif des dentures conjuguées, 220	

5.1.3	Corrections de denture, 222	
5.1.4	Calcul des éléments d'un engrenage gauche hélicoïdal, 222	
5.2	Engrenages à vis sans fin	226
5.2.1	« Surfaces primitives », 226	
5.2.2	Formes de filets de vis, 228	
5.2.3	Relations géométriques entre les éléments des dentures, 232	
5.2.4	Vis à filet trapézoïdal ZA, 233	
5.2.5	Vis en hélicoïde développable ZI, 243	
5.2.6	Comparaison des différents types de filets de vis, 247	
5.2.7	Étude technologique de l'engrenage à vis sans fin (proportions normales), 249	
5.2.8	Zone de portée sur la roue et la vis, 254	
5.2.9	Influence des déports. Fonctionnement en « retraite », 256	
5.2.10	Engrenage à vis sans fin à pas différentiels (vis duplex), 263	
5.2.11	Engrenages à vis globique, 266	
5.3	Engrenage « hypoïd » (appellation Gleason)	271
5.4	Engrenage de champ ou Face-Gear	273
5.5	Engrenage spiroïd et helicon	278
6 •	Étude dynamique	281
6.1	Unités adoptées	281
6.2	Efforts sur les dentures, les arbres et les paliers	281
6.2.1	Engrenages parallèles à denture droite, 281	
6.2.2	Engrenages parallèles à denture hélicoïdale, 285	
6.2.3	Engrenages concourants à denture droite, 287	
6.2.4	Engrenages concourants à denture hélicoïdale ou spirale, 290	
6.2.5	Engrenages à vis sans fin, 293	
7 •	Calcul des dentures des engrenages parallèles	299
	INTRODUCTION : CONTRAINTES DE BASE	299
7.1	Pression superficielle	299
7.1.1	Denture droite extérieure, 299	
7.1.2	Denture droite intérieure, 303	
7.1.3	Denture extérieure hélicoïdale, 305	
7.1.4	Formule de base (méthode B), 308	
7.2	Résistance à la rupture	314
7.2.1	Facteur de forme : méthode ISO, 316	
7.2.2	Facteur de conduite : Y_{σ} , 325	
7.2.3	Facteur d'inclinaison : Y_{β} , 327	

7.2.4 Facteur de concentration de contrainte : Y_{Sa}	327
7.2.5 Formule de base ISO	328
FACTEURS GÉNÉRAUX D'INFLUENCE	330
7.3 Méthode A	330
7.4 Méthodes B, C (D, E)	330
7.5 Force tangentielle, couple, puissance	331
7.6 Facteur d'application : K_A	331
7.6.1 Méthode B	331
7.6.2 Méthode C	331
7.7 Facteur dynamique : K_V	333
7.7.1 Détermination du facteur $K_{V \cdot Br}$	333
7.7.2 Détermination du facteur $K_{V \cdot Cr}$	341
7.8 Facteurs de distribution de charge longitudinale : $K_{H\beta} - K_{F\beta}$	344
7.8 Facteurs de distribution de charge longitudinale	344
7.8.1 Détermination du facteur : $K_{H\beta \cdot Br}$	344
7.8.2 Détermination du facteur : $K_{H\beta \cdot Cr}$	344
7.8.3 Détermination du facteur $K_{H\beta \cdot D}$ par méthode D	349
7.9 Facteurs de distribution de charge transversale : $K_{H\alpha} \cdot K_{F\alpha}$	352
7.9.1 Méthode B	352
7.9.2 Méthode simplifiée C	354
7.10 Rigidités des dents	354
7.10.1 Méthode B	354
7.10.2 Méthode C	356
RÉSISTANCE À LA PRESSION SUPERFICIELLE	356
7.11 Rappel des formules de base (méthode B)	356
7.12 Limite d'endurance pour la pression de Hertz du matériau : $\sigma_{H \cdot \lim}$	357
7.13 Facteur de durée : Z_{NT}	359
7.14 Facteurs d'influence sur la formation du film d'huile	362
7.14.1 Méthode B	363
7.14.2 Méthode C	366
7.15 Facteur de rapport de durestés : Z_W	366
7.16 Facteur de dimension : Z_X	367
7.17 Courbe de Wohler à la pression superficielle	367

RÉSISTANCE À LA RUPTURE	368
7.18 Rappel des formules de base (méthode B)	368
7.19 Limite d'endurance du matériau : σ_{FE}	368
7.20 Facteur de durée : Y_{NT}	370
7.21 Facteur de sensibilité à l'entaille : $Y_{\delta \cdot rel \cdot T}$	372
7.22 Facteur de rugosité : $Y_{R \cdot rel \cdot T}$	373
7.23 Facteur de dimension : Y_x (méthode B)	374
7.24 Courbe de Wohler à la rupture	375
 MÉTHODE D'APPLICATION POUR ENGRENAGES DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE	 375
7.25 Méthode détaillée (<i>detailed method</i>)	376
7.25.1 Limites d'application, 376	
7.25.2 Facteurs d'influence, 377	
7.25.3 Résistance superficielle, 378	
7.25.4 Résistance à la rupture, 378	
7.25.5 Conclusion, 379	
7.26 Méthode simplifiée (<i>simplified method</i>)	379
7.26.1 Limites d'application, 379	
7.26.2 Charge nominale, 379	
7.26.3 Résistance à la pression superficielle, 379	
7.26.4 Résistance à la rupture, 385	
7.27 Applications : calcul de vérification de la capacité de charge d'un engrenage	389
7.27.1 Méthode « détaillée », 389	
7.27.2 Méthode « simplifiée », 391	
7.28 Utilisation de la méthode simplifiée au stade du projet	392
7.28.1 Facteur de service, 392	
7.28.2 Résistance superficielle, 392	
7.28.3 Résistance à la rupture, 394	
7.29 Cas d'un diagramme de charge variable	394
7.29.1 Courbe de Wohler à la pression superficielle, 394	
7.29.2 Courbe de Wohler à la résistance à la rupture, 395	
7.29.3 Diagramme de charge variable, 396	
7.29.4 Pression superficielle – Facteur d'application, 396	
7.29.5 Résistance à la rupture, 398	
7.29.6 Exemple d'application, 399	

8 • Calcul des dentures des engrenages concourants	402
8.1 Formules générales	402
8.2 Facteurs d'influence	403
8.2.1 Facteur d'application K_A	403
8.2.2 Facteur dynamique K_V	404
8.2.3 Facteurs de répartition longitudinale $K_{H\beta C}$ et $K_{F\beta C}$	405
8.2.4 Facteurs de répartition transversale $K_{H\alpha}$ et $K_{F\alpha}$	407
8.3 Résistance superficielle	408
8.3.1 Pression de contact nominale σ_{HO}	408
8.3.2 Pression de contact de fonctionnement	410
8.3.3 Pression de contact admissible σ_{Hpr}	410
8.4 Résistance à la rupture	411
8.4.1 Contrainte de rupture nominale σ_{FO}	411
8.4.2 Contrainte de rupture de fonctionnement	414
8.4.3 Contrainte de rupture admissible	415
8.5 Méthode industrielle simplifiée	415
8.5.1 Pression superficielle	415
8.5.2 Utilisation de la norme AGMA 2005 C96	418
9 • Modifications de la forme des dentures des engrenages parallèles	421
9.1 Modifications dans le sens du profil	421
9.1.1 Compensation de la flexion des dents	421
9.1.2 Utilisation d'une denture High Contact Ratio (grand rapport de conduite)	424
9.1.3 Compensation des écarts thermiques	431
9.2 Modifications dans le sens longitudinal	432
9.2.1 Compensation de la déformation du corps du pignon	432
9.2.2 Influence du faux parallélisme	434
9.2.3 Cas de l'utilisation de paliers lisses avec un engrenage à denture hélicoïdale	434
9.2.4 Exécution d'un bombé longitudinal sans distorsion ou faux parallélisme	435
9.2.5 Exécution d'un bombé longitudinal avec distorsion	442
9.2.6 Compensation de déformation thermique	443
9.3 Modification éventuelle des dentures HCR	445
10 • calcul de résistance des engrenages à vis sans fin	447
10.1 Proposition DIN 3996	447
10.1.1 Résistance superficielle au pitting	447
10.1.2 Résistance à la rupture des dents de la roue	449

10.2 Norme BS 721	452
10.2.1 Résistance au pitting (de la roue), 452	
10.2.2 Résistance à la rupture, 455	
11 • Rendement dans les différents types d'engrenages. Capacité thermique	458
11.1 Généralités	458
11.2 Engrenages parallèles	459
11.2.1 Perte dans les dentures dépendant de la charge : P_{Mr} , 459	
11.2.2 Perte dans les paliers dépendant de la charge : P_{Br} , 462	
11.2.3 Perte dans les joints ne dépendant pas de la charge : P_{Sr} , 463	
11.2.4 Perte par brassage et ventilation dans les engrenages : P_{WGr} , 463	
11.2.5 Perte par brassage dans les paliers : P_{WGr} , 463	
11.2.6 Dissipation thermique, 464	
11.2.7 Facteurs de correction de la capacité thermique, 464	
11.2.8 Lubrification par injection, 464	
11.3 Engrenages à vis sans fin	466
11.3.1 Perte dans les dentures dépendant de la charge, 467	
11.3.2 Perte de puissance dans les paliers dépendant de la charge, 469	
12 • Détériorations des engrenages. Formation du film d'huile. Choix du lubrifiant	470
12.1 Détériorations des engrenages	470
12.1.1 Détériorations par rupture, 470	
12.1.2 Détériorations superficielles, 473	
12.2 Formation du film d'huile	480
12.2.1 Unités de viscosité, 480	
12.2.2 Formation du film d'huile. Épaisseur minimale du film d'huile, 481	
12.2.3 Influence du lubrifiant sur les détériorations superficielles, 486	
12.2.4 Détermination de la viscosité du lubrifiant, 489	
12.2.5 Essai d'huile : appareil FZG, 493	
12.2.6 Cas extrêmes de problèmes de lubrification, 495	
13 • Trains planétaires	500
13.1 Trains planétaires simples	500
13.1.1 Trains plans à roues cylindriques, 500	
13.1.2 Trains planétaires à roues coniques, 534	
13.2 Trains planétaires spéciaux pour grands rapports	537
13.2.1 Train imbriqué, 537	
13.2.2 Variante du train III, 544	
13.2.3 Train avec satellite simple récepteur, 546	

13.3 Trains composés	548
13.4 Calculs de résistance	557
13.4.1 Résistance superficielle, 557	
13.4.2 Résistance à la rupture, 558	
13.4.3 Égalisation de la résistance superficielle et de la résistance à la rupture, 559	
13.4.4 Influence du nombre de cycles, 560	
14 • Matériaux. Traitements thermiques	563
14.1 Introduction	563
14.2 Aciers	566
14.2.1 Traitements thermiques complets, 566	
14.2.2 Traitements thermiques superficiels, 567	
14.2.3 Trempe superficielle par induction, 575	
14.2.4 Domaines d'application des procédés de traitements thermiques superficiels, 576	
14.3 Fontes	576
14.3.1 Fontes grises, 576	
14.3.2 Fontes ductiles, 579	
14.4 Bronzes	581
14.4.1 Bronzes à l'étain et phosphore, 581	
14.4.2 Bronzes au manganèse, 581	
14.4.3 Bronzes à l'aluminium, 581	
14.4.4 Bronzes au silicium, 582	

B

Fabrication et contrôle des engrenages

15 • Taillage des roues cylindriques	585
15.1 Taillage par fraise de forme	585
15.2 Taillage par génération	586
15.2.1 Taillage par outil-crémaillère, 587	
15.2.2 Taillage par fraise mère, 593	
15.2.3 Taillage par outil-pignon, 607	

16 • Taillage des roues coniques	614
16.1 Introduction	614
16.2 Denture droite	615
16.3 Denture hélicoïdale	618
16.4 Dentures spirales	618
16.4.1 Denture spirale Gleason, 619	
16.4.2 Denture spirale Oerlikon-Klingelnberg, 625	
17 • Taillage des engrenages à vis sans fin	629
17.1 Vis sans fin	629
17.1.1 Taillage de la vis sans fin, 629	
17.1.2 Rectification du filet de vis, 630	
17.2 Roues à vis sans fin	631
17.2.1 Taillage par avance radiale, 631	
17.2.2 Taillage par avance tangentielle, 631	
17.2.3 Répercussion de l'usure de la fraise mère, 632	
17.2.4 Taillage par outils-mouches, 632	
17.2.5 Utilisation d'une fraise de diamètre augmenté, 634	
18 • Rectification des roues cylindriques	635
18.1 Introduction	635
18.2 Rectification par génération	635
18.2.1 Procédé Maag, 635	
18.2.2 Procédé Hofler, 639	
18.2.3 Procédé Reishauer, 641	
18.3 Rectification par meule de forme	642
18.3.1 Cas de la denture hélicoïdale, 646	
19 • Rasage (shaving) et superfinition (honing) des roues cylindriques	647
19.1 Rasage (shaving)	647
19.1.1 Méthode longitudinale, 648	
19.1.2 Méthode « oblique », 649	
19.1.3 Méthode « transversale », 649	
19.1.4 Méthode « en plongée », 650	
19.2 Honing	652

20 • Tolérances des dentures. Contrôle	656
20.1 ISO 1328 Partie 1	657
20.1.1 Division, 657	
20.1.2 Profil, 658	
20.1.3 Erreurs d'hélice, 661	
20.2 ISO 1328 Partie 2	663
20.2.1 Faux rond de denture : Fr, 663	
20.2.2 Erreur composée radiale d'une roue, 663	
20.2.3 Erreur composée tangentielle d'une roue, 664	
20.3 Bases d'établissement du système de tolérances	664
20.3.1 Tolérances des écarts d'erreurs de denture d'une roue, 665	
20.3.2 Épaisseur des dents, 666	
20.3.3 Contrôle du corps de roue, 668	
20.3.4 Contrôle de l'engrenage monté, 668	
20.3.5 Jeu entre dents, 669	
20.3.6 Groupes de fonction de tolérances, 669	
20.4 Contrôles relatifs aux flancs homologues	671
20.4.1 Division, 671	
20.4.2 Profil, 674	
20.4.3 Contrôle de l'hélice, 681	
20.4.4 Contrôle de l'épaisseur des dents, 681	
20.4.5 Contrôle de l'erreur composée, 690	
20.4.6 Appareils combinés 3D, 692	
20.4.7 Contrôle de l'état de surface, 693	
20.4.8 Valeurs indicatives de R_a , 699	

C

Ensembles à engrenages

21 • Ensembles simples de mécanique générale	703
21.1 Classification. Dispositions générales	703
21.2 Gamme d'entraxes	709
21.3 Capacité de charge mécanique	709
21.4 Rapports normalisés	712
21.5 Proportions des roues	712
21.6 Réducteurs à deux trains	712

21.7 Réducteurs à trois trains	714
21.8 Capacité thermique : P_{th}	715
21.9 Calcul des arbres	717
21.10 Lubrification	718
21.10.1 Modes de lubrification par barbotage, 718	
21.10.2 Lubrification par injection, 719	
21.10.3 Types de lubrifiants, 720	
21.11 Fretage	721
21.11.1 Formules de base, 721	
21.11.2 Pression de contact entre les deux éléments, 722	
21.11.3 Effort total de contact entre les deux éléments, 722	
21.11.4 Sécurité au glissement K , 722	
21.11.5 Coefficient de frottement f , 722	
21.11.6 Cas d'un centre de roue de forme plus compliquée, 723	
21.11.7 Contraintes de fretage, 723	
22 • Exemples de transmissions dans l'industrie du ciment	730
22.1 Commande latérale de broyeur et de four à ciment horizontaux	730
22.2 Commande centrale des broyeurs horizontaux	733
22.2.1 Réducteurs à trains d'engrenages parallèles, 734	
22.2.2 Réducteurs à trains planétaires, 736	
22.3 Broyeurs verticaux	737
23 • Transmissions pour industrie sidérurgique	740
24 • Facteurs de service pour ensembles de mécanique générale	744
25 • Ensembles à grande vitesse	746
25.1 Introduction	746
25.2 Dispositions générales	746
25.2.1 Denture en chevron, 746	
25.2.2 Denture hélicoïdale simple, 746	
25.2.3 Denture hélicoïdale simple avec collets de butée, 746	
25.2.4 Denture hélicoïdale simple avec arbre de liaison torsible du côté roue, 746	
25.2.5 Denture hélicoïdale simple avec arbres de liaison torsibles du côté roue et du côté pignon, 748	
25.3 Proportions de denture	748
25.4 Calculs de résistance	749
25.5 Série de « très grande largeur » pour réducteurs à très grande vitesse et faibles rapports	753

25.6 Facteurs de service	755
25.7 Lubrification	756
26 • Transmissions de marine	757
26.1 Transmissions par turbine	757
26.2 Transmissions par moteurs diesel	760
26.3 Transmissions couplées moteurs diesel-turbines à gaz	763
27 • Ensembles à engrenages à vis sans fin	765
27.1 Dispositions générales	765
27.2 Normalisation	768
27.3 Capacité de charge mécanique	769
27.4 Capacité thermique	769
28 • Essais des ensembles à engrenages. Codes de réception	771
28.1 Essais des ensembles à engrenages	771
28.1.1 Méthode d'essais avec freins, 771	
28.1.2 Méthode d'essais avec disposition à « cycle fermé » (back to back), 772	
28.1.3 Essai pour ensembles à grande vitesse et grande puissance, 774	
28.2 Réception des ensembles à engrenages aux vibrations	775
28.2.1 Généralités, 775	
28.2.2 Recommandations ISO et AGMA, 777	
28.2.3 Vibrations en régime de résonance, 777	
28.2.4 Différentes causes de vibrations, 784	
28.3 Réception des ensembles à engrenage au bruit	784
28.3.1 Différentes causes de bruit provenant d'un engrenage, 784	
28.3.2 Rappels d'acoustique, 786	
28.3.3 Processus de mesure. Correction pour bruits ambiants, 789	
28.3.4 Surfaces de mesure, 790	
28.3.5 Intérêt du spectre de fréquences, 792	
28.3.6 Recommandations pratiques sur les niveaux sonores, 792	
29 • Accouplements. Alignement des axes	796
29.1 Accouplements rigides (n'acceptant pas de désalignement)	796
29.2 Désalignement	799
29.2.1 Accouplements à denture, 799	
29.2.2 Accouplements à ressorts métalliques, 805	
29.2.3 Accouplements avec éléments métalliques flexibles, 806	
29.2.4 Accouplements avec éléments en élastomère, 810	

29.3 Alignement des arbres accouplés en service	812
29.3.1 Détails pratiques d'installation, 813	
29.3.2 Détails pratiques du montage, 815	
29.3.3 Méthode d'alignement du pignon sur la couronne d'entraînement latéral d'un broyeur à ciment, 816	
30 • Contrôle de la portée des dentures	819
30.1 Engrenages parallèles	819
30.2 Engrenages concourants	820
30.3 Engrenages à vis sans fin	823
31 • Paliers : conception, détériorations, maintenance	825
31.1 Paliers à roulements	825
31.1.1 Influence des conditions de fonctionnement sur la durée de vie, 829	
31.1.2 Systèmes de lubrification, 830	
31.1.3 Maintenance et entretien des roulements, 831	
31.2 Paliers lisses	835
31.2.1 Introduction, 835	
31.2.2 Calculs propres aux paliers lisses, 837	
32 • Problèmes liés à la lubrification et à l'évacuation des calories	843
32.1 Maintenance liée à la surveillance des détériorations des dentures	843
32.1.1 Huiles, 843	
32.1.2 Surveillance des dentures, 848	
32.2 Problèmes liés à l'évacuation des calories	851
32.2.1 Introduction, 851	
32.2.2 Exemple, 852	
32.2.3 Puissance dissipée : P_O , 858	
32.2.4 Capacité thermique, 858	
32.2.5 Rendement, 858	
32.2.6 Évacuation des calories par le carter, 859	
33 • Maintenance pour bruit et vibrations	866
33.1 Document ISO/WD 8579-1 (bruit)	866
33.1.1 Introduction, 866	
33.1.2 Méthodes de détermination, 866	
33.1.3 Maintenance, 870	
33.2 Document ISO/WD 8579-2 (vibrations)	870
Bibliographie	871
Index	873

Avant-propos

Comme pour la septième édition, nous avons procédé à une modification fondamentale, consistant à ne présenter qu'un seul volume au lieu de deux. L'ouvrage actuel est donc naturellement très important. Il est divisé en trois parties, couvrant tout le domaine de l'engrenage :

- première partie : conception des engrenages ;
- deuxième partie : fabrication et contrôle ;
- troisième partie : exemples de réalisation d'ensembles à engrenages, réception et maintenance.

La première partie reprend la plupart des éléments des éditions précédentes, relatifs à la conception de base que nous appellerons théorique : nous avons conservé le caractère pédagogique permettant la compréhension fondamentale des différents types d'engrenages. Nous retrouvons évidemment les méthodes de calcul de résistance : elles sont basées sur les dernières recommandations ISO que nous avons mises à jour par rapport à la 7^e édition, ce qui est très important. Nous avons insisté sur les méthodes industrielles simplifiées et suffisamment précises dont nous sommes l'auteur, à la suite d'une expérience de plus de cinquante ans dans les principales firmes d'engrenages, dans des domaines très variés et de haute performance, et d'un contact constant et très fructueux avec les spécialistes français et étrangers à l'ISO et l'AGMA.

Nous avons également insisté sur une évolution actuelle des dentures, par exemple les dentures dites HCR (High Contact Ratio), qui ont de plus en plus la faveur dans la lutte contre le bruit et les vibrations.

Le chapitre consacré aux trains planétaires est également très développé, étant donné l'importance accrue de ces ensembles dans les transmissions modernes.

Nous avons introduit un chapitre important consacré aux matériaux et aux exigences pour certains procédés de traitements thermiques.

La deuxième partie est consacrée aux principales méthodes de fabrication des engrenages, pour les différents types, avec les machines les plus récentes à commande numérique, pour le taillage, la rectification, le shaving et le honing.

Le chapitre consacré au contrôle est très développé. Il comporte non seulement la revue des différents critères de qualité des dentures, mais également les différents documents ISO concernant les tolérances des classes de qualité proposées. Les appareils de contrôle les plus modernes sont également décrits, la plupart d'entre eux étant d'ailleurs à commande numérique.

La troisième partie de l'ouvrage est consacrée aux ensembles à engrenages. Nous indiquons les réalisations les plus intéressantes et modernes dans les domaines suivants :

- mécanique générale ;
- industrie du ciment ;
- industrie sidérurgique ;
- ensembles à grande vitesse ;
- transmissions de marine ;
- ensembles à engrenages à vis sans fin.

Nous mentionnons quelques aspects fondamentaux comme par exemple la lubrification et la capacité thermique.

Une partie très importante est consacrée à la réception des ensembles à engrenages, par exemple au sujet du bruit et des vibrations. Il était également important de donner des informations au sujet des accouplements, qui jouent un rôle primordial entre les organes menants et menés.

L'examen et le contrôle des portées des dentures sont également mentionnés étant donné leur importance dans une appréciation globale de la qualité des engrenements. Il est également intéressant de consacrer un chapitre aux différents types de paliers, paliers lisses et paliers à roulements à billes et galets, avec indication des précautions à prendre pour leur maintenance.

Pour être complet, cette troisième partie est très axée sur tous les problèmes de maintenance des ensembles à engrenages.

Qu'il me soit permis d'exprimer dans cette dernière édition, tout le plaisir que m'ont procuré ces longues années consacrées aux engrenages, depuis le début de ma coopération avec mon maître, le Recteur Capelle, grâce à un contact très profond avec tout le monde technique spécialisé, aussi bien en France qu'à l'étranger.

Pour la 7^e édition de mon ouvrage, j'avais eu le plaisir de compter sur les préfaces de Messieurs Allard et Octrue : je les remercie encore pour leur marque de sympathie.

Pour cette 8^e édition, je suis heureux d'accueillir Monsieur Jacques Boisset, un fidèle ami que j'ai eu le plaisir et l'honneur de fréquenter durant mes belles années de coopération avec la prestigieuse société Maag de Zurich. Il continue la réalisation d'ensembles à engrenages de haute technicité, et a consacré ces dernières années à la présidence de la fédération Unitram.

Pour cette dernière édition, je me dois d'exprimer toute ma reconnaissance à la maison Dunod pour l'excellente collaboration et la qualité des ouvrages édités depuis 1949.

Georges Henriot

A

Conception des engrenages

1 • RAPPEL DES NOTIONS FONDAMENTALES

A

CONCEPTION DES ENGRENAGES

1.1 Théorie élémentaire sur les vecteurs

On appelle *axe* une droite indéfinie xx' sur laquelle on a défini un sens de parcours, positif ou négatif (figure 1.1). Un *vecteur* est un segment AB de cet axe sur lequel on a fixé un sens. Un vecteur est défini par les trois données suivantes :

- sa direction : qui est celle de l'axe xx' qui lui sert de support ;

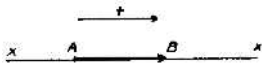


Figure 1.1 – Vecteur



Figure 1.2 – Vecteur force

- son sens : qui est positif ou négatif comparativement au sens positif choisi pour l'axe ;
- son intensité : déterminée par sa longueur AB .

En mécanique, les vecteurs servent à matérialiser les *forces* appliquées à un système déterminé. Le vecteur $\vec{F}$, par exemple (figure 1.2), fixe la direction de la force, son sens, son intensité et son point d'application M . (Au sujet de l'intensité, il suffit de choisir une échelle.)

1.1.1 Composition des forces

■ Deux forces concourantes

La *somme* $\vec{R}$ des deux forces F_1 et F_2 concourantes au point M est déterminée facilement par la règle dite « du parallélogramme ». C'est la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont respectivement égaux aux vecteurs représentatifs des forces F_1 et F_2 (figure 1.3).

Nous écrivons :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.1)$$

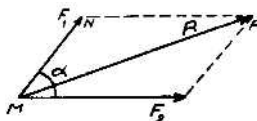


Figure 1.3 – Deux forces concourantes

L'intensité de la somme est déterminée facilement ; dans le triangle MNP nous avons :

$$\overline{MP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 - 2MN \cdot NP \cos \widehat{MNP}$$

soit :

$$|R| = \sqrt{\overline{F_1}^2 + \overline{F_2}^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} \quad (1.2)$$

■ Deux forces parallèles

□ Premier cas (figure 1.4)

Les deux forces F_1 et F_2 sont parallèles et de même sens.

La somme $\vec{R}$ est déterminée :

- par sa direction, qui est parallèle à la direction des deux forces composantes ;
- par son sens, qui est évidemment le même que celui de F_1 et F_2 ;
- par son intensité :

$$|R| = |F_1| + |F_2| \quad (1.3)$$

– par son point d'application M , situé à l'intérieur du segment joignant les points d'application M_1 et M_2 des forces F_1 et F_2 , à une distance de ceux-ci déterminée par la relation connue suivante :

$$|F_1| \cdot MM_1 = |F_2| \cdot MM_2$$

soit :

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{|F_2|}{|F_1|} \quad (1.4)$$

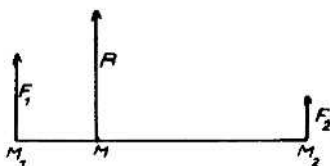


Figure 1.4 – Deux forces parallèles et de même sens

□ Second cas (figure 1.5)

Les deux forces F_1 et F_2 sont parallèles, mais de sens contraires.

La somme $\vec{R}$ a même direction que les deux forces composantes, le sens de celle qui a la plus forte intensité. Son intensité est égale à la différence des intensités des deux composantes.



Figure 1.5 – Deux forces parallèles et de sens opposés

Son point d'application M est situé, dans ce cas, à l'extérieur du segment $M_1 M_2$, du côté de la force ayant la plus forte intensité et il vérifie la relation :

$$|F_1| \cdot MM_1 = |F_2| \cdot MM_2$$

soit :

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{|F_2|}{|F_1|} \quad (1.5)$$

■ Système de forces (figure 1.6)

Soit un ensemble de forces $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ réparties d'une façon quelconque. Leur somme est obtenue simplement de la façon suivante.

Par un point O quelconque de l'espace, mener un vecteur équipollent à $\vec{F}_1$. Par l'extrémité de $\vec{F}_1$, mener un vecteur équipollent à $\vec{F}_2$ et ainsi de suite. La somme $\vec{R}$ est le vecteur $\vec{OA}$, A étant l'extrémité du dernier des vecteurs portés bout à bout. Il est bien évident que le vecteur $\vec{R}$ reste équipollent à lui-même, quelle que soit la position du point O dans l'espace.

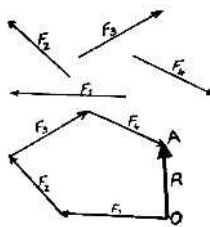


Figure 1.6 – Système de forces

1.1.2 Rappel sur les moments

Le moment d'un vecteur $\vec{F}$ par rapport à un point M est un vecteur $\vec{MG}$ dont l'intensité est égale au produit de l'intensité du vecteur $\vec{F}$ par la distance de M au support de celui-ci :

$$|MG| = |F| \cdot MH \quad (1.6)$$

Sa direction est perpendiculaire au plan formé par le point M et le vecteur représentatif $\vec{F}$.

Son sens est tel qu'un observateur traversé des pieds à la tête par ce vecteur $\overrightarrow{MG}$ voit le vecteur $\vec{F}$ dirigé dans le sens positif (sens trigonométrique, inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre) (figure 1.7).

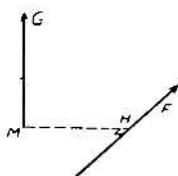


Figure 1.7 – Vecteur moment

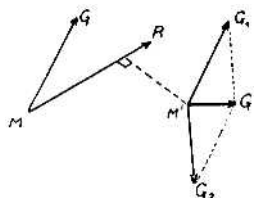


Figure 1.8 – Réduction d'un système en un autre point M'

■ Moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point M

Il suffit de déterminer séparément les moments des différents vecteurs par rapport au point M . On compose ensuite les vecteurs représentatifs de ces moments d'après la règle donnée précédemment. On obtient ainsi le moment résultant $\vec{G}$.

Le moment d'un vecteur ou d'un système de vecteurs par rapport à un point M dépend donc de la position de ce point dans l'espace : sa direction étant variable suivant le point M , il est possible de trouver un point M particulier tel que le vecteur moment résultant $\vec{G}$ ait même support que le vecteur somme $\vec{R}$: le support commun aux deux vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{R}$ est alors appelé *axe central* du système de vecteurs.

Connaissant les éléments de réduction d'un système de vecteurs en un point M c'est-à-dire la somme $\vec{R}$ et le moment résultant $\vec{G}$, les éléments de réduction en un autre point M' s'en déduisent comme suit (figure 1.8) :

- somme $\vec{R}'$: équivalente à $\vec{R}$;
- moment résultant $\vec{G}'$ = somme géométrique du vecteur $\vec{G}_1$ équivalent à $\vec{G}$ et du vecteur $\vec{G}_2$ représentant le moment de la somme $\vec{R}$ par rapport au point M' .

■ Couple

Dans le cas de forces par exemple, un couple est un système de deux forces parallèles, de sens inverses et de même intensité. La somme $\vec{R}$ est alors nulle

et le moment résultant $\vec{G}$ est le même par rapport à tous les points de l'espace (en effet, en se reportant au paragraphe précédent, $\vec{G}_2$ est toujours nul). En prenant, par exemple, le point M situé sur le support du vecteur représentatif $\vec{F}_2$ nous obtenons (figure 1.9) :

$$|G| = |F_1| \cdot MH$$

(le moment de $\vec{F}_2$ par rapport à M est nul).

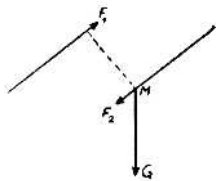


Figure 1.9 – Couple

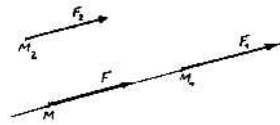


Figure 1.10 – Systèmes de forces équivalents

1.1.3 Systèmes de forces équivalents

Deux systèmes de forces sont équivalents par rapport à un point M de l'espace si les éléments de réduction de ces deux systèmes par rapport à M , à savoir somme $\vec{R}$ et moment résultant $\vec{G}$, sont identiques.

Si nous transportons le vecteur force $\vec{F}$ le long de son support, de $\vec{F}$ en $\vec{F}_1$ par exemple (figure 1.10), nous ne changeons pas le système de forces ($\vec{R}$ et $\vec{G}$ ne sont pas modifiés).

En revanche, si nous le transportons en $\vec{F}_2$, le vecteur $\vec{F}_2$ étant équipollent à $\vec{F}$, le système de forces n'est plus équivalent ; en effet, si $\vec{R}$ a toujours la même valeur, il n'en est plus de même pour G .

1.2 Vitesses et composition des vitesses

Soit (C) la trajectoire du point matériel M (figure 1.11). À l'instant t , le point M est en M_0 , et à l'instant $(t + \Delta t)$ il est en M_1 . La *vitesse moyenne* du point matériel de M_0 à M_1 peut être représentée par le vecteur $\vec{v}_m$, ayant comme support le segment M_0M_1 , dirigé de M_0 à M_1 et ayant comme intensité :

$$|v_m| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Δs étant la longueur de l'arc $\widehat{M_0M_1}$ de la trajectoire.



Figure 1.11 – Vitesse

Pour obtenir la *vitesse instantanée* du point matériel au temps t , il suffit de faire tendre Δt vers zéro. Le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_m$ tend vers le vecteur vitesse instantanée en M_0 , soit $\vec{v}$.

Ce vecteur $\vec{v}$ est donc tangent en M_0 à (C) et est dirigé dans le sens du mouvement. Son intensité est égale à :

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} \quad (1.7)$$

ds et dt désignant des quantités infiniment petites.

Si $s = f(t)$ est l'équation du mouvement de trajectoire (C) , la vitesse du point matériel s'obtient donc en dérivant cette fonction par rapport au temps.

Un corps solide étant formé d'une infinité de points matériels, son mouvement sera donc connu si nous connaissons les fonctions du temps $s = f(t)$ définissant les trajectoires de chacun de ses points. Si le solide est indéformable, et c'est le cas général, les positions de trois de ses points déterminent complètement son mouvement.

1.2.1 Mouvements fondamentaux

Il existe trois mouvements fondamentaux. (Notons que nous supposons toujours le solide comme indéformable.)

■ Mouvement de translation

Un solide est animé d'un mouvement de translation quand il se déplace de manière que les segments de droite joignant les points du corps deux à deux restent équipollents à eux-mêmes (figure 1.12).

Soit par exemple A_0 , B_0 et C_0 les positions de trois points du solide (S) à l'instant t . À l'instant $(t + \Delta t)$, ces points occupent les positions A_1 , B_1 et C_1 . Nous avons alors :

- A_1B_1 équipollent à A_0B_0 ;
- A_1C_1 équipollent à A_0C_0 , etc.

Nous pouvons donc écrire que dans un mouvement de translation les trajectoires des différents points du solide sont identiques ; les vitesses instantanées de tous les points à un instant quelconque sont donc représentées par des vecteurs équipollents :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C \quad (1.8)$$

Si les trajectoires des différents points du solide sont rectilignes, celui-ci est animé d'un *mouvement de translation rectiligne*.

Si la vitesse instantanée conserve une valeur constante, le mouvement est dit *uniforme*.

Une translation rectiligne uniforme peut donc être représentée par un vecteur $\vec{v}$, indiquant la direction et le sens du déplacement, ainsi que la valeur absolue de la vitesse (figure 1.13).

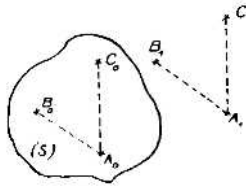


Figure 1.12 – Translation

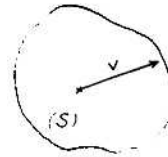


Figure 1.13 – Translation

■ Mouvement de rotation

Un corps est animé d'un mouvement de rotation si deux de ses points restent fixes (figure 1.14). Il est bien évident que si A et B sont les deux points fixes, l'axe xx' passant par ceux-ci est tel que tous ses points sont également fixes : c'est l'axe de rotation.

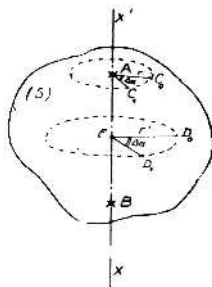


Figure 1.14 – Rotation

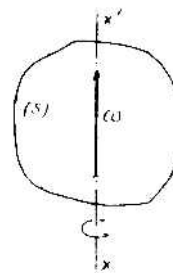


Figure 1.15 – Rotation

Tous les points du solide décrivent donc des circonférences dont les rayons sont les distances de ces points à l'axe xx' (le point C décrit la circonférence de centre A et rayon r , tandis que le point D décrit la circonférence de centre E et rayon r').

Quand le corps solide passe d'une position (0) à une autre position (1), tous ses points tournent d'un même angle $\Delta\alpha$. Si Δt est l'intervalle de temps mis pour passer d'une position à l'autre, nous pouvons définir la *vitesse angulaire moyenne* dont la valeur absolue est égale à :

$$|\omega_m| = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad (1.9)$$

De même que pour les vitesses linéaires, nous pouvons définir la *vitesse angulaire instantanée* à l'instant t en faisant tendre Δt vers zéro.

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (1.10)$$

La rotation du corps étant définie par une fonction $\alpha = f(t)$, la vitesse angulaire instantanée à un instant quelconque t est donc obtenue en dérivant cette fonction par rapport au temps.

Si la vitesse instantanée conserve une valeur constante, le mouvement est une *rotation uniforme* ; il est représenté par un vecteur $\vec{\omega}$ (figure 1.15) porté par l'axe de rotation, dont le sens est tel qu'un observateur traversé des pieds à la tête par ce vecteur voit tourner le corps dans le sens positif (inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre). L'intensité de ce vecteur est proportionnelle à la valeur absolue de la vitesse angulaire.

ω est toujours exprimée en radians par seconde, de sorte que nous pouvons écrire que la vitesse linéaire (ou tangentielle) d'un point quelconque C du solide situé à une distance r de l'axe de rotation est égale à :

$$v = r \cdot \omega \quad (\text{figure 1.16})$$

Notons que le vecteur $\vec{v}$ peut être considéré comme le moment du vecteur $\vec{\omega}$ par rapport au point C .

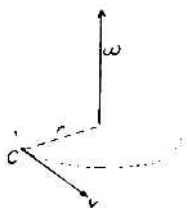


Figure 1.16 – Vitesse tangentielle

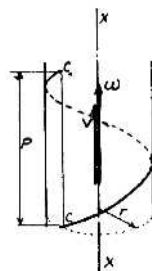


Figure 1.17 – Mouvement hélicoïdal simple

■ Mouvement de vissage

Le mouvement de vissage résulte de la superposition d'une translation et d'une rotation. Si la rotation est uniforme autour d'un axe xx' et si la translation est uniforme et parallèle à xx' , nous obtenons le *mouvement hélicoïdal simple* (figure 1.17).

Il peut être représenté par deux vecteurs portés par l'axe xx' :

- le vecteur translation $\vec{v}$;
- le vecteur rotation $\vec{\omega}$.

Tous les points du solide décrivent des hélices de même pas p , enroulées sur des cylindres dont les rayons sont les distances des points considérés à l'axe de rotation.

1.2.2 Composition des mouvements : mouvement relatif, mouvement d'entraînement, mouvement absolu

Nous venons d'étudier le mouvement d'un solide S par rapport à un système de référence fixe.

Nous allons voir maintenant le mouvement d'un solide S_1 mobile par rapport à un autre solide S_2 , lui-même mobile par rapport à un système de référence fixe A (figure 1.18).

Le mouvement de S_1 par rapport à S_2 (soit $\frac{S_1}{S_2}$) est appelé *mouvement relatif*.

Le mouvement $\frac{S_2}{A}$ est appelé *mouvement d'entraînement*.

Le mouvement $\frac{S_1}{A}$ du solide S_1 par rapport au système de référence est le *mouvement absolu* de S_1 .

Le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement sont deux mouvements simples que nous avons étudiés précédemment. Si $\vec{v}_r$ (*vitesse relative*) est la vitesse du point 1 de S_1 par rapport au point 2 de S_2 , et $\vec{v}_e$ (*vitesse d'entraînement*) étant la vitesse du point 2 par rapport au système de référence fixe, la *vitesse absolue* du point 1 de S_1 par rapport au système de référence est donnée par la relation géométrique suivante (figure 1.19) :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (1.11)$$

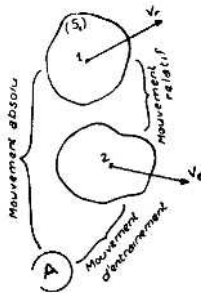


Figure 1.18 – Composition des mouvements

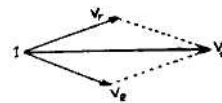


Figure 1.19 – Composition des vitesses

Exemple

Les vecteurs vitesses linéaires et vitesses angulaires se composent comme de simples vecteurs.

■ Composition de deux translations (figure 1.20)

Soit un chariot (1) animé d'un mouvement de translation à l'intérieur des glissières d'un bâti fixe : cette translation est représentée par le vecteur $\vec{v}_e$, vitesse

d'entraînement. Ce chariot porte des glissières dans lesquelles se déplace un coulisseau (2) avec une vitesse de translation $\vec{v}_r$, mouvement relatif.

Le mouvement du coulisseau par rapport au bâti fixe est également une translation de vecteur vitesse $\vec{v}_a$, vitesse absolue, tel que :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Au bout du temps unité, le coulisseau s'est déplacé de O en O' .

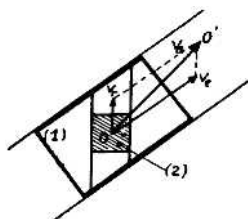


Figure 1.20 – Composition de deux translations

■ Une rotation et une translation parallèle à l'axe de rotation

Nous avons vu que le mouvement résultant était un mouvement hélicoïdal.

■ Deux rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ dont les axes sont parallèles, et de même sens

Le mouvement résultant est une rotation de vecteur vitesse $\vec{\Omega}$, qui peut être déterminé comme dans le cas de la composition de vecteurs forces (figure 1.21).

Axe X : parallèle aux deux axes X_1 et X_2 , tel que :

$$\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{|\vec{\omega}_2|}{|\vec{\omega}_1|} \quad (1.12)$$

I est intérieur au segment O_1O_2 .

$\vec{\Omega}$: de même sens que $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ et :

$$|\vec{\Omega}| = |\vec{\omega}_1| + |\vec{\omega}_2|$$

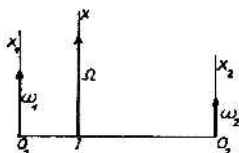


Figure 1.21 – Composition de deux rotations parallèles et de même sens

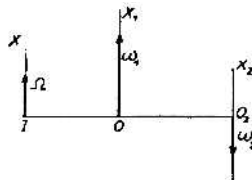


Figure 1.22 – Composition de deux rotations parallèles et de sens contraires

■ **Deux rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ dont les axes sont parallèles, et de sens contraires (figure 1.22)**

Le mouvement résultant est une rotation de vecteur vitesse $\vec{\Omega}$ déterminé comme suit :

Axe X : parallèle aux deux axes X_1 et X_2 et tel que :

$$\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{|\vec{\omega}_2|}{|\vec{\omega}_1|} \quad (1.13)$$

I est extérieur au segment O_1O_2 .

$\vec{\Omega}$: de même sens que celui des deux vecteurs $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ ayant la plus forte intensité et :

$$|\Omega| = |\vec{\omega}_1| - |\vec{\omega}_2| \quad (1.14)$$

■ **Deux rotations concourantes $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ (figure 1.23)**

Le mouvement résultant est une rotation de vecteur vitesse $\vec{\Omega}$ déterminé par la règle du parallélogramme.

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

et :

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{|\vec{\omega}_1|^2 + |\vec{\omega}_2|^2 + 2|\vec{\omega}_1| \cdot |\vec{\omega}_2| \cdot \cos \Delta} \quad (1.15)$$

■ **Deux rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ dont les axes X_1 et X_2 ne sont ni parallèles ni concourantes (figure 1.24)**

Les éléments de réduction de ce système de deux vecteurs sont définis de la façon suivante.

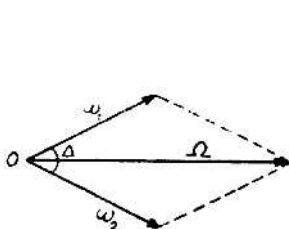


Figure 1.23 – Composition de deux rotations concourantes

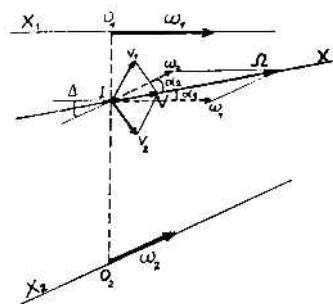


Figure 1.24 – Composition de deux rotations d'axes quelconques

□ **Somme $\vec{\Omega}$**

C'est une rotation dont l'axe X passe par le point I de la plus courte distance O_1O_2 des axes X_1 et X_2 , et déterminée par la règle du parallélogramme.

Appelons : Δ l'angle des deux axes X_1 et X_2

α_1 l'angle des deux axes X et X_1

α_2 l'angle des deux axes X et X_2 .

Nous avons :

$$\frac{IO_1}{IO_2} = \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2}$$

avec :

$$\frac{|\vec{\omega}_1|}{\sin \alpha_2} = \frac{|\vec{\omega}_2|}{\sin \alpha_1}$$

et :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \Delta$$

et :

$$|\vec{\Omega}| = \sqrt{|\vec{\omega}_1|^2 + |\vec{\omega}_2|^2 + 2|\vec{\omega}_1| \cdot |\vec{\omega}_2| \cdot \cos \Delta} \quad (1.16)$$

□ **Moment résultant $\vec{V}$**

C'est la somme des moments des vecteurs $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ par rapport au point I .

Ceux-ci sont des vitesses linéaires et leurs vecteurs représentatifs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont respectivement perpendiculaires aux plans formés par les vecteurs $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ avec le point I ; leur sens est déterminé par la règle énoncée dans un paragraphe précédent :

$$\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

(le support de $\vec{V}$ coïncide avec celui de $\vec{\Omega}$)

$$|\vec{v}_1| = |\vec{\omega}_1| \cdot IO_1$$

$$|\vec{v}_2| = |\vec{\omega}_2| \cdot IO_2$$

et :

$$|\vec{V}| = \sqrt{\omega_1^2 \cdot IO_1^2 + \omega_2^2 \cdot IO_2^2 - 2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot IO_1 \cdot IO_2 \cdot \cos \Delta} \quad (1.17)$$

Le mouvement résultant est donc une rotation $\vec{\Omega}$ accompagnée d'une translation $\vec{V}$ dirigée suivant l'axe de cette rotation. Pour cette raison, l'axe X est appelé *axe de viration* ou *axe de vissage*.

1.3 Mouvement d'un plan sur un plan fixe

1.3.1 Centre instantané de rotation

Considérons un plan fixe p sur lequel se déplace un plan mobile P restant constamment en coïncidence avec lui. Nous supposons le mouvement tout à fait général et non pas une simple translation (figure 1.25).

À chaque instant, il existe un point I du plan mobile qui est tel que tout se passe comme si, à l'instant considéré, le plan mobile pivotait autour de ce point. Pour bien voir cette rotation instantanée autour de I , il suffit de partir d'un déplacement fini du plan mobile. Si A_0B_0 et A_1B_1 sont les positions d'un segment de droite tracé sur le plan mobile, aux instants t et $t + \Delta t$, il est facile de voir que l'on peut amener le plan P de la position (0) à la position (1) par une simple rotation autour d'un point J , intersection des perpendiculaires au milieu des segments A_0A_1 et B_0B_1 . En faisant tendre Δt vers zéro, on arrive ainsi à la notion de *rotation instantanée* autour du *centre instantané de rotation* I , limite du point J précédemment défini (figure 1.26).

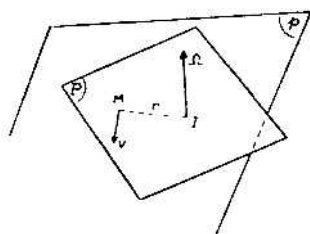


Figure 1.25 – Déplacement d'un plan mobile P sur un plan fixe p

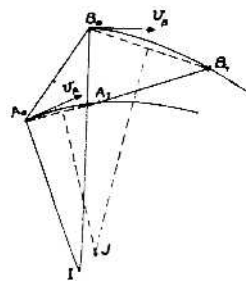


Figure 1.26 – Centre instantané de rotation

La rotation instantanée peut être représentée par un vecteur $\vec{\Omega}$, normal en I aux plans p et P .

À l'instant considéré, un point M quelconque du plan mobile a donc une vitesse $\vec{v}$ dont le vecteur représentatif, situé dans le plan, est normal à la droite IM et a comme intensité :

$$|\vec{v}| = |\vec{\Omega}| \cdot IM \quad (1.18)$$

Le vecteur $\vec{v}$ étant évidemment tangent à la trajectoire de M , nous remarquons que les normales à un instant donné aux trajectoires des points du plan mobile concourent toutes au centre instantané de rotation (figure 1.26).

1.3.2 Base et roulante du mouvement

Si à chaque instant nous repérons sur le plan mobile le point I , et si nous marquons avec une épingle le point i du plan fixe qui lui correspond, nous obtenons alors deux courbes :

- la courbe B , lieu des points i du plan fixe, est appelée la *base* du mouvement ;
- la courbe R , lieu des points I du plan mobile, est appelée la *roulante* du mouvement (figure 1.27).

On démontre la propriété importante suivante.

Pendant tout le mouvement de P sur p , la roulante R roule sans glisser sur la base B .

Imaginons un insecte qui, pendant le mouvement de P sur p , se déplace sur la courbe R de manière à se trouver à chaque instant sur la courbe B au point i . Sa trajectoire relative (sur le plan mobile) est la courbe R , et sa trajectoire absolue (par rapport au plan fixe) est la courbe B .

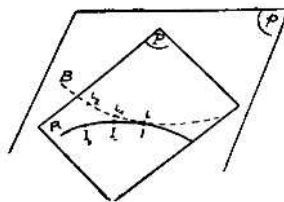


Figure 1.27 – Roulante et base

La vitesse absolue de l'insecte est représentée par un vecteur $\vec{v}_a$ qui est tangent à la trajectoire absolue B . D'après le théorème sur la composition des vitesses, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Écartons, pour plus de compréhension, le plan P du plan p . Séparons les trois mouvements fondamentaux (figure 1.28) :

- mouvement relatif de l'insecte (en coïncidence avec le point I) par rapport au plan mobile ;
- mouvement d'entraînement : du point I du plan mobile par rapport au point i du plan fixe ;
- mouvement absolu : du point I par rapport au plan fixe.

La vitesse relative est représentée par un vecteur $\vec{v}_r$ tangent à la trajectoire de I sur le plan mobile, soit R .

La vitesse d'entraînement est nulle car c'est la vitesse du point I du plan mobile, centre instantané de rotation.

Nous avons donc $\vec{v}_r = \vec{v}_a$. Ces deux vecteurs ayant un point commun (I, i), ils sont confondus, ce qui montre que les courbes B et R sont bien tangentes ; elles roulent donc l'une sur l'autre (figure 1.29).

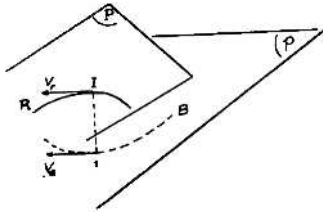


Figure 1.28 – Vitesse absolue et vitesse relative

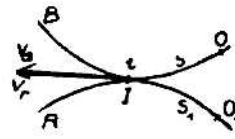


Figure 1.29 – Roulement de roulante sur base

Montrons maintenant qu'elles roulent sans glisser.

Soit O et O_1 les points de B et R qui sont en contact à l'origine du mouvement. Les points de contact actuels i et I sont déterminés par les arcs s et s_1 .

Nous avons établi $\vec{V}_a = \vec{V}_r$, c'est-à-dire :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds_1}{dt}$$

ce qui conduit à :

$$s = s_1 + k$$

or à l'instant $t = 0$, nous avons $s = s_1 = 0$, d'où $k = 0$.

Nous déterminons ainsi :

$$s = s_1$$

ce qui prouve qu'il n'y a pas de glissement.

■ Enveloppe d'une courbe du plan mobile (figure 1.30)

Soit (C) une courbe tracée sur le plan mobile P , et différente de la roulante R ; pendant le mouvement du plan P sur le plan fixe p , elle prend une infinité de positions qui ont pour enveloppe une courbe (E) du plan fixe.

Cette enveloppe jouit de la propriété très importante suivante : *la normale au point de contact M d'une courbe (C) du plan mobile avec son enveloppe (E) passe par le centre instantané de rotation, et cette courbe roule en glissant sur son enveloppe.*

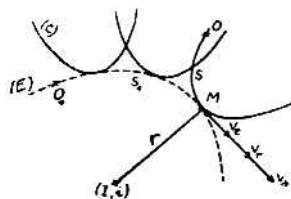


Figure 1.30 – Courbes enveloppes

Imaginons encore un insecte qui, pendant le mouvement de P sur p , se déplace sur (C) de manière à se trouver à chaque instant au point M où (C) touche son enveloppe (E) .

Sa trajectoire relative (sur le plan mobile) est la courbe (C) elle-même, et sa trajectoire absolue (sur le plan fixe) est la courbe enveloppe (E) .

La vitesse relative est représentée par le vecteur $\vec{v}_r$, tangent à (C) et la vitesse absolue est représentée par le vecteur $\vec{v}_a$ tangent à (E) . Les deux courbes (C) et (E) étant tangentes, les vecteurs $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_r$ sont portés par la tangente commune à ces deux courbes.

Quant à la vitesse d'entraînement de l'insecte, c'est la vitesse du point M du plan mobile par rapport au plan fixe. Si r est la distance de ce point au centre instantané de rotation, et $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire de la rotation instantanée, nous pouvons écrire :

$$|\vec{v}_e| = r \cdot |\vec{\Omega}|$$

le vecteur $\vec{v}_e$ étant perpendiculaire au segment IM . Or, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Comme les vecteurs $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_r$ ont même support, il faut que $\vec{v}_e$ soit également porté par ce support. Le segment IM est donc perpendiculaire à la tangente commune aux deux courbes (C) et (E) .

Déterminons maintenant la vitesse de glissement de (C) sur son enveloppe (E) .

Désignons par s et s_1 les arcs parcourus par l'insecte sur les courbes (C) et (E) depuis une certaine origine où les points O et O_1 étaient en contact. Nous avons alors :

$$\vec{v}_a = \frac{ds_1}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v}_r = \frac{ds}{dt}$$

or :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r = \frac{ds_1}{dt} - \frac{ds}{dt}$$

vitesse de glissement de (C) par rapport à son enveloppe (E) .

Mais nous avons établi précédemment :

$$|\vec{v}_e| = |\vec{\Omega}| \cdot IM \quad (1.19)$$

Nous pouvons donc dire que la courbe (C) roule en glissant sur son enveloppe, la vitesse de glissement en un point M ayant comme valeur le produit de la vitesse angulaire de rotation instantanée par la distance du point M au centre instantané de rotation.

1.3.3 Exemple d'application des propriétés du centre instantané de rotation

Définissons par exemple le mouvement d'un segment AB d'un plan mobile se déplaçant sur un plan fixe défini par deux droites perpendiculaires Ox , Oy , les points A et B restant constamment en contact avec Ox et Oy respectivement (figure 1.31).

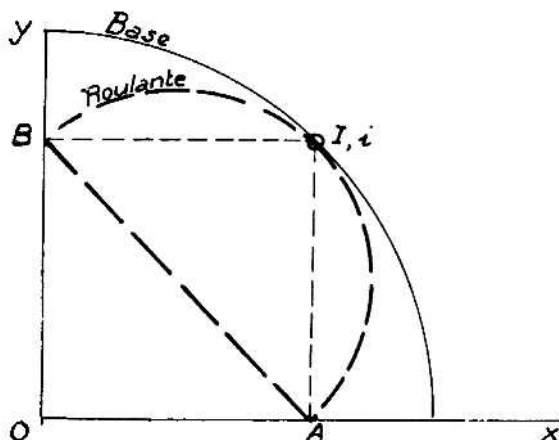


Figure 1.31 – Exemple d'application du centre instantané de rotation

Les trajectoires des points A et B étant Ox et Oy , le centre instantané de rotation du mouvement du segment AB se trouve à l'intersection des normales menées en A et B à Ox et Oy .

Définissons la base du mouvement : la distance du centre instantané i au point O est constante et égale à AB ; la base est donc un cercle de centre O et de rayon AB .

Quant à la roulante, c'est également un cercle : l'angle AIB étant toujours égal à $\pi/2$, la roulante est un cercle de diamètre AB .

Le mouvement du segment AB par rapport au plan fixe revient donc à un roulement sans glissement du cercle de diamètre AB sur le cercle de centre O .

1.3.4 Formule et construction d'Euler-Savary

Commençons par donner une définition simple du centre de courbure μ d'une courbe plane en un point donné M . Ce point est tel qu'un cercle l'ayant comme centre serait la courbe se rapprochant le plus de la courbe donnée au point M . Il est donc situé sur la normale commune en M à la courbe et à l'arc de cercle dit « osculateur ».

Considérons un mouvement plan défini par sa base et sa roulante, tangentes à un instant donné au centre instantané de rotation correspondant I (figure 1.32). Ix est la tangente à la base et à la roulante en I ; les centres de courbure respectifs c et C de ces deux courbes sont tous deux situés sur la normale Iy à Ix . Soit M un point du plan mobile. Il est facile de déterminer le centre de courbure μ de sa trajectoire à un instant quelconque grâce à la formule et à la construction d'Euler-Savary. On sait que la normale en M à la trajectoire de ce point passe par le centre instantané de rotation I ; le centre de courbure μ de cette trajectoire se trouve donc sur IM .

Appelons : θ l'angle de IM par rapport à Ix

r le rayon de courbure de la base en I (c)

R le rayon de courbure de la roulante en I (C)

Nous avons :

$$\frac{1}{I\mu} - \frac{1}{IM} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \frac{1}{\sin \theta} \quad (1.20)$$

La construction d'Euler-Savary permet de déterminer facilement le centre de courbure μ de la trajectoire de M (figure 1.32). Tracer IM :

- IN , perpendiculaire à IM ;
- CM ; détermination du point N ;
- CN ; détermination du centre de courbure μ .

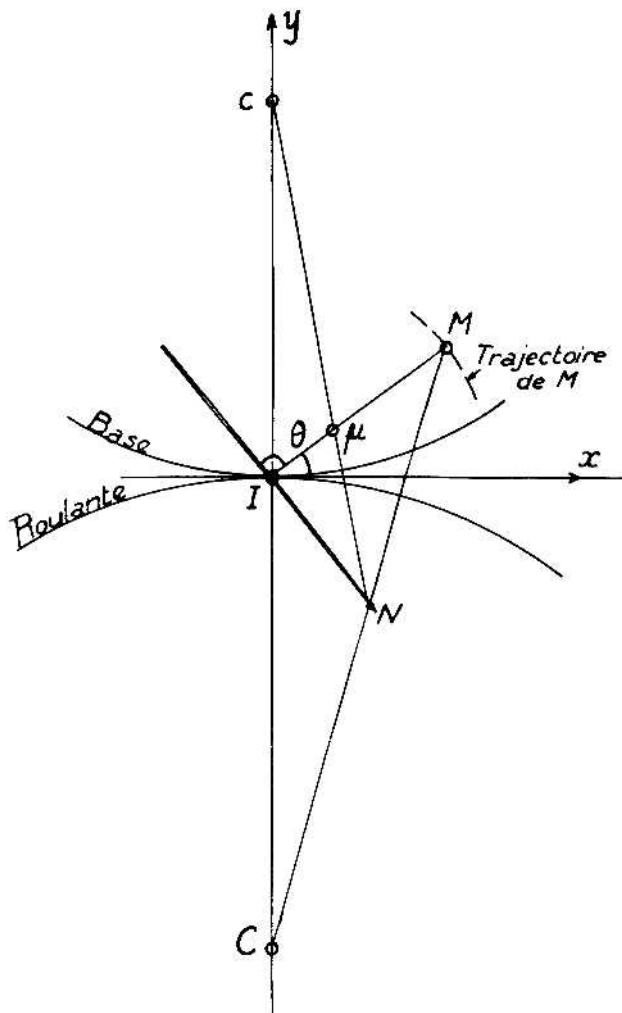


Figure 1.32 – Formule d'Euler-Savary

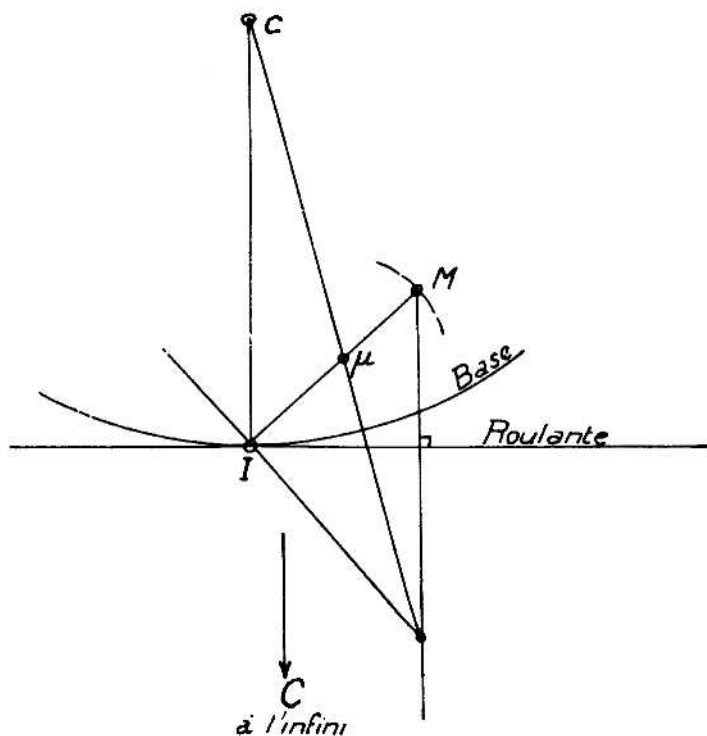


Figure 1.32 bis – La roulante se réduit à une droite

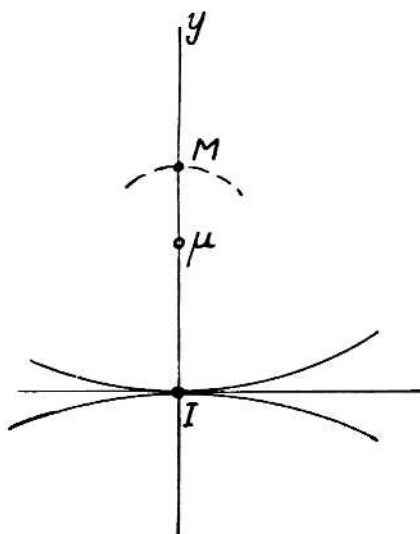


Figure 1.33 – Cas particulier : M sur Iy

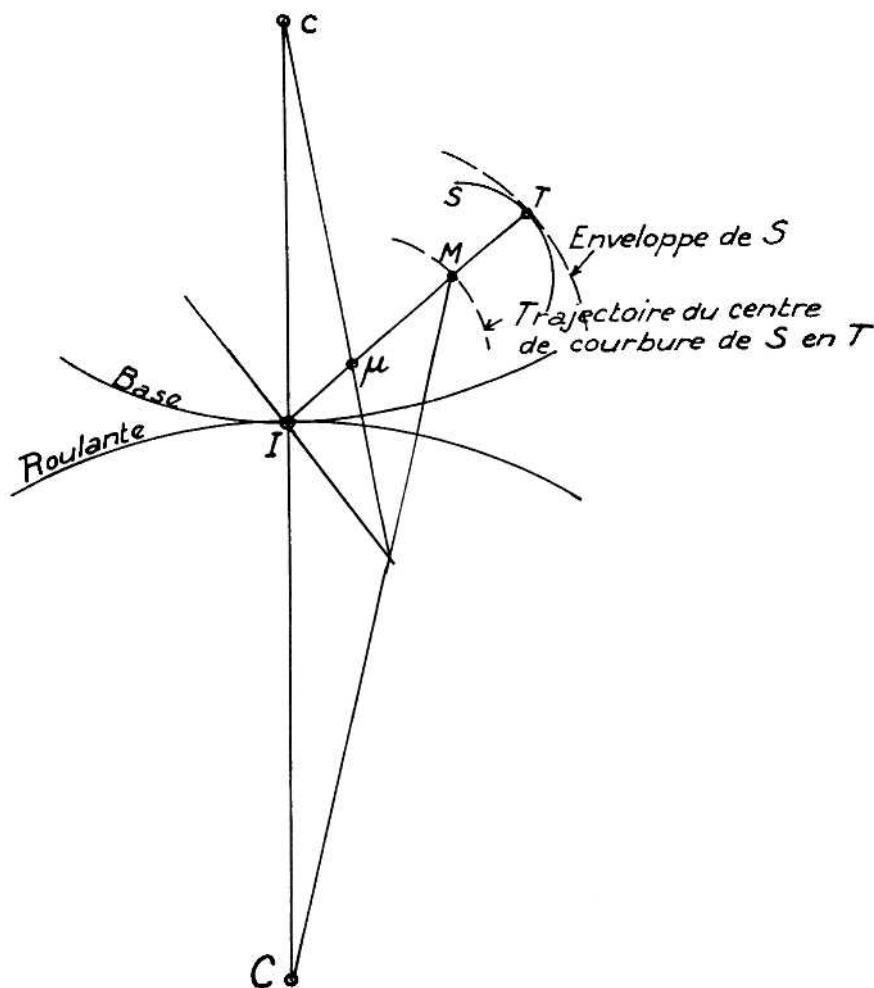


Figure 1.34 – Centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe S

Si la roulante se réduit à une droite, la construction reste valable : le centre de courbure C est alors rejeté à l'infini ; la droite CM se réduit alors à une normale à la roulante (figure 1.32 bis). La construction est en défaut lorsque le point M tombe sur l'axe $I\mu$ (figure 1.33). Il suffit alors de prendre la formule dans laquelle θ devient égal à 90° .

$$\frac{1}{I\mu} - \frac{1}{IM} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \quad (1.21)$$

Si la roulante est rectiligne, $R = \text{infini}$

$$\frac{1}{I\mu} - \frac{1}{IM} = \frac{1}{r} \quad (1.22)$$

Considérons maintenant une courbe S du plan mobile. Pendant le mouvement, cette courbe est tangente à chaque instant en un point T de son enveloppe

(figure 1.34). Comme la normale commune en T à la courbe S et à son enveloppe passe par le centre instantané I , cela signifie que les centres de courbure de ces deux courbes en T sont situés sur TI . De plus, nous énonçons la propriété très importante suivante.

Le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe S du plan mobile en un point de tangence T est le même que le centre de courbure de la trajectoire du centre de courbure de S ; ainsi, M étant le centre de courbure de la courbe S au point T , et μ étant le centre de courbure de la trajectoire de ce point M (déterminé par exemple par la construction d'Euler-Savary), le centre de courbure de l'enveloppe en T est également le point μ . Nous verrons une application intéressante de cette propriété pour la détermination du rayon de courbure de la trochoïde décrite par le sommet arrondi des dents de l'outil de taillage d'une denture.

2 • SURFACES PRIMITIVES ET SURFACES DE DENTURE

Les engrenages ont pour but de transmettre le mouvement de rotation d'un arbre X_1 moteur à un autre arbre X_2 mené, avec un rapport constant des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 .

Selon la position relative des deux arbres, nous distinguons trois classes d'engrenages :

- engrenages parallèles : les deux arbres sont parallèles ;
- engrenages concourants : les deux arbres X_1 et X_2 sont tels que leurs prolongements se coupent ;
- engrenages gauches : les deux arbres occupent une position relative quelconque.

Nous allons étudier successivement les *surfaces primitives* et les *surfaces de denture*.

2.1 Surfaces primitives

2.1.1 Engrenages parallèles

■ Engrenage extérieur

Soit X_1 et X_2 les deux arbres parallèles que nous voulons relier par un engrenage de telle sorte que leurs vitesses angulaires ω_1 et ω_2 soient de sens contraires (figure 2.1).

Pour étudier ce mouvement d'une manière compréhensive, nous allons associer à l'arbre X_1 un plan P qui lui est normal en O_1 ; nous faisons de même pour l'arbre X_2 auquel nous associons un plan p normal en O_2 . Les deux plans P et p sont en coïncidence. Le mouvement à étudier est donc le mouvement relatif de deux plans animés d'un mouvement de rotation autour des deux points O_1 et O_2 .

Ramenons le plan p au repos. Pour cela il suffit de communiquer à tout l'ensemble une rotation de centre O_2 et opposée à $\vec{\omega}_2$.

Dès lors, le problème se ramène au mouvement d'un plan mobile P sur un plan fixe p que nous avons déjà étudié.

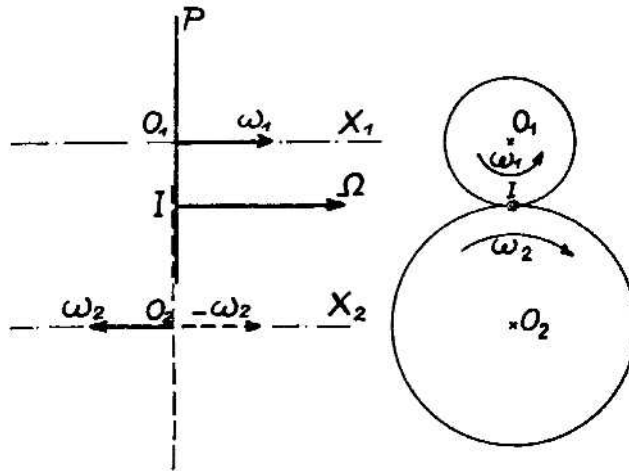


Figure 2.1 – Engrenage parallèle extérieur

Le mouvement relatif de P par rapport à p résulte de la composition de deux rotations $\vec{\omega}_1$ et $-\vec{\omega}_2$, parallèles et de même sens. Il se ramène à une rotation instantanée $\vec{\Omega}$ autour d'un point I , centre instantané de rotation ; ces éléments ont déjà été déterminés précédemment dans le paragraphe sur la composition de deux rotations parallèles et de même sens. Nous allons cependant les retrouver par un raisonnement très simple faisant intervenir les propriétés du centre instantané de rotation.

Ce point a par définition une vitesse nulle. Il faut donc que la somme des vitesses communiquées au point I par les rotations $\vec{\omega}_1$ et $-\vec{\omega}_2$ soit nulle. Plaçons ce point en dehors de la ligne O_1O_2 (figure 2.2).

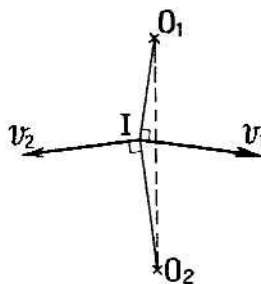


Figure 2.2 – Centre instantané de rotation