

Mécanique générale

Cours et exercices corrigés

Sylvie Pommier

Professeure à l'École normale supérieure de Cachan

Yves Berthaud

Professeur à l'Université Pierre-et-Marie-Curie

DUNOD

Illustration de couverture : © PixHom, Shutterstock.com

© Dunod, 2010, 2022 pour la nouvelle présentation

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

EAN : 9782100848461

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
--------------	---

PREMIÈRE PARTIE

CINÉMATIQUE – CINÉTIQUE

CHAPITRE 1 • CINÉMATIQUE	7
1.1 Référentiels d'espace et de temps	7
1.2 Cinématique du point	11
CHAPITRE 2 • LE SOLIDE INDÉFORMABLE	12
2.1 Définition	12
2.2 Paramétrage de la position relative de deux solides	12
2.3 Cinématique du solide	19
Exercices	32
Solutions des exercices	41
CHAPITRE 3 • CINÉTIQUE	50
3.1 Torseur cinétique	50
3.2 Calcul des centres de masse	58
3.3 Calcul des moments d'inertie et de l'opérateur d'inertie	58
3.4 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point	63
3.5 Théorème d'Huyghens	64
3.6 Théorème d'Huyghens Steiner	65
3.7 Axes principaux d'inertie	66
3.8 Énergie cinétique d'un solide	68
3.9 Torseur dynamique	69
Exercices	71
Solutions des exercices	75

Table des matières

DEUXIÈME PARTIE

ACTION – LIAISONS – STATIQUE

CHAPITRE 4 • ACTIONS, LIAISONS	83
4.1 Action mécanique	83
4.2 Liaisons	93
4.3 Schématisation des systèmes mécaniques	108
Exercices	112
Solutions des exercices	112
CHAPITRE 5 • STATIQUE DES SOLIDES	114
5.1 Principe fondamental de la statique	114
5.2 Analyse des mécanismes	118
Exercices	127
Solutions des exercices	136

TROISIÈME PARTIE

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE : PREMIER PRINCIPE

CHAPITRE 6 • INTRODUCTION	155
6.1 Énergétique	155
6.2 Conservation de l'énergie	160

QUATRIÈME PARTIE

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE, PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

CHAPITRE 7 • PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE	167
7.1 Introduction : un peu d'histoire	167
7.2 Énoncé du principe fondamental de la dynamique	168
CHAPITRE 8 • PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES	174
8.1 Introduction : un peu d'histoire	174
8.2 Énoncé du principe des puissances virtuelles	174

8.3 Choix de torseurs virtuels particuliers et théorèmes de la dynamique	175
Exercices	196
Solutions des exercices	200

CINQUIÈME PARTIE

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

CHAPITRE 9 • LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT	216
9.1 Linéarisation des équations de Lagrange	216
9.2 Vibrations autour d'une position d'équilibre stable	230
CHAPITRE 10 • CHOCs ET PERCUSSIONS	232
10.1 Introduction	232
10.2 Cas d'un point matériel	232
10.3 Cas d'un solide ou d'un système de solides	233

SIXIÈME PARTIE

QUELQUES RAPPELS MATHÉMATIQUES SUR LES TORSEURS ET LES TENSEURS

CHAPITRE 11 • CALCUL VECTORIEL	246
11.1 Opérations sur les vecteurs	246
11.2 Champs de vecteurs	249
CHAPITRE 12 • DÉRIVATION VECTORIELLE	253
12.1 Dérivée d'un vecteur	253
12.2 Changement de base de dérivation	254
12.3 Champ équiprojectif de vecteurs	256
12.4 Torseurs	257
12.5 Opérations sur les torseurs	259
12.6 Champ de vecteurs antisymétriques	260
12.7 Vecteurs liés, libres	261
12.8 Champ de moment	262

Table des matières

12.9 Axe d'un torseur	264
CHAPITRE 13 • ÉLÉMENTS SUR LES TENSEURS	265
BIBLIOGRAPHIE	268
INDEX	269

INTRODUCTION

Dans le langage courant, la mécanique est d'abord le domaine des machines (moteurs, véhicules, engrenages, poulies, arbres de transmission, piston...), bref, de tout ce qui produit ou transmet un mouvement ou bien s'oppose à ce mouvement. Pour les scientifiques, la mécanique est la discipline qui étudie les mouvements des systèmes matériels et les forces qui provoquent ou modifient ces mouvements. Les systèmes matériels étant très variés, de nombreuses branches de cette discipline co-existent. La mécanique générale (ou mécanique des systèmes de solides indéformables) qui est l'objet de cet ouvrage en est un exemple. Mais on peut également citer la mécanique des milieux continus (qui s'applique, comme son nom l'indique, aux milieux continus et continûment déformables), la mécanique statistique (qui s'applique aux milieux discrets, constitués d'un nombre considérable de composants), l'acoustique (qui s'applique aux gaz) ou la mécanique des fluides (qui s'applique aux liquides), la mécanique de la rupture (qui s'applique aux milieux fissurés), la mécanique des structures (plaques, poutres, coques)... La liste est longue même en se limitant à la mécanique non-relativiste.

Dans le cadre non-relativiste, déterminer les mouvements du système et les actions qui provoquent ces mouvements ou s'y opposent, consiste à établir un système d'équations en appliquant quatre principes fondamentaux :

- la conservation de la masse ;
- le principe fondamental de la dynamique (ou le principe des puissances virtuelles ou encore la conservation de la quantité de mouvement) ;
- la conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) ;
- le second principe de la thermodynamique.

Ces « bons » principes s'appliquent, quelle que soit la branche de la mécanique considérée, mais avec un formalisme très différent selon les familles de mouvements étudiés. L'étape clef de la résolution d'un problème de mécanique est donc la modélisation du mouvement appelée aussi *la cinématique*.

Le choix d'une cinématique plutôt qu'une autre change radicalement la forme des objets manipulés pour représenter le mouvement ou les actions susceptibles de modifier le mouvement. Ainsi, en mécanique des milieux continus, le milieu étant continu, un seul espace est défini : celui qui contient le milieu. Dans cet espace, le mouvement est représenté par un champ de déformation et les actions mécaniques par un champ de contrainte.

Introduction

Au contraire, en mécanique générale, le milieu est constitué de solides indéformables, il est donc *discontinu* par nature. Pour modéliser cette discontinuité, on travaillera dans une collection d'espaces (un espace par solide) en translation et en rotation les uns par rapport aux autres. Les mouvements se représentent alors par des objets appelés *torseurs cinématiques*, qui seront construits dans le premier chapitre. On leur associe des actions mécaniques appelées *torseurs des actions mécaniques*.

Le principe de conservation de la masse permet ensuite, via l'introduction d'une représentation condensée de la distribution de la masse dans un solide (masse, centre d'inertie, tenseur d'inertie d'un solide), d'exprimer les principes fondamentaux à l'échelle du solide, plutôt qu'à l'échelle d'un élément de volume de ce solide. Cette partie sera détaillée dans le chapitre cinétique.

Le mouvement et les principes fondamentaux s'écrivant alors à la même échelle (l'échelle du solide), les équations du mouvement peuvent être établies en s'appuyant sur le principe fondamental de la dynamique (ou la conservation de la quantité de mouvement ou encore le principe des puissances virtuelles). Cette approche conduit généralement à un système d'équations pour lequel le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues. Les équations complémentaires sont données par les lois de comportement, qui doivent vérifier le premier et le second principe de la thermodynamique. Ces lois de comportement seront très simples dans le cadre de la mécanique générale, par exemple :

- comportement rigide indéformable pour les solides ;
- lois de contact entre solides (lois de Coulomb) ;
- comportement de liaisons entre solides (liaison parfaites, élastiques ou visqueuses) ;
- lois d'action à distance (attraction gravitationnelle, par exemple).

Une fois que le système d'équations est établi, en utilisant par exemple la méthode de Lagrange, il peut être résolu pour déterminer les mouvements du système de solides indéformables étudié. Deux grands cadres peuvent être utilisés pour cette résolution. Le cadre des petits mouvements continus des solides, où les équations sont linéarisées en supposant que si la variation de position tend vers zéro, alors la variation de vitesse ou d'accélération en fait de même. Le cadre des chocs où cette hypothèse n'est pas valable, de très petites variations de position induisant de grandes variations de vitesses (lorsqu'une balle élastique entre en collision avec un mur, sa vitesse change brutalement de sens en conservant son module, alors que la balle n'a quasiment pas changé de position).

Pour terminer cette introduction, il est important de se convaincre que si les objets manipulés sont différents d'une branche à l'autre de la mécanique, les principes fondamentaux appliqués restent les mêmes. Il est donc possible de traiter un même problème avec deux approches différentes et d'obtenir des résultats identiques. Prenons par exemple un tas de sable sec, à l'échelle humaine il pourra être vu comme

un matériau déformable (le sable). À l'échelle des grains de sable, c'est un système de solides indéformables. Il pourra donc être modélisé dans deux cadres différents, la mécanique des milieux continus à l'échelle humaine, la mécanique générale à l'échelle des grains de sable, mais le résultat final doit être le même, puisqu'il s'agit bien du même tas de sable. Et nous ne parlons pas d'approches de type gaz qui peuvent s'appliquer aussi !

À l'inverse, la tour Eiffel est constituée de poutres et poutrelles déformables. Son mouvement peut être modélisé à l'échelle des poutres dans le cadre de la mécanique des poutres. Mais à l'échelle de la structure, le mouvement peut être simplifié et chaque poutre modélisée comme un assemblage de tiges rigides liées entre elles par des liaisons élastiques représentant la rigidité en flexion, torsion et traction-compression de la poutre. Encore une fois, il s'agit de la même tour Eiffel, et les résultats obtenus par ces différentes approches doivent être les mêmes.

Pour clore cette introduction nous signalons que cet ouvrage a pour objectif de réactualiser celui rédigé par J.-C. Bône, J. Morel et M. Boucher, réactualisation au sens de la mise en forme plus que des concepts, ceux-ci datant de quelques siècles. Nous avons repris bon nombre d'exercices et de figures issues d'un ouvrage récemment édité chez Dunod par l'un des auteurs avec de nombreux co-auteurs. Que ces derniers soient ici remerciés pour ces emprunts.

Partie I

Cinématique – Cinétique

1.1 RÉFÉRENTIELS D'ESPACE ET DE TEMPS

Nous allons donner quelques éléments utiles pour la compréhension générale mais nous conseillons au lecteur de se reporter à l'excellent ouvrage de P. Rougée [2] qui définit de façon très précise et commentée toutes les notions mathématiques importantes. Les quelques lignes qui suivent s'en inspirent en partie.

La notion de temps ou de durée en mécanique classique est un concept autonome. On parlera d'instants t dans un ensemble $\mathcal{T}$ muni d'une chronologie. La différence entre deux instants est appelée durée. Les horloges – supposées galiléennes, terme qui sera précisé dans le chapitre dynamique – sont classiquement fondées sur des mouvements répétitifs : la rotation de la Terre a été le premier d'entre eux.

L'espace dans lequel nous allons travailler est celui qui nous entoure, modélisé par un espace affine réel euclidien de dimension trois. Il sera noté $\mathcal{E}$. Dans cet espace se trouvent des points qui peuvent constituer des droites ou des plans. Repérer des déplacements dans $\mathcal{E}$ conduit à la notion de vecteur qui appartient à un espace vectoriel noté E de dimension trois lui aussi. Le point A qui se sera déplacé pour se trouver en un point B de $\mathcal{E}$ conduit donc au vecteur déplacement noté $\mathbf{U} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque

Dans cet ouvrage les vecteurs sont notés en gras (notation anglo-saxonne), par exemple $\mathbf{x}$, afin d'alléger l'écriture sachant que l'on trouve aussi comme notation $\underline{x}$ ou $\overrightarrow{x}$ dans d'autres ouvrages. Il n'y aura aucune confusion possible car nous ne manipulerons dans cet ouvrage que des scalaires x , des vecteurs $\mathbf{x}$ ou des tenseurs constitués de vecteurs. Les tenseurs d'ordre deux seront évoqués à propos de tenseur d'inertie ou du vecteur rotation derrière lequel se cache un tenseur anti-symétrique. Nous donnons quelques informations opérationnelles sur les outils indispensables que sont les produits scalaire, vectoriel et mixte. Le lecteur est invité à se reporter à des ouvrages plus spécialisés pour plus de renseignements. Nous travaillerons dans tout ce cours avec des bases orthonormées directes. Il est donc important de savoir les construire rapidement. Nous utiliserons la méthode suivante (figure 1.1) : un premier vecteur unitaire $\mathbf{u}$ est tracé. Le deuxième $\mathbf{v}$ doit être directement perpendiculaire (avec un angle droit dans le sens trigonométrique). Le troisième en est déduit (par produit vectoriel) en utilisant la règle simple qui consiste à positionner le pouce (de la main droite) sur $\mathbf{u}$, l'index sur $\mathbf{v}$; le majeur replié pointe alors dans la troisième direction et permet de tracer $\mathbf{w}$.