TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES DE

MATHÉMATIQUES LICENCE 1

2e ÉDITION

Myriam Maumy-Bertrand
Maître de conférences hors classe en mathématiques appliquées et habilitée à diriger des recherches à l'université de technologie de Troyes

Frédéric Bertrand
Professeur des universités en mathématiques appliquées à l'université de technologie de Troyes

Daniel Fredon
Maître de conférences en mathématiques appliquées

DUNOD

Illustration de couverture : © Yurkina Alexandra/shutterstock.com

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-086012-8

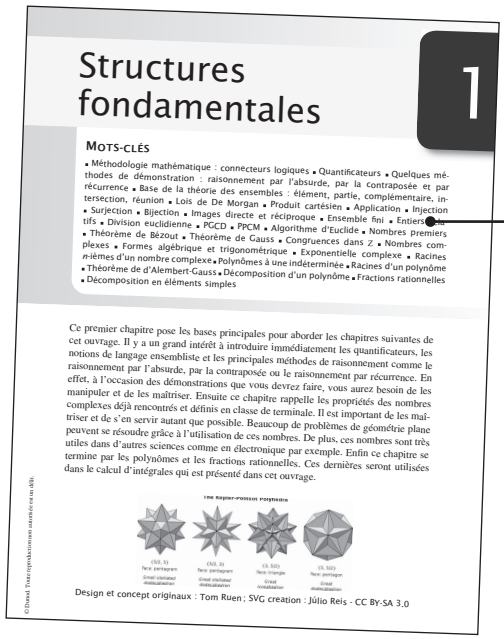
Table des matières

Remerciements

Nous souhaitons ici remercier Marie Chion pour sa relecture attentive.

Que chacun y trouve son bonheur !

Comment utiliser



1

Structures fondamentales

Mots-clés

▪ Méthodologie mathématique : connecteurs logiques ▪ Quantificateurs ▪ Quelques méthodes de démonstration : raisonnement par l'absurde, par la contraposée et par récurrence ▪ Base de la théorie des ensembles : élément, partie, complémentaire, intersection, réunion ▪ Lois de De Morgan ▪ Produit cartésien ▪ Application ▪ Injection ▪ Surjection ▪ Bijection ▪ Images directe et réciproque ▪ Ensemble fini ▪ Entiers relatifs ▪ Division euclidienne ▪ PGCD ▪ PPCM ▪ Algorithme d'Euclide ▪ Nombres premiers ▪ Théorème de Bézout ▪ Théorème de Gauss ▪ Congruences dans $\mathbb{Z}$ ▪ Nombres complexes ▪ Formes algébrique et trigonométrique ▪ Exponentielle complexe ▪ Racines n-ièmes d'un nombre complexe ▪ Polynômes à une indéterminée ▪ Racines d'un polynôme ▪ Théorème de d'Alembert-Gauss ▪ Décomposition d'un polynôme ▪ Fractions rationnelles ▪ Décomposition en éléments simples

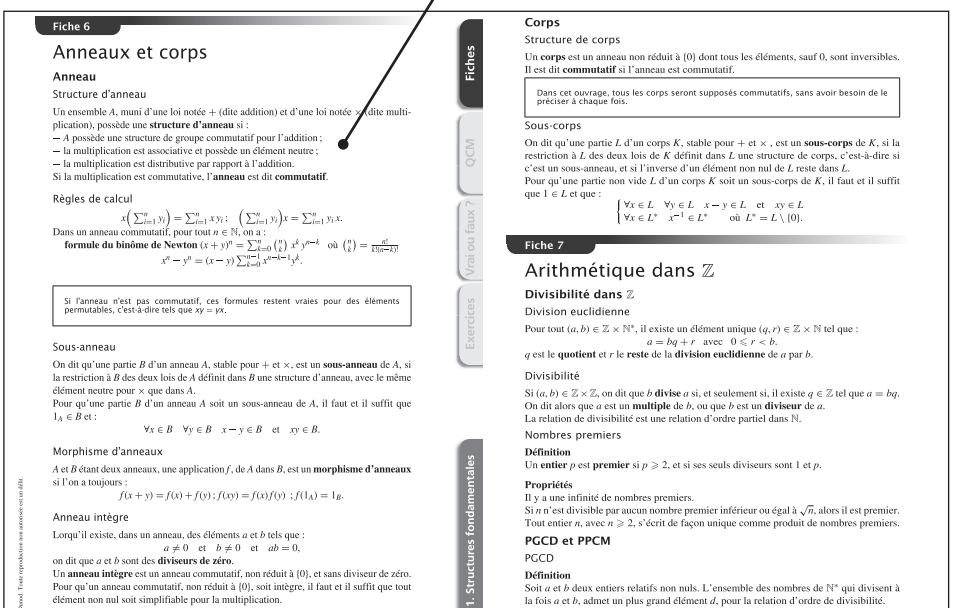
Ce premier chapitre pose les bases principales pour aborder les chapitres suivantes de cet ouvrage. Il y a un grand intérêt à introduire immédiatement les quantificateurs, les notions de langage ensembliste et les principales méthodes de raisonnement comme le raisonnement par l'absurde, par la contraposée ou le raisonnement par récurrence. En effet, à l'occasion des démonstrations que vous devrez faire, vous aurez besoin de les manipuler et de les maîtriser. Ensuite ce chapitre rappelle les propriétés des nombres complexes déjà rencontrés et définis en classe de terminale. Il est important de les maîtriser et de s'en servir autant que possible. Beaucoup de problèmes de géométrie plane peuvent se résoudre grâce à l'utilisation de ces nombres. De plus, ces nombres sont très utiles dans d'autres sciences comme en électronique par exemple. Enfin ce chapitre se termine par les polynômes et les fractions rationnelles. Ces dernières seront utilisées dans le calcul d'intégrales qui est présenté dans cet ouvrage.

Design et concept originaux : Tom Ruen ; SVG creation : Jülio Reis - CC BY-SA 3.0

5 chapitres
et leurs mots-clés

Retrouvez des exercices supplémentaires sur la page associée à l'ouvrage sur dunod.com @

Des rappels de cours sous forme de fiches



Fiche 6

Anneaux et corps

Anneau

Structure d'anneau

Un ensemble A, muni d'une loi notée $+$ (dite addition) et d'une loi notée $\times$ (dite multiplication), possède une **structure d'anneau** si :
– A possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;
– la multiplication est associative et possède un élément neutre ;
– la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
Si la multiplication est commutative, l'**anneau** est dit **commutatif**.

Règles de calcul

$$x\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x\,y_i\,; \quad \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)x = \sum_{i=1}^{n} y_i\,x.$$

Dans un anneau commutatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
formule du binôme de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k.$$

Si l'anneau n'est pas commutatif, ces formules restent vraies pour des éléments permutables, c'est-à-dire tels que $xy = yx$.

Sous-anneau

On dit qu'une partie B d'un anneau A, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-anneau** de A, si la restriction à B des deux lois de A définit dans B une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour $\times$ que dans A.
Pour qu'une partie B d'un anneau A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que $1_A \in B$ et :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B \quad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B.$$

Morphisme d'anneaux

A et B étant deux anneaux, une application f, de A dans B, est un **morphisme d'anneaux** si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,;\, f(xy) = f(x)f(y)\ ;\, f(1_A) = 1_B.$$

Anneau intègre

Lorqu'il existe, dans un anneau, des éléments a et b tels que :

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad ab = 0,$$

on dit que a et b sont des **diviseurs de zéro**.
Un **anneau intègre** est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, et sans diviseur de zéro. Pour qu'un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, soit intègre, il faut et il suffit que tout élément non nul soit simplifiable pour la multiplication.

Fiches | QCM | Vrai ou faux ? | Exercices | 1. Structures fondamentales

Corps

Structure de corps

Un **corps** est un anneau non réduit à $\{0\}$ dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles. Il est dit **commutatif** si l'anneau est commutatif.

Dans cet ouvrage, tous les corps seront supposés commutatifs, sans avoir besoin de le préciser à chaque fois.

Sous-corps

On dit qu'une partie L d'un corps K, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-corps** de K, si la restriction à L des deux lois de K définit dans L une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de L reste dans L.
Pour qu'une partie non vide L d'un corps K soit un sous-corps de K, il faut et il suffit que $1 \in L$ et que :

$$\begin{cases} \forall x \in L \quad \forall y \in L \quad x - y \in L \quad \text{et} \quad xy \in L \\ \forall x \in L^* \quad x^{-1} \in L^* \qquad \text{où } L^* = L \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Fiche 7

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Division euclidienne

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe un élément unique $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < b.$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** de a par b.

Divisibilité

Si $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on dit que b **divise** a si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$.
On dit alors que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a.
La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}$.

Nombres premiers

Définition
Un **entier** p est **premier** si $p \geqslant 2$, et si ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Propriétés
Il y a une infinité de nombres premiers.
Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors il est premier.
Tout entier n, avec $n \geqslant 2$, s'écrit de façon unique comme produit de nombres premiers.

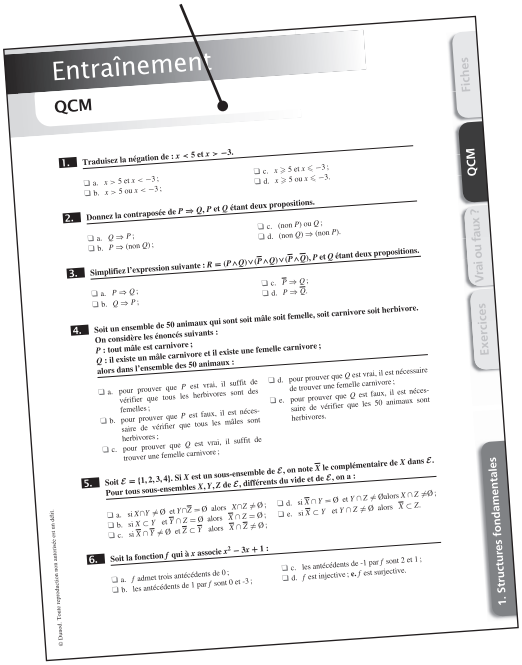
PGCD et PPCM

PGCD

Définition
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des nombres de $\mathbb{N}^*$ qui divisent à la fois a et b, admet un plus grand élément d, pour la relation d'ordre de divisibilité.

cet ouvrage ?

Des QCM
pour s'auto-évaluer


Entraînement

QCM

1. **Traduisez la négation de : $x < 5$ et $x > -3$.**

❑ a. $x > 5$ et $x < -3$;
❑ b. $x > 5$ ou $x < -3$;
❑ c. $x \geqslant 5$ et $x \leqslant -3$;
❑ d. $x \geqslant 5$ ou $x \leqslant -3$.

2. **Donnez la contraposée de $P \Rightarrow Q$, P et Q étant deux propositions.**

❑ a. $Q \Rightarrow P$;
❑ b. $P \Rightarrow (\text{non } Q)$;
❑ c. (non P) ou Q ;
❑ d. (non Q) $\Rightarrow$ (non P).

3. **Simplifiez l'expression suivante : $R = (P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$, P et Q étant deux propositions.**

❑ a. $P \Rightarrow Q$;
❑ b. $Q \Rightarrow P$;
❑ c. $\overline{P} \Rightarrow Q$;
❑ d. $P \Rightarrow \overline{Q}$.

4. **Soit un ensemble de 50 animaux qui sont soit mâle soit femelle, soit carnivore soit herbivore.**
On considère les énoncés suivants :
***P* : tout mâle est carnivore ;**
***Q* : il existe un mâle carnivore et il existe une femelle carnivore ;**
alors dans l'ensemble des 50 animaux :

❑ a. pour prouver que P est vrai, il suffit de vérifier que tous les herbivores sont des femelles ;
❑ b. pour prouver que P est faux, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont herbivores ;
❑ c. pour prouver que Q est vrai, il suffit de trouver une femelle carnivore ;
❑ d. pour prouver que Q est vrai, il est nécessaire de trouver une femelle carnivore ;
❑ e. pour prouver que Q est faux, il est nécessaire de vérifier que les 50 animaux sont herbivores.

5. **Soit $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}$. Si X est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, on note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans $\mathcal{E}$.**
Pour tous sous-ensembles X, Y, Z de $\mathcal{E}$, différents du vide et de $\mathcal{E}$, on a :

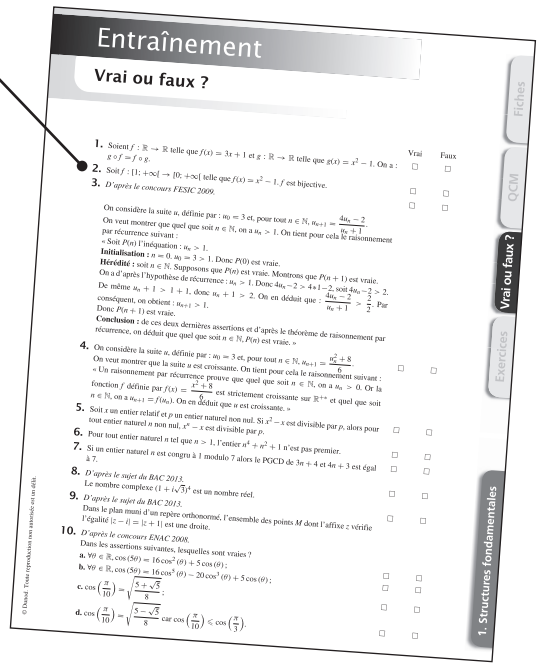
❑ a. si $X \cap Y \neq \emptyset$ et $Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ alors $X \cap Z \neq \emptyset$;
❑ b. si $X \subset Y$ et $\overline{Y} \cap Z = \emptyset$ alors $\overline{X} \cap Z = \emptyset$;
❑ c. si $\overline{X} \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ et $\overline{Z} \subset \overline{Y}$ alors $\overline{X} \cap \overline{Z} \neq \emptyset$;
❑ d. si $\overline{X} \cap Y = \emptyset$ et $Y \cap Z \neq \emptyset$ alors $X \cap Z \neq \emptyset$;
❑ e. si $\overline{X} \subset Y$ et $Y \cap Z \neq \emptyset$ alors $\overline{X} \subset Z$.

6. **Soit la fonction f qui à x associe $x^3 - 3x + 1$:**

❑ a. f admet trois antécédents de 0 ;
❑ b. les antécédents de 1 par f sont 0 et -3 ;
❑ c. les antécédents de -1 par f sont 2 et 1 ;
❑ d. f est injective ; ✍ f est surjective.

Fiches | QCM | Vrai ou faux ? | Exercices | 1. Structures fondamentales

Des questions Vrai/Faux

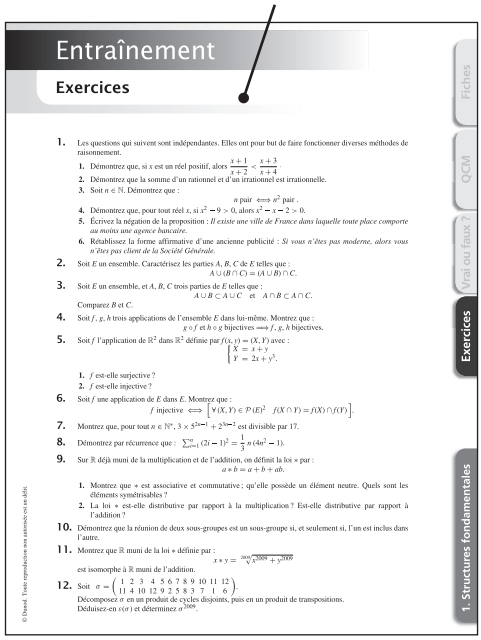

Entraînement

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 - 1$. On a : $g \circ f = f \circ g$.	☐	☐
2. Soit $f :]1; +\infty[\to]0; +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est bijective.	☐	☐
3. *D'après le concours FESIC 2009.* On considère la suite u, définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$. On veut montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$. On tient pour cela le raisonnement par récurrence suivant : « Soit $P(n)$ l'inégalation : $u_n > 1$. **Initialisation :** $n = 0$, $u_0 = 3 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie. **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n > 1$. Donc $4u_n - 2 > 4 \times 1 - 2$, soit $4u_n - 2 > 2$. De même $u_n + 1 > 1 + 1$, donc $u_n + 1 > 2$. On en déduit que : $\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} > \frac{2}{2}$. Par conséquent, on obtient : $u_{n+1} > 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie. **Conclusion :** de ces deux dernières assertions et d'après le théorème de raisonnement par récurrence, on déduit que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. »	☐	☐
4. On considère la suite u, définie par : $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$. On veut montrer que la suite u est croissante. On tient pour cela le raisonnement suivant : « Un raisonnement par récurrence prouve que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. Or la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 8}{6}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. On en déduit que u est croissante. »	☐	☐
5. Soit x un entier relatif et p un entier naturel non nul. Si $x^2 - x$ est divisible par p, alors pour tout entier naturel n non nul, $x^n - x$ est divisible par p.	☐	☐
6. Pour tout entier naturel n tel que $n > 1$, l'entier $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.	☐	☐
7. Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et $4n + 3$ est égal à 7.	☐	☐
8. *D'après le sujet du BAC 2013.* Le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.	☐	☐
9. *D'après le sujet du BAC 2013.* Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $\lvert z - i \rvert = \lvert z + 1 \rvert$ est une droite.	☐	☐
10. *D'après le concours ENAC 2008.* Dans les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? **a.** $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(5\theta) = 16\cos^2(\theta) + 5\cos(\theta)$; **b.** $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$; **c.** $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$; **d.** $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.	☐ ☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐ ☐

Fiches | QCM | Vrai ou faux ? | Exercices | 1. Structures fondamentales

Des exercices pour s'entraîner


Entraînement

Exercices

1. Les questions qui suivent sont indépendantes. Elles ont pour but de faire fonctionner diverses méthodes de raisonnement.
1. Démontrez que, si x est un réel positif, alors $\frac{x+1}{x+2} < \frac{x+3}{x+4}$.
2. Démontrez que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que :
$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair}.$$
4. Démontrez que, pour tout réel x, si $x^2 - 9 > 0$, alors $x^2 - x - 2 > 0$.
5. Écrivez la négation de la proposition : *Il existe une ville de France dans laquelle toute place comporte au moins une agence bancaire.*
6. Rétablissez la forme affirmative d'une ancienne publicité : *Si vous n'êtes pas moderne, alors vous n'êtes pas client de la Société Générale.*

2. Soit E un ensemble. Caractérisez les parties A, B, C de E telles que :
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

3. Soit E un ensemble, et A, B, C trois parties de E telles que :
$$A \cup B \subset A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subset A \cap C.$$
Comparez B et C.

4. Soit f, g, h trois applications de l'ensemble E dans lui-même. Montrez que :
$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives} \Longrightarrow f, g, h \text{ bijectives}.$$

5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (X, Y)$ avec :
$$\begin{cases} X = x + y \\ Y = 2x + y^3. \end{cases}$$
1. f est-elle surjective ?
2. f est-elle injective ?

6. Soit f une application de E dans E. Montrez que :
$$f \text{ injective} \iff \left[\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \right].$$

7. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+2}$ est divisible par 17.

8. Démontrez par récurrence que : $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)^2 = \frac{1}{3} n (4n^2 - 1)$.

9. Sur $\mathbb{R}$ déjà muni de la multiplication et de l'addition, on définit la loi $*$ par :
$$a * b = a + b + ab.$$
1. Montrez que $*$ est associative et commutative ; qu'elle possède un élément neutre. Quels sont les éléments symétrisables ?
2. La loi $*$ est-elle distributive par rapport à la multiplication ? Est-elle distributive par rapport à l'addition ?

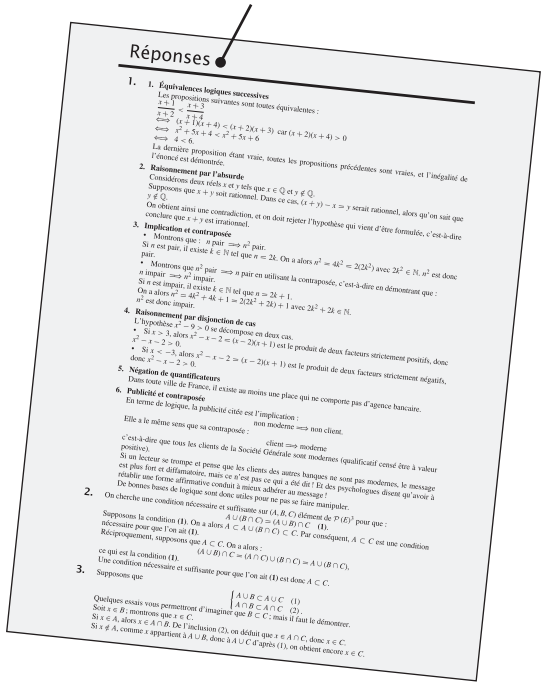
10. Démontrez que la réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe si, et seulement si, l'un est inclus dans l'autre.

11. Montrez que $\mathbb{R}$ muni de la loi $*$ définie par :
$$x * y = \sqrt[2009]{x^{2009} + y^{2009}}$$
est isomorphe à $\mathbb{R}$ muni de l'addition.

12. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 4 & 10 & 12 & 9 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.
Décomposez σ en un produit de cycles disjoints, puis en un produit de transpositions.
Déduisez-en $\varepsilon(\sigma)$ et déterminez σ^{3069}.

Fiches | QCM | Vrai ou faux ? | Exercices | 1. Structures fondamentales

Toutes les réponses commentées


Réponses

1. ***Équivalences logiques successives***
Les propositions suivantes sont toutes équivalentes :
$\frac{x+1}{x+2} < \frac{x+3}{x+4}$
$\iff (x+1)(x+4) < (x+2)(x+3)$ car $(x+2)(x+4) > 0$
$\iff x^2 + 5x + 4 < x^2 + 5x + 6$
$\iff 4 < 6$.
La dernière proposition étant vraie, toutes les propositions précédentes sont vraies, et l'inégalité de l'énoncé est démontrée.

2. **Raisonnement par l'absurde**
Considérons deux réels x et y tels que $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$.
Supposons que $x + y$ soit rationnel. Dans ce cas, $(x + y) - x = y$ serait rationnel, alors qu'on sait que $y \notin \mathbb{Q}$.
On obtient ainsi une contradiction, et on doit rejeter l'hypothèse qui vient d'être formulée, c'est-à-dire conclure que $x + y$ est irrationnel.

3. **Implication et contraposée**
• Montrons que : n pair $\Longrightarrow n^2$ pair.
Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ avec $2k^2 \in \mathbb{N}$, n^2 est donc pair.
• Montrons que n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair en utilisant la contraposée, c'est-à-dire en démontrant que : n impair $\Longrightarrow n^2$ impair.
Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
On a alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ avec $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.
n^2 est donc impair.

4. **Raisonnement par disjonction de cas**
L'hypothèse $x^2 - 9 > 0$ se décompose en deux cas.
• Si $x > 3$, alors $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ est le produit de deux facteurs strictement positifs, donc $x^2 - x - 2 > 0$.
• Si $x < -3$, alors $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ est le produit de deux facteurs strictement négatifs, donc $x^2 - x - 2 > 0$.

5. **Négation de quantificateurs**
Dans toute ville de France, il existe au moins une place qui ne comporte pas d'agence bancaire.

6. **Publicité et contraposée**
En terme de logique, la publicité citée est l'implication :
$$\text{non moderne} \Longrightarrow \text{non client}.$$
Elle a le même sens que sa contraposée :
$$\text{client} \Longrightarrow \text{moderne}$$
c'est-à-dire que tous les clients de la Société Générale sont modernes (qualificatif censé être à valeur positive).
Si un lecteur se trompe et pense que les clients des autres banques ne sont pas modernes, le message est plus fort et diffamatoire, mais ce n'est pas ce qui a été dit ! Et des psychologues disent qu'avoir à rétablir une tournure affirmative conduit à mieux adhérer au message !

2. On cherche une condition nécessaire et suffisante sur (A, B, C) élément de $\mathcal{P}(E)^2$ pour que :
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \textbf{(1)}.$$
Supposons la condition **(1)**. On a alors $A \subset A \cup (B \cap C) \subset C$. Par conséquent, $A \subset C$ est une condition nécessaire pour que l'on ait **(1)**.
Réciproquement, supposons que $A \subset C$. On a alors :
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C),$$
ce qui est la condition **(1)**.
Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait **(1)** est donc $A \subset C$.

3. Supposons que
$$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \quad (1) \\ A \cap B \subset A \cap C \quad (2). \end{cases}$$
Quelques essais vous permettront d'imaginer que $B \subset C$ mais il faut le démontrer.
Soit $x \in B$; montrons que $x \in C$.
Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. De l'inclusion (2), on déduit que $x \in A \cap C$, donc $x \in C$.
Si $x \notin A$, comme x appartient à $A \cup B$, donc à $A \cup C$ d'après (1), on obtient encore $x \in C$.

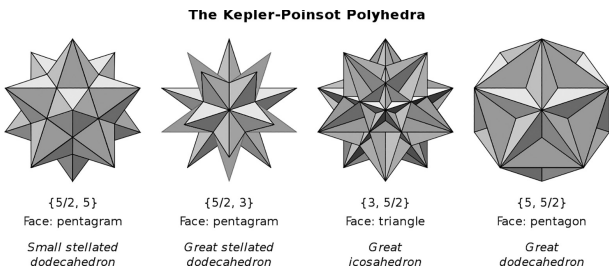
Structures fondamentales

1

Mots-clés

▪ Méthodologie mathématique : connecteurs logiques ▪ Quantificateurs ▪ Quelques méthodes de démonstration : raisonnement par l'absurde, par la contraposée et par récurrence ▪ Base de la théorie des ensembles : élément, partie, complémentaire, intersection, réunion ▪ Lois de De Morgan ▪ Produit cartésien ▪ Application ▪ Injection ▪ Surjection ▪ Bijection ▪ Images directe et réciproque ▪ Ensemble fini ▪ Entiers relatifs ▪ Division euclidienne ▪ PGCD ▪ PPCM ▪ Algorithme d'Euclide ▪ Nombres premiers ▪ Théorème de Bézout ▪ Théorème de Gauss ▪ Congruences dans $\mathbb{Z}$ ▪ Nombres complexes ▪ Formes algébrique et trigonométrique ▪ Exponentielle complexe ▪ Racines n-ièmes d'un nombre complexe ▪ Polynômes à une indéterminée ▪ Racines d'un polynôme ▪ Théorème de d'Alembert-Gauss ▪ Décomposition d'un polynôme ▪ Fractions rationnelles ▪ Décomposition en éléments simples

Ce premier chapitre pose les bases principales pour aborder les chapitres suivantes de cet ouvrage. Il y a un grand intérêt à introduire immédiatement les quantificateurs, les notions de langage ensembliste et les principales méthodes de raisonnement comme le raisonnement par l'absurde, par la contraposée ou le raisonnement par récurrence. En effet, à l'occasion des démonstrations que vous devrez faire, vous aurez besoin de les manipuler et de les maîtriser. Ensuite ce chapitre rappelle les propriétés des nombres complexes déjà rencontrés et définis en classe de terminale. Il est important de les maîtriser et de s'en servir autant que possible. Beaucoup de problèmes de géométrie plane peuvent se résoudre grâce à l'utilisation de ces nombres. De plus, ces nombres sont très utiles dans d'autres sciences comme en électronique par exemple. Enfin ce chapitre se termine par les polynômes et les fractions rationnelles. Ces dernières seront utilisées dans le calcul d'intégrales qui est présenté dans cet ouvrage.



Design et concept originaux : Tom Ruen ; SVG creation : Júlio Reis - CC BY-SA 3.0

Logique et raisonnement

Logique binaire

Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).
Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

Connecteurs logiques

À partir de propositions $p, q, \ldots$ on peut former de nouvelles propositions définies par des tableaux de vérité.

- Négation : non p (noté aussi $\neg p$)

p	non p
V	F
F	V

- Conjonction : p et q (noté aussi $p \wedge q$)
- Disjonction : p ou q (noté aussi $p \vee q$)
- Implication : $p \Longrightarrow q$
- Équivalence : $p \Longleftrightarrow q$

p	q	p et q	p ou q	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Le « ou » a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans « fromage ou dessert », c'est-à-dire du fromage ou bien du dessert mais pas les deux.

Propriétés des connecteurs

non (non p) $= p$
non (p ou q) $=$ (non p) et (non q)
non (p et q) $=$ (non p) ou (non q)
$(p \Longrightarrow q) = \big[$(non p) ou $q\big]$
non $(p \Longrightarrow q) = \big[p$ et (non $q)\big]$

La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

$$(p \Longrightarrow q) = \big[(\text{ non } q) \Longrightarrow (\text{ non } p)\big]$$

Cette seconde implication est la contraposée de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.

$$(p \Longleftrightarrow q) = \big[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (q \Longrightarrow p)\big]$$

Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.

Quantificateurs

Notation

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

- le quantificateur universel $\forall$

$$\forall x \quad \text{signifie : pour tout } x\,;$$

- le quantificateur existentiel $\exists$

$$\exists\, x \quad \text{signifie : il existe au moins un } x.$$

Ordre

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x, y)$$
$$\exists\, x \in E \quad \exists\, y \in E \quad p(x, y).$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture $\forall x \in E \quad \exists\, y \in E \quad p(x, y)$ y dépend de x.

Dans l'écriture $\exists\, y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$ y est indépendant de x.

Négation

La négation de « $\forall x \in E$ x vérifie p » est « $\exists\, x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ».

La négation de « $\exists\, x \in E$ x vérifie p » est « $\forall x \in E$ x ne vérifie pas p ».

Quelques méthodes de démonstration

Déduction

Si p est vraie et si l'on démontre $(p \Longrightarrow q)$, alors on peut conclure que q est vraie.

Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que p est fausse et en déduire une contradiction.

Comme vous partez de « non p », ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.

Disjonction des cas

Elle est basée sur le fait que :

$$\big[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (\text{ non } p \Longrightarrow q)\big] \Longrightarrow q.$$

Exemples et contre-exemples

Beaucoup de propositions mathématiques sont de type universel. Dans ce cas :
– un exemple est une illustration, mais ne démontre rien ;
– un contre-exemple démontre que la proposition est fausse.

Raisonnement par récurrence

Voir Fiche 4.

Fiche 2

Langage des ensembles

Ensemble

Notion d'ensemble

La notion d'**ensemble** est considérée comme primitive. Retenons que la caractérisation d'un ensemble E doit être nette, c'est-à-dire que, pour tout **élément** x, on doit pouvoir affirmer : ou bien qu'il est dans E ($x \in E$), ou bien qu'il n'y est pas ($x \notin E$).
On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.
E et F étant des ensembles, on dit que E est inclus dans F si, et seulement si, tous les éléments de E appartiennent aussi à F. On note $E \subset F$.
On dit aussi que E est une **partie** de F, ou que F contient E.
L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$. Dire que $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $A \subset E$.

Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de l'ensemble E, on définit :
→ le **complémentaire** de A dans E : $\overline{A} = \{x \in E \quad \text{et} \quad x \notin A\}$;
→ l'**intersection de deux parties** A et B : $A \cap B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}$;
Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B, on dit que les parties A et B sont disjointes ;
→ la **réunion de deux parties** A et B : $A \cup B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
Ce « ou » a un sens inclusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B.
→ la **différence** : $A \setminus B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$;
→ la **différence symétrique** : $A \Delta B = \{x \in E \ ; x \in (A \text{ ou } B)\}$ et $\{x \in E \ ; x \notin (A \text{ et } B)\}$.
Par conséquent on a l'égalité suivante :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

$A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties A et B.

Recouvrement, partition

→ Un **recouvrement** d'une partie A de E est une famille de parties de E dont la réunion contient A.

➙ Une **partition** d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, deux à deux disjointes, et dont la réunion est E. Ce qui peut s'écrire mathématiquement de la façon suivante : une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E est une partition de E si :

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = E \\ \forall (i,j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset). \end{cases}$$

Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties A, B et C de E, on a les propriétés qui suivent.

Complémentaire

$$\overline{E} = \emptyset; \quad \overline{\emptyset} = E; \quad \overline{\overline{A}} = A; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \overline{B} \subset \overline{A}\,.$$

Lois de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Réunion

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,;$$
$$A \cup A = A; \quad A \cup \emptyset = A; \quad A \cup E = E.$$

Intersection

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\,;$$
$$A \cap A = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap E = A.$$

Réunion et intersection

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

> Attention, le couple (b, a) est différent du couple (a, b), sauf si $a = b$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n.

Applications

Généralités

Définitions

Une **application** f est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F, et une relation qui permet d'associer à tout $x \in E$ un élément unique y dans F. On note ce dernier $f(x)$.
Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.
L'**application identité** de E est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$. On la note Id_E.

Restriction, prolongement

Soit f une application de A dans F, et g une application de B dans F.
Si $A \subset B$ et si, pour tout x de A, on a $f(x) = g(x)$, on dit que f est une **restriction** de g, ou que g est un **prolongement** de f.

Composition des applications

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G.
La **composée** de f et de g, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G définie par :

$$x \mapsto g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x).$$

Injection, surjection, bijection

Application injective

Une application f de E dans F est dite **injective** (ou est une **injection**) si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

> Ne confondez pas avec la définition d'une application qui s'écrit :
> $$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$$
> $$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) \neq f(x') \Longrightarrow x \neq x'.$$

Application surjective

Une **application** f de E dans F est dite **surjective** (ou est une **surjection**) si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément x de E, soit :

$$\forall y \in F \quad \exists : x \in E \quad y = f(x).$$

Application bijective

Une application f de E dans F est dite **bijective** (ou est une **bijection**) si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, tout élément y de F est l'image d'un, et un seul, élément x de E.
À tout y de F, on associe ainsi un unique x dans E, appelé **antécédent** et noté $f^{-1}(y)$.
f^{-1} est la **bijection réciproque** de f. On a donc :

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Ce qui entraîne $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

Théorème

Soit f une application de E dans F, et g une application de F dans G. On a les implications qui suivent.
Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Image directe et image réciproque

Définitions

Soit f une application de E dans F.
Si $A \subset E$, on appelle **image directe de** A **par** f, la partie de F constituée par les images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

Si $B \subset F$, on appelle **image réciproque de** B, la partie de E constituée par les x dont l'image par f est dans B :

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E\ ;\ f(x) \in B\}.$$

Théorème

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)\ ;\ B_1 \subset B_2 \Longrightarrow \overset{-1}{f}(B_1) \subset \overset{-1}{f}(B_2)\ ;$$
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)\ ;\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)\ ;$$
$$\overset{-1}{f}(B_1 \cup B_2) = \overset{-1}{f}(B_1) \cup \overset{-1}{f}(B_2)\ ;\quad \overset{-1}{f}(B_1 \cap B_2) = \overset{-1}{f}(B_1) \cap \overset{-1}{f}(B_2).$$