PRÉPAS SCIENCES

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

Physique PSI/PSI*

4e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES

ouvrage coordonné par

Lionel VIDAL

Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

Christophe BERNICOT

Professeur au lycée Dupuy de Lôme (Lorient)

Régis BOURDIN

Professeur au lycée Sainte-Marie (Caen)

Ludovic MENGUY

Professeur au lycée Montesquieu (Le Mans)

Vincent PARMENTIER

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Alban SAURET

Professeur à l'université de Californie (Santa Barbara, États-Unis)

Nicolas TANCREZ

Professeur au lycée Saint-Louis (Paris)

Marc VENTURI

Professeur au lycée Kléber (Strasbourg)

Avec la contribution de

François-Xavier COQ

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Vincent FRATICELLI

Professeur au lycée Pothier (Orléans)

Jean-Lou REYNIER

Professeur au lycée Vaucanson (Grenoble)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr



Les notices culturelles « un scientifique » et « un peu d'histoire »
des pages de titre des chapitres ont été rédigées par Bertrand Hauchecorne.

Un grand merci à Frédéric Barbosa pour sa relecture attentive.

ISBN 9782340-066830
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Réussir en classes préparatoires nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique-chimie comme en mathématiques ou sciences industrielles.

Le résumé de cours est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

La partie « méthodes » vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

La partie « vrai/faux » permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

Les exercices sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie, de maths et de SII vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

1. Stabilité des systèmes linéaires 1
2. Rétroaction : exemple de l'ALI 35
3. Oscillateurs électroniques 69
4. Traitement du signal : de l'analogique au numérique 101
5. Modulation-démodulation 141
6. Statique des fluides 169
7. Description d'un fluide en écoulement 189
8. Fluides visqueux et nombre de Reynolds 233
9. Diffusion thermique 271
10. Diffusion de particules 323
11. Bilans pour les fluides en écoulement 345
12. Champ électrostatique 397
13. Potentiel électrostatique 425
14. Magnétostatique 461
15. Équations de Maxwell 491
16. Équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS 519
17. Milieux ferromagnétiques 547
18. Puissance électrique en régime sinusoïdal forcé 577
19. Conversion statique de puissance 597
20. Contacteurs électromagnétiques en translation 619
21. Machine synchrone 641
22. Machine à courant continu 675
23. Conversion électronique statique 707
24. Propagation unidimensionnelle non dispersive 747

25. Ondes sonores dans les fluides 791
26. Ondes électromagnétiques dans le vide 829
27. Propagation unidimensionnelle dispersive 863
28. Propagation dans un conducteur et un plasma 885
29. Réflexion d'OPPM à la surface d'un conducteur 917

Annexes 949
1. Formulaire d'analyse vectorielle 950
2. Éléments d'analyse spectrale 954
3. Le minimum de savoir-faire en mathématique 960
4. Constantes fondamentales et ordres de grandeur classiques 966
5. Calculs d'incertitude 967

Index 973

Chapitre 1
Stabilité des systèmes linéaires

UN SCIENTIFIQUE



Pierre-Simon Laplace (1749-1827) est considéré comme un des plus grands mathématiciens et physiciens de la fin XVIII^{e} et du début XIX^{e} siècle. Cependant, sa véritable passion fut l'astronomie. Ses travaux sur la gravitation universelle l'ont amené à étudier de nombreuses méthodes de calculs, en particulier dans le domaine des équations différentielles. Son nom reste attaché à la théorie du déterminisme suivant laquelle l'avenir du Monde est entièrement déterminé par son état actuel.

Un peu d'histoire

Les équations différentielles jouent un rôle essentiel dans l'étude de la stabilité des systèmes linéaires. Cette notion est apparue à la fin du XVII^{e} siècle lorsque Newton et Leibniz ont introduit le calcul différentiel. Ceci a permis la résolution de problèmes dans tous les domaines de la physique.

De grands scientifiques, comme Euler et d'Alembert, ont contribué, tout au long du XVIII^{e} siècle, à résoudre des équations différentielles issues de modélisations d'une réalité physique. Deux savants français, passionné de mécanique céleste, Laplace et Lagrange, ont étudié l'un la stabilité du système solaire et l'autre l'existence de points de stabilité gravitationnelle sur les orbites des planètes. Ces techniques ont été utiles pour déterminer les orbites des satellites mais ont aussi trouvé un autre domaine d'application, l'étude de la stabilité de systèmes électriques.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Les critères caractérisant le fonctionnement linéaire d'un système
- La représentation spectrale d'un signal périodique et sa signification
- La signification de la fonction de transfert
- Les critères de stabilité d'un système linéaire

Ce qu'il faut savoir faire

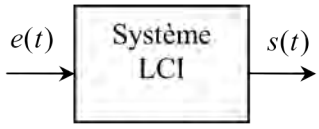
- Déterminer une fonction de transfert
- Identifier la nature d'un filtre à partir du schéma ou de la fonction de transfert
- Prévoir le signal de sortie ainsi que sa composition spectrale à partir de la fonction de transfert
- Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel ou temporel
- Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

■■ Résumé de cours

■ Le système linéaire continu invariant

❑ Définitions

Soit un **système** (circuit électrique, machine, …) donnant à une entrée $e(t)$ une réponse $s(t)$ en sortie.



De manière générale, e et s peuvent être des grandeurs électriques, mécaniques, thermodynamiques… Par exemple $e(t)$ peut être le courant d'alimentation d'un moteur, et $s(t)$ la vitesse de rotation de ce moteur.

L'étude est ici limitée aux **systèmes linéaires, continus, invariants** :

→ **Linéaire** : si une entrée $e_1(t)$ donne une réponse en sortie $s_1(t)$ et une entrée $e_2(t)$ donne une réponse en sortie $s_2(t)$, alors une entrée $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$ avec k_1 et k_2 constantes donnera une sortie $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$;

→ **Continu** : les grandeurs étudiées sont définies pour tout temps ;

→ **Invariant** : son comportement dans le temps reste inchangé ; si l'on reproduit une même entrée à deux instants différents, les réponses seront identiques (décalées de ce même temps).

❑ Propriété

Soit un signal d'entrée sinusoïdal permanent $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Une propriété remarquable des systèmes linéaires (en régime permanent) est de donner nécessairement en sortie un signal également **sinusoïdal** et de **même pulsation** ω qui s'écrit donc $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi')$. On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires.

Prévoir la réponse en sortie d'un système LCI se résume donc à rechercher (s_0 / e_0) rapport des amplitudes, et $(\varphi' - \varphi)$ le déphasage.

■ La fonction de transfert

❑ Fonction de transfert

Introduisons les notations complexes associées respectivement à $e(t)$ et $s(t)$:

$\underline{e} = e_0 \exp\left(j(\omega t + \varphi)\right) = \underline{E} \exp(j\omega t)$ avec $\underline{E} = e_0 \exp(j\varphi)$ et

$\underline{s} = s_0 \exp\left(j(\omega t + \varphi')\right) = \underline{S} \exp(j\omega t)$ avec $\underline{S} = s_0 \exp(j\varphi')$.

La fonction de transfert est par définition : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \dfrac{s_0}{e_0} e^{j(\varphi' - \varphi)}}$

⇨ **Méthode 1.1. Calcul de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel**

Compte tenu de la propriété d'isomorphisme précédemment citée, pour déterminer, en régime permanent, le signal de sortie $s(t)$ réponse d'un signal $e(t)$ sinusoïdal, il suffit de connaître $\underline{H}$ à ω :

$\rightarrow$ le module de $\underline{H}$, appelé **gain**, donne (s_0 / e_0) rapport des amplitudes ;

$\rightarrow$ l'argument de $\underline{H}$ donne $(\varphi' - \varphi)$, appelé **avance de phase** (ou déphasage) du signal de sortie sur le signal d'entrée.

Dans le domaine temporel, un signal d'entrée $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi)$ donne donc une réponse $\boxed{s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi') = \left|\underline{H}(j\omega)\right| e_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)\right)}$.

⇨ **Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi**

❑ Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$\rightarrow$ Dans le cas d'un circuit électronique associant par exemple des composants R, L ou C, les relations liants tensions et courants peuvent s'écrire dans le domaine temporel sous forme d'équations différentielles linéaires : $u = Ri$, $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. En les combinant judicieusement à l'aide de la loi des mailles et de la loi des nœuds, il est toujours possible d'obtenir une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant $s(t)$ à $e(t)$ de la forme :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + b_n \frac{\mathrm{d}^n s(t)}{\mathrm{d}t^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + a_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}.$$

L'ordre du filtre est n avec $n \geq m$. Nous nous limiterons à l'ordre 2 pour la suite.

⇨ **Méthode 1.2. Détermination directe de l'équation différentielle dans le domaine temporel**

$\rightarrow$ Utilisons maintenant les notations complexes (domaine fréquentiel). Remarquant que la dérivée temporelle de $\exp(j\omega t)$ est $j\omega \cdot \exp(j\omega t)$, l'équation différentielle se simplifie :

$b_0 \underline{s} + b_1 j\omega \underline{s} + b_2 (j\omega)^2 \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + a_2 (j\omega)^2 \underline{e}$ soit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}}.$$

La fonction de transfert se présente donc sous la forme d'une fraction rationnelle de $j\omega$.

❑ Notation de Laplace et transposition entre domaine temporel et domaine fréquentiel

On utilise la notation symbolique de Laplace $H(p)$, p valant $j\omega$ dans le domaine fréquentiel, mais p étant aussi l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ dans le domaine temporel. Il est ainsi possible de passer facilement de la fonction de transfert à l'équation différentielle et réciproquement :

$$\boxed{H(p)=\frac{a_0+a_1 p+a_2 p^2}{b_0+b_1 p+b_2 p^2}} \Leftrightarrow \boxed{\left[b_0+b_1 p+b_2 p^2\right]\mathrm{s}(t)=\left[a_0+a_1 p+a_2 p^2\right]e(t)} \text{ avec } \boxed{p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$$

⇨ **Méthode 1.3. Détermination de l'équation différentielle dans le domaine temporel à partir de la fonction de transfert**

■ La stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

❑ Étude à partir de l'équation différentielle

Pour une entrée $e(t)$ donnée, la solution $s(t)$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $b_0 s(t)+b_1\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+b_2\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}=a_0 e(t)+a_1\frac{\mathrm{de}(t)}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2}$ est la somme de :

→ une solution particulière $s_P(t)$ de l'équation complète ;

→ la solution générale $s_H(t)$ de l'équation homogène $b_0 s(t)+b_1\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+b_2\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}=0$.

Un système est stable lorsque : $\boxed{s_H(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0}$.

La réponse s(t) d'un système stable présente alors 2 phases :

→ au début, le régime transitoire est décrit par $s(t)=s_P(t)+s_H(t)$;

→ au bout d'un certain temps $s_H(t)\simeq 0$: le régime permanent (ou établi) est atteint, et $s(t)=s_P(t)$. Le régime établi d'un système stable est décrit par la solution particulière.

Remarque

Pour un signal permanent en entrée $e(t)$ d'un système stable, on se contente de rechercher le signal **permanent** $s_P(t)$. La notion de filtre n'a de sens que pour les systèmes stables. Dans ce cas, il n'est pas utile d'expliciter le régime transitoire.

Par contre, dans le cas où $s_H(t)$ ne tend pas vers 0, **le régime permanent $s_P(t)$ n'est jamais atteint : le système est instable**.

C'est donc l'étude du régime transitoire qui permet de déterminer la stabilité d'un système.

→ Stabilité d'un système d'ordre 1

L'équation homogène s'écrit $b_0\,\mathrm{s}(t)+b_1 p\,\mathrm{s}(t)=0$ avec $\mathrm{p}=[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$, dont la solution est $s_H(t)=\mathrm{A}\exp(-b_0/b_1)$, qui tend vers 0 si et seulement si b_0 et b_1 sont de même signe.

→ Stabilité d'un système d'ordre 2

L'équation homogène s'écrit $\left[b_0+b_1 p+b_2 p^2\right]\mathrm{s}(t)=0$. On remarque que l'écriture avec les notations de Laplace donne directement l'équation caractéristique $b_0+b_1 p+b_2 p^2=0$. Il existe 3 types de solutions selon le signe du Δ_{EC} (régime apériodique, critique ou pseudo-périodique). Dans tous les cas, les termes en exponentiel doivent tendre vers 0 pour avoir stabilité. Mathématiquement, cela se traduit par la partie réelle des 2 solutions de l'équation

caractéristique qui doivent être négatives. On peut vérifier que c'est le cas si et seulement si b_0, b_1 et b_2 sont de même signe.

En conclusion, un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.

⇨ Méthode 1.9. Étude de la stabilité dans le domaine temporel

❑ Étude à partir de la fonction de transfert

En revenant à la notation de Laplace $H(p) = \dfrac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$, on remarque que les coefficients de l'équation homogène apparaissent directement au dénominateur.

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients b_i du polynôme au dénominateur de $\underline{H}$ sont de même signe.

Remarque

Dans le cas d'un circuit ne contenant que des éléments passifs, le système est nécessairement stable. La seule exception envisageable est le cas d'un circuit sans aucune résistance (LC par exemple), qui est purement théorique. Hormis cette exception, il faut utiliser au moins un composant actif tel un ALI (voir chapitre suivant) pour apporter de l'énergie et déstabiliser le système.

Nous nous placerons dans le cas d'un système stable pour la suite du résumé de cours, et nous limiterons donc l'étude au régime permanent (ou établi).

⇨ Méthode 1.8. Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de transfert

■ Le signal périodique non sinusoïdal

❑ La décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

J. Fourier a déterminé que tout signal périodique de période T_0 peut se décomposer en une somme infinie de sinus et de cosinus, appelée série de Fourier :

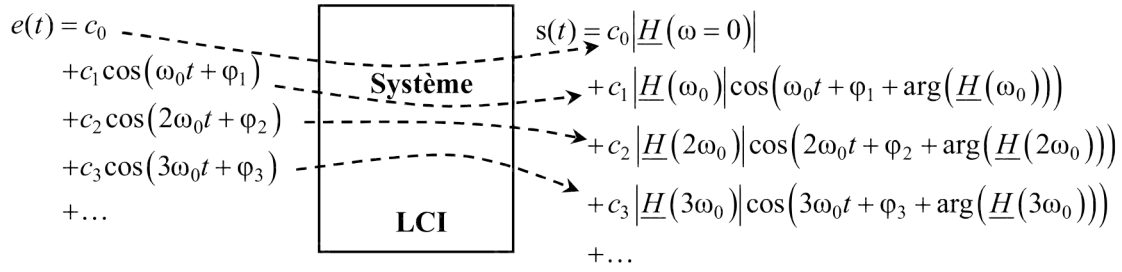
$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\,\omega_0 t + \varphi_n\right) \text{ avec } \omega_0 = 2\pi / T_0 ,$$

qui peut aussi s'écrire $e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\omega_0 t\right) + b_n \sin\left(n\omega_0 t\right)\right)$.

c_0 est la **composante continue** (valeur moyenne du signal), ω_0 est la pulsation la plus basse que l'on appelle **fondamentale**. Les termes de pulsation $\omega_n = n\,\omega_0$ sont les **harmoniques de rang** n.

❑ Détermination du signal de sortie et notion de filtrage

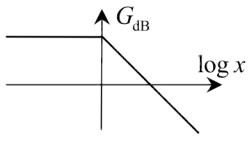
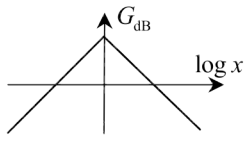
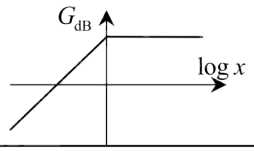
Tout signal périodique $e(t)$ peut s'écrire sous forme de série de Fourier, et l'on sait déterminer la réponse en sortie pour chaque signal sinusoïdal placé en entrée. La série de Fourier du signal de sortie $s(t)$ est donc simplement la somme des réponses correspondant à chaque terme de la série de $e(t)$.



⇨ **Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi**

❑ Modèles simples de filtres passifs

On se reportera à l'étude faite en première année. Seuls les principaux types de filtres d'ordre 1 et 2 sont rappelés ici. Notons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, et Q le facteur de qualité.

	Filtre passe-bas	Filtre passe-bande	Filtre passe-haut
Gabarit			
Filtre d'ordre 1	$H_0 \dfrac{1}{1 + j\,x}$	N'existe pas	$H_0 \dfrac{jx}{1 + j\,x}$
Filtre d'ordre 2	$H_0 \dfrac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$	$H_0 \dfrac{j\dfrac{x}{Q}}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$	$H_0 \dfrac{-x^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$

Dans le diagramme de Bode, les pentes des filtres d'ordre 1 ne peuvent pas dépasser ± 20 dB par décade, et les filtres d'ordre 2 ± 40 dB par décade.

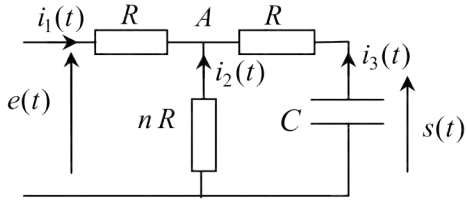
■ Comment déterminer la relation entrée/sortie d'un filtre linéaire ?

❑ Méthode 1.1. Calcul de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel

→ Il faut se placer dans le domaine fréquentiel et donc utiliser les impédances complexes.
On applique le pont diviseur de tension quand c'est possible pour obtenir des relations entre les tensions. Quand ce n'est pas possible (au moins 3 branches à un nœud), on applique la loi des nœuds exprimée en terme de potentiel (toutes les intensités sont remplacées par $\underline{u}/\underline{Z}$). Cela donne un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Il ne faut en aucun cas faire intervenir des courants dans les équations car cela ajoute des inconnues inutiles !
Ensuite, par substitution, éliminer les inconnues pour ne garder que $\underline{e}$ (entrée) et $\underline{s}$ (sortie). $\underline{s}/\underline{e}$ donne la fonction de transfert.
→ Dans le cas où l'équation différentielle entre $s(t)$ et $e(t)$ a déjà été préalablement déterminée, il suffit de la transposer dans le domaine fréquentiel en remplaçant l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ par p, puis en déduire s/e.

⇨ Exercices 1.2 et 1.4

Calculons la fonction de transfert du circuit (1) dans le domaine fréquentiel.
Plaçons la masse ($v = 0$) sur le fil du bas, et notons v_A le potentiel du nœud A.
Un pont diviseur de tension en sortie s donne $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + R}\underline{v}_A$ (2), avec $\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$.



Circuit (1)

L'introduction d'un potentiel inconnu $\underline{v}_A$ oblige à rechercher une équation supplémentaire. Celle-ci est obtenue en appliquant la loi des nœuds exprimée avec les potentiels. $\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = 0$ arrivant en A s'écrit :

$$\frac{\underline{e} - \underline{v}_A}{R} + \frac{0 - \underline{v}_A}{nR} + \frac{\underline{s} - \underline{v}_A}{R} = 0 \text{ soit } \underline{v}_A = \frac{n}{2n+1}\left(\underline{e} + \underline{s}\right).$$

Le remplacement de $\underline{v}_A$ dans l'équation (2) donne $\underline{s} = \left(\frac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega}\right)\left(\frac{n}{2n+1}\right)\left(\underline{e}+\underline{s}\right)$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\left(jC\omega\right)$, en remontant les dénominateurs dans le membre de gauche, et en séparant $\underline{s}$ et $\underline{e}$, il vient :

$$\left(2n+1+\left(2n+1\right)\left(1+jRC\omega\right)-n\right)\underline{s} = n\,\underline{e} \text{ soit } \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{n}{\left(n+1\right)+\left(2n+1\right)jRC\omega}}. \quad (3)$$

❑ Méthode 1.2. Détermination directe de l'équation différentielle dans le domaine temporel

Il faut écrire la loi des nœuds et la loi des mailles aux divers nœuds et mailles, en tachant de faire intervenir le moins d'inconnues possible. On utilise également les lois relatives à chaque dipôle entre $u(t)$ et $i(t)$. Il reste à combiner toutes ces équations pour ne garder qu'une équation différentielle à une seule inconnue $s(t)$.
Cette méthode est à proscrire dès que le circuit contient au moins 3 mailles, car il est parfois difficile de se sortir d'un système de plusieurs équations différentielles couplées à plusieurs inconnues ! Il sera alors préférable d'utiliser la méthode 1.3.

⇨ **Exercice 1.3**

Déterminons l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ dans le domaine temporel pour le même circuit (1).

→ La loi des nœuds en A s'écrit $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Pour ne pas faire apparaître trop d'inconnues, il est souhaitable de remplacer toutes les intensités par des tensions, en utilisant les lois relatives aux dipôles : $i_1 = \left(e - v_A\right)/R$, $i_2 = \left(0 - v_A\right)/\mathrm{n}R$ et $i_3 = \left(s - v_A\right)/R = -C\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ ce qui donne $\frac{e(t)-v_A(t)}{R} + \frac{-v_A(t)}{nR} - C\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ soit $\left(1+n\right)v_A(t) = n\,e(t) - n\,RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. (4)

→ Il reste une inconnue en trop : $v_A(t)$. Nous pouvons maintenant exploiter la loi des mailles à une des 2 mailles présentes. La maille de droite donne : $v_A = s - R\,i_3$ soit, en éliminant avec l'intensité avec $i_3 = -C\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$: $v_A(t) = s(t) + R\,C\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ (5).

→ Il n'est pas utile d'exploiter la maille de gauche, car les 2 équations (4) et (5) suffisent à éliminer $v_A(t)$ et obtenir une équation différentielle entre $s(t)$ et $e(t)$. $v_A(t)$ tiré de (5) et injecté dans (4) donne, après avoir séparé $s(t)$ et $e(t)$ dans 2 membres séparés :

$$\boxed{\left(n+1\right)s(t) + \left(2n+1\right)RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = n\,e(t)}.$$

❑ Méthode 1.3. Détermination de l'équation différentielle dans le domaine temporel à partir de la fonction de transfert

Il faut commencer d'abord par déterminer la fonction de transfert à l'aide de la méthode 1.1 : $H(p)=\dfrac{s}{e}=\dfrac{a_0+a_1 p+a_2 p^2}{b_0+b_1 p+b_2 p^2}$. Les dénominateurs sont remontés dans le membre opposé sous la forme $\left[b_0+b_1 p+b_2 p^2\right]s=\left[a_0+a_1 p+a_2 p^2\right]e$ puis l'opérateur p est remplacé par $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ (transposition de la fonction de transfert opérationnelle dans le domaine temporel). L'équation différentielle obtenue est :

$$b_0\, s(t)+b_1\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+b_2\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}=a_0 e(t)+a_1\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

⇨ **Exercices 1.2, 1.3 et 1.6**

Déterminons encore l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ dans le domaine temporel pour le circuit (1), mais en partant de la fonction de transfert obtenue dans le domaine fréquentiel par la méthode 1.1.

Avec les notations de Laplace : $H=\dfrac{s}{e}=\dfrac{n}{(n+1)+(2n+1)RC\,p}$, soit en remontant les dénominateurs dans les membres opposés : $\left[(n+1)+(2n+1)RC\,p\right]s=n\,e$. La transposition dans le domaine temporel revient simplement à remplacer p par l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$:

$$\boxed{(n+1)s(t)+(2n+1)RC\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=n\,e(t)}.$$

■ Comment déterminer la nature d'un filtre linéaire ?

❑ Méthode 1.4. Nature d'un filtre à partir du schéma

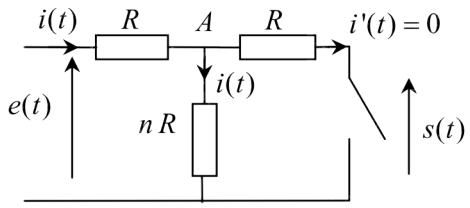
Se placer à basse fréquence, puis à haute fréquence, et remplacer dans chaque cas les bobines et condensateurs par leurs équivalents. Une impédance proche de 0 est équivalente à un fil (ou court-circuit), et une impédance très grande est équivalente à un interrupteur ouvert (le courant ne peut pas passer).
Il reste à retracer ainsi le schéma électrique équivalent dans chaque cas et en déduire la tension de sortie. Une tension de sortie nulle indique que les fréquences correspondantes sont coupées.

⇨ **Exercice 1.2**

Considérons toujours le même filtre (1) et cherchons à donner sa nature sans calcul. Voici ci-dessous une synthèse des simplifications que l'on peut faire à BF et HF.

	Basse fréquence $(\omega \to 0)$	Haute fréquence $(\omega \to \infty)$
$\lvert Z_C \rvert = \dfrac{1}{C\omega}$	$\lvert Z_C \rvert \to \infty$	$\lvert Z_C \rvert = 0$
$\lvert Z_L \rvert = L\omega$	$\lvert Z_L \rvert = 0$	$\lvert Z_L \rvert \to \infty$

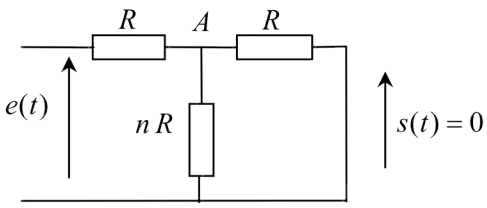
Schéma (1) simplifié à basse fréquence



Le condensateur empêche le courant i' de passer donc $s = v_A$. De plus, le courant i circulant dans R (de gauche) et dans nR est le même ce qui permet d'appliquer un pont diviseur de tension : $s = v_A = \dfrac{n}{n+1} e$. (6)

$\to$ $s \neq 0$: les basses fréquences passent.

Schéma (1) simplifié à haute fréquence



Le condensateur laisse passer le courant à haute fréquence : il se comporte comme un fil (ou court-circuit). La tension s à ses bornes est donc quasi nulle.

$\to$ $s \simeq 0$: les hautes fréquences sont coupées.

Le circuit (1) laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences : il s'agit donc d'un filtre passe bas.

❑ Méthode 1.5. Nature d'un filtre à partir de la fonction de transfert

La fonction de transfert est écrite sous forme d'une fraction rationnelle avec un polynôme $N(p)$ au numérateur et $D(p)$ au dénominateur : $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$. Reste à rechercher un équivalent de $H(p)$ à basse fréquence puis à haute fréquence, qui est l'équivalent de $N(p)$ divisé par l'équivalent de $D(p)$.

$\to$ À basse fréquence, l'équivalent d'un polynôme est le terme de plus petit degré. L'équivalent de $H(p)$ est donc le terme de plus petit degré de $N(p)$ divisé par le terme de plus petit degré de $D(p)$. Reste à faire tendre $p \to 0$ à l'équivalent de $H(p)$ obtenu pour savoir si les basses fréquences passent.

$\to$ À haute fréquence, l'équivalent d'un polynôme est le terme de plus haut degré. L'équivalent de $H(p)$ est le terme de plus haut degré de $N(p)$ divisé par le terme

de plus haut degré de $D(p)$. Reste à faire tendre $p \to \infty$ à l'équivalent de $H(p)$ obtenu pour savoir si les hautes fréquences passent.

⇨ **Exercice 1.4**

→ Considérons à nouveau le circuit (1) pour confirmer la nature de ce filtre.

À basse fréquence, on garde les plus petites puissances de p aussi bien au numérateur qu'au dénominateur :

$$H = \frac{n}{(n+1)+(2n+1)RC\,p} \sim \frac{n}{n+1}$$

À haute fréquence, on garde les plus grandes puissances de p aussi bien au numérateur qu'au dénominateur :

$$H = \frac{n}{(n+1)+(2n+1)RC\,p} \sim \frac{n}{(2n+1)RC\,p}$$

Les basses fréquences passent, et l'on retrouve le même signal de sortie (6) à BF que dans la méthode précédente. Les hautes fréquences donnent un équivalent en cte/p qui tend vers 0 quand p tend vers l'infini : les hautes fréquences sont coupées. C'est donc un filtre passe-bas.

→ Il y a un moyen très rapide de reconnaître un passe-bas, passe-bande ou passe-haut directement sur la fonction de transfert, à condition qu'elle ait été préalablement écrite sous forme de fraction rationnelle. Il faut écrire les polynômes en p (ou $j\omega$) sous forme de puissance croissante $a + b\,p + c\,p^2$. La forme du gabarit du filtre donne les coefficients nuls.

Passe bas	Passe bande	Passe haut
$H(p) = \dfrac{a + b\,p + \cancel{c\,p^2}}{a' + b'\,p + c'\,p^2}$	$H(p) = \dfrac{\cancel{a} + b\,p + \cancel{c\,p^2}}{a' + b'\,p + c'\,p^2}$	$H(p) = \dfrac{\cancel{a} + b\,p + c\,p^2}{a' + b'\,p + c'\,p^2}$
$c = 0$ et $a \neq 0$ (b peut être nul ou non)	$a = 0$, $c = 0$ $b \neq 0$	$a = 0$ et $c \neq 0$ (b peut être nul ou non)

Cette méthode est applicable également aux filtres d'ordre 1 (passe-bas et passe-haut). Appliqué au circuit (1), il est clair que c'est un filtre passe-bas.

■ Comment obtenir le signal de sortie d'un filtre ?

❑ Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi

Le régime établi est décrit par la solution particulière de l'équation différentielle. Dans le cas d'un signal $e(t)$ périodique, il serait vain de vouloir rechercher une solution particulière directement sur l'équation différentielle dans le domaine temporel car le second membre de l'équation différentielle est variable.

→ Rechercher tout d'abord la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ dans le domaine fréquentiel en suivant la méthode 1.1.

→ Cas $e(t)$ est sinusoïdal de la forme $e(t) = E_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Le signal de sortie est également un signal sinusoïdal de même pulsation $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi')$ dont l'amplitude est donnée par $S_m = E_m \cdot |\underline{H}(\omega = \omega_0)|$ et le déphasage par $\varphi' = \varphi + \arg(\underline{H}(\omega = \omega_0))$.

→ Cas $e(t)$ périodique mais non sinusoïdal, ou somme de sinus.

Il faut commencer par écrire la décomposition en série de Fourier de $e(t)$. Comme le filtre est linéaire, on pourra prendre chaque terme de la série individuellement pour rechercher le signal de sortie correspondant à chaque terme. $s(t)$ est la somme de tous ces termes.

⇨ **Exercices 1.1, 1.2, 1.4 et 1.5**

On cherche à fabriquer, au laboratoire de physique, un filtre moyenneur qui garde la composante continue et coupe la partie alternative du signal d'entrée suivant :

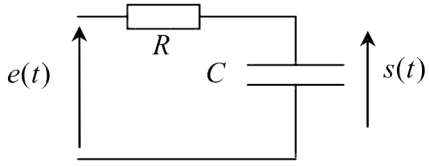
$$e(t) = 4 + 2\cos(\omega_0 t + 10^\circ) + 1{,}5\cos(2\omega_0 t + 45^\circ).$$

Les amplitudes sont en volt, et les déphasages en degré avec $\omega_0 = 500\,\text{rad/s} = 2{,}86.10^4\ ^\circ/\text{s}$.

On dispose pour cela des composants usuels d'un laboratoire de physique. Proposez un montage simple permettant de moyenner ce signal. Votre démarche devra être clairement argumentée qualitativement et quantitativement. Il conviendra en outre de proposer une démarche permettant de valider votre de choix.

Document support : un signal périodique à valeur moyenne non nulle peut s'écrire sous la forme : $e(t) = \langle e(t) \rangle + E(t)$, avec $\langle e(t) \rangle$ la valeur moyenne du signal et $E(t)$ la composante alternative du signal de valeur moyenne nulle (l'ondulation du signal), E_{eff} étant sa valeur efficace. Le taux d'ondulation est donné par la relation suivante : $\tau = \dfrac{E_{eff}}{\langle e(t) \rangle}$. Le taux d'ondulation mesure le niveau d'ondulation d'un signal continu : Pour un signal continu $\tau = 0$.

Il nous faut trouver un filtre qui garde la composante continue et coupe le fondamental et les harmoniques, ici l'harmonique de range 2 $\omega = 2\omega_0$. Un simple filtre RC passe-bas est le premier à venir à l'esprit (le plus classique). Un tel filtre pourrait réaliser cette opération, à condition d'avoir une pulsation de coupure inférieure à la pulsation du fondamental.



La valeur moyenne de $e(t)$ à garder est $4\,\text{V}$ $(\omega = 0)$, le fondamental (à couper) est le terme $\omega = \omega_0$ et le terme $\omega = 2\omega_0$ est l'harmonique de rang 2.

Il nous faut à présent déterminer les valeurs de *R* et de *C* permettant de remplir le cahier des charges, c'est-à-dire telles que la pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ ω_{coup} soit inférieure à ω_0.

La première étape consiste donc à calculer la fonction de transfert.

Le pont diviseur de tension donne $\underline{s} = \dfrac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R}\underline{e} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}\underline{e}$ soit $\underline{H} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$, de module (ou gain) $G = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ et d'argument $\varphi = -\arctan(RC\omega)$.

La pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$ étant $\omega_{coup} = 1/\text{RC}$, nous choisissons $R = 10\,\text{k}\Omega$ et $C = 1\,\mu\text{F}$ de sorte à avoir $\omega_{coup} = 100\,\text{rad/s} = 5,73.10^3\ °/\text{s}$ inférieure à ω_0.

À présent il nous faut vérifier l'efficacité du filtre moyenneur, calculons pour cela le signal de sortie.

Amplitudes (volt)

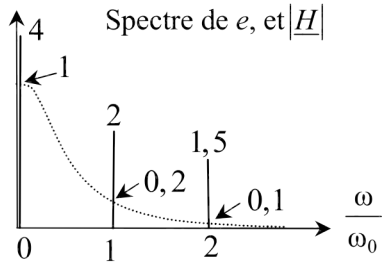
	$\omega = 0$	$\omega = \omega_0$	$\omega = 2\omega_0$
Entrée e	4	2	1,5
$\lvert\underline{H}(\omega)\rvert$	1	0,20	0,10
Sortie s	4	0,40	0,15

Phases (degré)

	$\omega = \omega_0$	$\omega = 2\omega_0$
Entrée e	10	45
$\arg(\underline{H}(\omega))$	-79	-84
Sortie s	-69	-39

Le signal de sortie est donc : $e(t) = 4 + 0,40\cos(\omega_0 t - 69°) + 0,15\cos(2\omega_0 t - 39°)$.

Ce calcul sur les amplitudes s'effectue aisément si l'on superpose le spectre du signal d'entrée avec la représentation de $|\underline{H}|$ (en échelle linéaire) sur un même diagramme (voir figure ci-contre ; échelles différentes pour e et $|\underline{H}|$).



Pour juger de l'efficacité du moyenneur on peut utiliser la notion de taux d'ondulation qui ici est de l'ordre de 10 %, ce qui en fait un moyenneur peu efficace. Il aurait fallu prendre un filtre d'ordre 2 pour un filtrage plus efficace, ou choisir une fréquence de coupure plus basse.

❑ Méthode 1.7. Détermination du signal de sortie en régime non établi

Pour décrire le régime transitoire de $s(t)$, il faut revenir à l'équation différentielle dans le domaine temporel, obtenue à l'aide des méthodes 1.2 ou 1.3.
La solution générale de l'équation différentielle est la somme de :
→ la solution particulière (constante si le second membre est constant), qui décrit le régime établi ;
→ la solution de l'équation homogène (solution de l'équation sans second membre).
Les constantes à déterminer (une pour un système d'ordre 1, 2 pour un système d'ordre 2) sont obtenues en traduisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur ou la continuité du courant dans une bobine.

⇨ **Exercices 1.2, 1.3 et 1.6**

Étudions la réponse à un échelon de tension E_0 du circuit (1). Le condensateur était préalablement déchargé. L'équation différentielle déterminée en méthode 1.2. est :

$(n+1)s(t)+(2n+1)RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=nE_0$.

→ la solution particulière est $s_P=\dfrac{n}{n+1}E_0$;

→ la solution de l'équation homogène est $s_H=A\exp(-t/\tau)$ avec $\tau=\dfrac{2n+1}{n+1}RC$.

La solution générale est donc $s(\mathrm{t})=\dfrac{n}{n+1}E_0+A\exp(-t/\tau)$.

A est déterminé avec la condition de continuité de la tension aux bornes du condensateur. Celui-ci étant au préalable déchargé, la tension reste nulle à $t=0^+$, ce qui donne :

$s(\mathrm{t}=0^+)=\dfrac{n}{n+1}E_0+A=0$ soit $A=-\dfrac{n}{n+1}E_0$.

Finalement : $\boxed{s(\mathrm{t})=\dfrac{n}{n+1}E_0\left(1-\exp(-t/\tau)\right)}$ pour $t>0$.

■ Comment déterminer la stabilité d'un système linéaire d'ordre 1 ou 2 ?

❑ Méthode 1.8. Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de transfert

La méthode se limite à l'ordre 1 ou 2.
Commencer par déterminer la fonction de transfert par la méthode 1.1. Mettre ensuite cette fonction de transfert sous forme de fraction rationnelle de p (notation de Laplace) ou de $(j\omega)$. Relever les signes des coefficients du polynôme du dénominateur :
→ tous les coefficients sont de même signe : le système est stable ;
→ les coefficients ont des signes différents : le système est instable.

⇨ **Exercice 1.6**

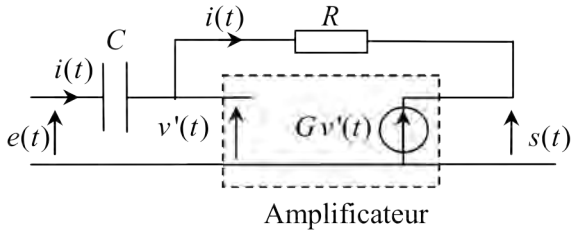
Exemple 1
Étudions la stabilité du circuit (1) représenté en méthode 1.1.
La fonction de transfert a été obtenue en formule (3) :

$\underline{H}=\dfrac{n}{(n+1)+(2n+1)jRC\omega}$ soit $H=\dfrac{n}{(n+1)+(2n+1)RC\,p}$ en notation de Laplace.

Les coefficients du polynôme au dénominateur sont $(n+1)>0$ et $(2n+1)RC>0$ tous deux positifs. Le système est stable.

Exemple 2 : avec composant actif.

Considérons le montage ci-contre, constitué d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'un amplificateur (en pointillés sur le schéma) d'impédance d'entrée infinie, de gain G constant, et d'impédance de sortie nulle.



Amplificateur

L'impédance d'entrée de l'amplificateur étant infinie, le courant circulant dans la résistance R est le même que celui circulant dans le condensateur : $\dfrac{\underline{e}-\underline{v}'}{\underline{Z}_C}=\dfrac{\underline{v}'-\underline{s}}{R}$ soit $\underline{v}'=\dfrac{\underline{e}/\underline{Z}_C+\underline{s}/R}{1/R+1/\underline{Z}_C}=\dfrac{jRC\omega\underline{e}+\underline{s}}{1+jRC\omega}$.

Or $\underline{s}=G\underline{v}'$ donc $\underline{s}=G\dfrac{jRC\omega\underline{e}+\underline{s}}{1+jRC\omega}$ soit $(1+jRC\omega)\underline{s}=G(jRC\omega\underline{e}+\underline{s})$ et donc finalement $\underline{H}=\dfrac{jGRC\omega}{(1-G)+jRC\omega}$ ou $\boxed{H=\dfrac{(GRC)p}{(1-G)+(RC)p}}$ en notation de Laplace.

Étudions les signes au dénominateur : $(RC)>0$ et $(1-G)>0\Leftrightarrow G<1$.

→ Pour un gain trop important : $G>1$, le système est instable. Dans ce cas le régime transitoire fait tendre $s(t)$ vers l'infini. En pratique, la source Gv' va « saturer » car elle ne peut pas donner une tension infinie en sortie. Ce problème est abordé en détail dans le chapitre suivant.

→ Pour un gain plus faible : $G<1$, le système est stable.

Le cas intermédiaire $G=1$ est impossible à obtenir exactement expérimentalement.

❑ Méthode 1.9. Étude de la stabilité dans le domaine temporel

Commencer par rechercher l'équation différentielle à l'aide des méthodes 1.2 ou 1.3. La stabilité est donnée par la solution de l'équation sans second membre : si elle diverge, le système est instable ; si elle converge vers 0, le système est stable.
En pratique, il n'est pas nécessaire d'exprimer complètement la solution. Il suffit de rechercher les racines de l'équation caractéristique. Si la partie réelle est positive, la solution est instable (exponentielle divergente) ; si la partie réelle est négative, la solution est stable (exponentielle convergente).

⇨ **Exercice 1.6**

→ **Reprenons l'exemple 1**.

Étudions la stabilité du circuit (1) dans le domaine temporel maintenant. La méthode 1.2 a permis d'obtenir l'équation différentielle suivante : $(n+1)s(t)+(2n+1)RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=n\,e(t)$.

L'équation sans second membre correspondante est : $(n+1)s(t)+(2n+1)RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=0$ de solution $s_H(t)=A\exp(-t/\tau)$ avec $\tau=RC(2n+1)/(n-1)$. Cette solution tend vers 0 : le système est donc stable. En fait, tout système linéaire **passif** (composé de R, L ou C, donc sans apport d'énergie) est stable.

→ **Reprenons l'exemple 2** avec amplificateur.

Le courant circulant dans le condensateur est le même que celui circulant dans la résistance R : $i=C\dfrac{\mathrm{d}(e-v')}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v'-s}{R}$. En multipliant cette égalité par R et par G et en remplaçant Gv' par s, on a : $RC\dfrac{\mathrm{d}(Ge-s)}{\mathrm{d}t}=s-Gs$ soit $RC\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+(1-G)s(t)=RCG\dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$.

La solution de l'équation sans second membre est $s_H(t)=A\exp(t/\tau)$ avec $\tau=-\dfrac{RC}{1-G}$.

- La solution de l'ESSM tend vers 0 si $1-G>0$ soit $G<1$. Le système est alors stable. Cela correspond aux 2 coefficients de l'ESSM (RC et $1-G$) tous deux de même signe.
- La solution de l'ESSM tend vers $\pm\infty$ si $1-G<0$ soit $G>1$. Le système est alors instable. Cela correspond aux coefficients de l'ESSM (RC et $1-G$) de signes différents.

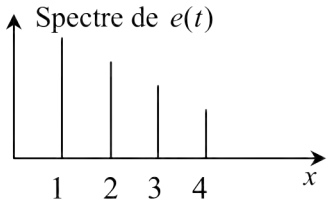
Cette méthode est plus calculatoire que la méthode 1.8, mais a l'avantage d'être applicable également dans d'autres domaines que l'électronique, comme en mécanique par exemple.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Nous obtenons un signal en sortie du système LCI $s(t)$ jugé trop faible. Suffit-il d'augmenter $e(t)$ d'un facteur 10 pour avoir un signal $s(t)$ 10 fois plus important ?	☐	☐
2.	En sortie de l'alternateur d'une éolienne, la tension produite est sinusoïdale de 600 V et 200 Hz. Il est possible de concevoir un convertisseur linéaire pour ensuite injecter la tension sur le réseau électrique à 230 V et 50 Hz.	☐	☐
3.	Un signal sinusoïdal en entrée $e(t)$ d'un système linéaire donne nécessairement un signal sinusoïdal de même fréquence en sortie, mais d'amplitude différente et déphasé.	☐	☐
4.	Un signal carré en entrée $e(t)$ d'un système linéaire donne nécessairement un signal carré en sortie de même période, mais d'amplitude différente et déphasé.	☐	☐
5.	Il y a exactement les mêmes raies dans le spectre du signal de sortie que dans le spectre du signal d'entrée.	☐	☐
6.	Pour obtenir la hauteur des raies ω_i du spectre en amplitude du signal de sortie, il suffit de connaître celles du signal d'entrée et de multiplier, pour chacune, leur hauteur respective par $\left\lvert \underline{H}(\omega = \omega_i) \right\rvert$.	☐	☐
7.	Soit un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. Un signal $e(t) = E\cos(\omega_0 t)$ placé à son entrée donne en sortie une réponse $s(t) = \underline{H}(j\omega_0) E\cos(\omega_0 t)$.	☐	☐
8.	Un filtre intégrateur a une fonction de transfert de la forme $H(p) = \dfrac{H_0}{p}$.	☐	☐
9.	Pour pouvoir transposer une fonction de transfert du domaine fréquentiel au domaine temporel, il faut obligatoirement utiliser des signaux sinusoïdaux.	☐	☐
10.	La solution particulière de l'équation différentielle d'un système linéaire donne le régime établi vers lequel $s(t)$ va converger au bout d'un certain temps.	☐	☐

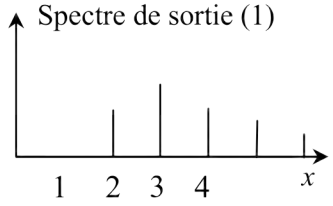
❑ Exercice 1.1. Linéarité et caractéristique d'un filtre

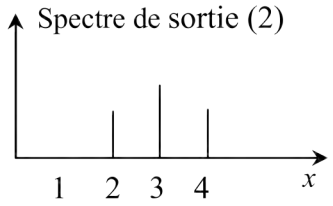
On envoie en entrée de différents filtres le signal $e(t)$ dont le spectre en amplitude est représenté en figure ci-contre. On note $x = f / f_0$ avec $f_0 = 1\text{kHz}$.

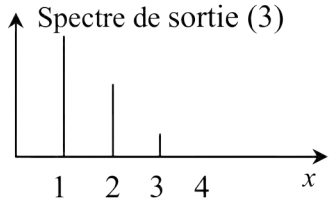


On obtient en sortie des filtres (1), (2) et (3) un signal $s(t)$ dont les spectres en amplitude sont donnés en figure ci-dessous.

1. Quel est (ou quels sont) le(s) filtre(s) non linéaire(s) ?
2. Caractérisez les filtres linéaires, et donnez un ordre de grandeur de leurs fréquences de coupure.



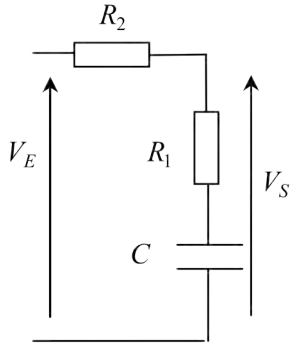




D'après oraux Banque PT

❑ Exercice 1.2. Étude d'un filtre

Considérons le circuit ci-contre, composé d'un condensateur de capacité $C = 10\text{ nF}$ et de deux résistances $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ et $R_2 = 90\text{ k}\Omega$.

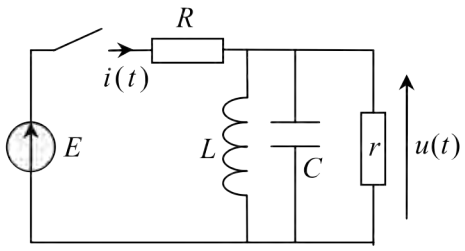


1. Déterminer le rapport d'amplitude $\left|\underline{V_S} / \underline{V_E}\right|$ à basse fréquence et haute fréquence en raisonnant directement sur le schéma.
2. Déterminer $\underline{H} = \dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}$ sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0 \dfrac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$.
3. Donner le diagramme de Bode asymptotique en amplitude à partir des deux fonctions de transfert du 1er ordre.
4. Déterminer la pulsation de coupure à -3 dB.
5. Donner l'équation différentielle de $V_S(t)$ en fonction de $V_E(t)$.
6. On place un signal d'entrée $V_E(t) = A\cos^2(\omega t)$ avec $A = 1\text{ V}$ et $\omega = 5.10^4$ rad/s. Déterminer le signal de sortie.
7. On place maintenant en entrée un échelon de tension unitaire à $t = 0$: $V_E(t > 0) = A$. On précise que toutes les tensions était nulles avant $t = 0$, et que le condensateur était déchargé. Déterminer le signal de sortie. Tracez l'allure de $V_S(t)$.

D'après oraux Banque PT

❑ Exercice 1.3. Étude temporelle d'un circuit électrique

On considère le circuit électrique ci-contre. Avant de fermer l'interrupteur, toutes les tensions et toutes les intensités étaient nulles.



1. Rappeler la définition d'un générateur idéal de tension.

À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

2. En notant $u(t)$ la tension aux bornes de la résistance r, déterminer toutes les tensions et les intensités initiales du circuit à $t = 0^+$.
3. Reprendre l'étude précédente en déterminant les valeurs des intensités et de la tension aux bornes de la bobine, du condensateur et des résistances au bout d'un temps très long.
4. Déterminer l'équation différentielle régissant la valeur de $u(t)$ dans le circuit. Quelle condition doit satisfaire R, r, L et C pour obtenir un régime pseudopériodique ?

D'après oraux Concours Commun Polytechnique

❑ Exercice 1.4. Action d'un filtre d'ordre 2 sur divers signaux

On considère un quadripôle électronique linéaire ayant la fonction de transfert suivante :

$$\underline{H} = \frac{j\dfrac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \qquad \text{où} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

1. Quelle est la nature du filtre ?
2. Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour $Q = 10$.
3. Donner un exemple de circuit permettant d'obtenir ce filtre. Exprimer Q et ω_0 en fonction des valeurs des composants choisis.
4. Donner la réponse $s(t)$ en sortie pour un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos^2\left(\dfrac{\omega_0}{2} t\right)$.
5. Donner l'allure de la réponse en sortie pour une entrée en créneau $+E_0 / -E_0$ avec $\omega \gg \omega_0$ et Q petit.
6. Même question pour un créneau en entrée avec $\omega = \omega_0$ et $Q >> 1$.

D'après oraux concours Centrale-Supélec

❑ Exercice 1.5. Filtrage d'un signal sonore

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore (analyse des phonèmes du langage par exemple), on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension v_e, puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de v_e de fréquences voisines d'une fréquence f_0 donnée.

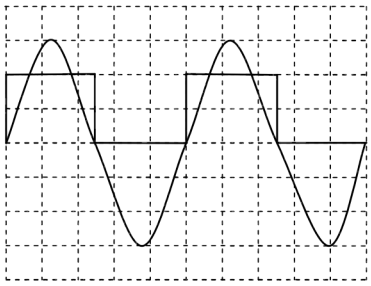
On note v_s la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit : $\underline{F}(j\omega) = \dfrac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \dfrac{F_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

On se propose de déterminer les caractéristiques F_0, Q et ω_0 du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire pour deux valeurs de fréquences.

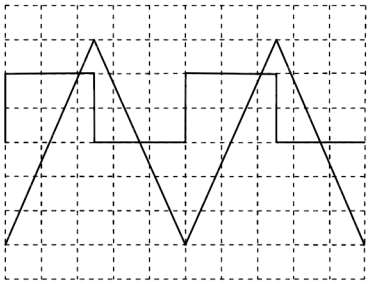
On rappelle la décomposition en série de Fourier de $v_e(t)$ dans le cas où $v_e(t)$ est périodique de période T avec :

→ pour $0 \le t \le T/2$: $v_e(t) = V_0$; → pour $T/2 \le t \le T$: $v_e(t) = 0$:

$$v_e(t) = V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\omega_1 t\right)\right) \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$



Première expérience



Deuxième expérience

Première expérience (oscillogramme ci-contre) :

→ voies 1 et 2 en position DC

→ base de temps : 50 µs par carreau

→ voie 1 (rectangle) : 0,5 V par carreau

→ voie 2 : 2 V par carreau

Dans cette expérience :

→ la tension v_s obtenue est quasi sinusoïdale ;

→ si on augmente la fréquence de v_e par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de v_s diminue ;

→ si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de v_e, on constate que l'amplitude de v_s diminue également.

Deuxième expérience (oscillogramme ci-contre) :

→ voies 1 et 2 en position DC

→ base de temps : 5 µs par carreau

→ voie 1 (rectangle) : 2 V par carreau

→ voie 2 : 0,2 V par carreau

Dans ce qui suit, on ne demande pas de calculs d'incertitudes, mais les mesures devront être faites avec soin (tous les résultats devront être obtenus avec une incertitude relative inférieure à 10 %).

1. Pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie v_s ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée v_e ?
2. **Première expérience :** pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie v_s quasi sinusoïdale alors que la tension d'entrée est rectangulaire ?

3. Déduire de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne :

a) la pulsation ω_0,

b) la valeur de F_0.

4. Dans la deuxième expérience, v_s est triangulaire alors que v_e est rectangulaire. Le filtre a un comportement intégrateur.

a) Donner l'expression approchée de $\underline{F}(j\omega)$ dans le domaine de fréquence correspondant à la deuxième expérience.

b) En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer, en justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport $F_0\,\omega_0 / Q$ (on se souviendra – voir question 1 – que la composante continue de v_e n'est pas intégrée).

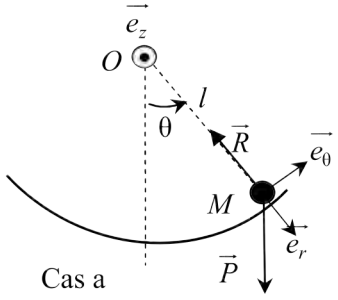
En déduire la valeur de Q.

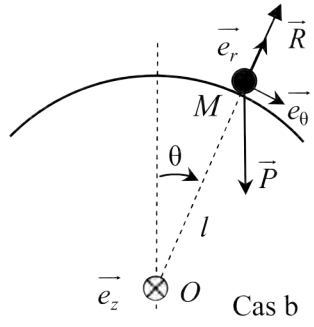
D'après Concours Commun Polytechnique

❑ Exercice 1.6. Stabilité d'un système linéaire en mécanique et en électronique

1. Mécanique

Une particule *M* supposée ponctuelle de masse *m* se déplace dans le creux d'une calotte de glace de forme circulaire de centre *O* de rayon de courbure l (cas a), puis sur le sommet d'une calotte de glace de forme circulaire de centre *O* de rayon l (cas b). On suppose qu'il n'y a pas de frottement solide, mais simplement un faible frottement de type fluide $-\alpha\vec{v}(M)$, et que le déplacement se limite au plan perpendiculaire à $\vec{e}_z$. On note $\Re$ le référentiel supposé galiléen lié aux calottes.





a) Déterminer l'équation du mouvement de M pour de petits angles θ dans les deux cas. Comparer les signes des coefficients dans les 2 équations différentielles.

b) Déduire des équations précédentes la position d'équilibre relative à chaque situation.

c) Que se passe-t-il si l'on écarte très légèrement la masse de sa position d'équilibre ? Donner la forme des solutions sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. Discuter de la stabilité.

2. Électricité

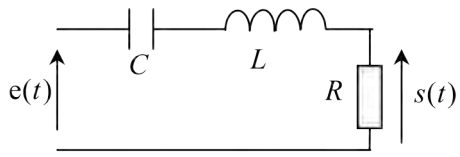
Considérons un circuit $R\ L\ C$ (cas a'), avec R petite (faible amortissement) et $s(t)$ la tension aux bornes de R, et un circuit $R\ L\ C$ avec amplificateur de gain $G = 2$ (cas b').

a) Établir l'équation différentielle reliant e et s dans les deux cas. Les simplifier pour $e(t) = 0$ (régime libre). Comparer les signes des coefficients dans les 2 équations différentielles. Peut-on faire une analogie avec l'étude mécanique précédente ?

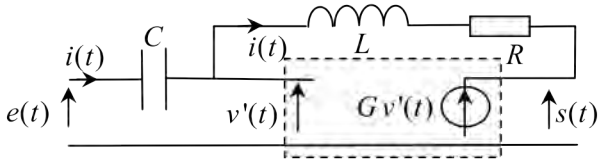
b) En déduire le « régime établi » dans les 2 cas.

c) Que se passe-t-il si une légère perturbation écarte le signal de sortie de son régime établi ? Donner la forme des solutions sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. Discuter de la stabilité.

3. Commenter et comparez les résultats obtenus dans les 2 situations (mécanique et électrique).



Cas a'



Cas b' Amplificateur

■ Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1. Un filtre linéaire ne fait pas apparaître de nouvelles fréquences.
Exercice 1.2. Question 1 : utiliser un pont diviseur de tension. Question 2 : si $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ alors $G_{\text{dB}} = G_{\text{dB1}} + G_{\text{dB2}}$.
Exercice 1.3. Question 3 : au bout d'un temps très long, le régime est établi. Or $E = \text{cte}$ donc tous les signaux sont constants.
Exercice 1.4. Question 3 : R, L et C placés en série permettent de réaliser les principaux filtres d'ordre 2. Question 5 : chercher l'équivalent de $\underline{H}$ à hautes fréquences pour connaître son comportement.
Exercice 1.6. Appliquer le théorème du moment cinétique.

Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux

1. Oui… en théorie (!), car c'est la définition même d'un système linéaire. Mais il convient en pratique de se méfier des effets non linéaires apparaissant souvent à niveau plus élevé (distorsion de la source, saturation du signal dans certains composants,…).

2. Un convertisseur **linéaire** peut modifier la tension et l'abaisser de 600 V à 230 V, mais ne peut pas modifier la fréquence. On doit donc avoir recours à des éléments non linéaires. En pratique, la tension est redressée en tension continue, puis un onduleur la transforme en tension sinusoïdale de fréquence adaptée.

4. Bien que le signal carré en entrée puisse se décomposer en série de Fourier, chaque terme de la série de Fourier sera affecté différemment par le filtre linéaire : les termes de la série seront plus ou moins atténués, plus ou moins déphasés. La série de Fourier en sortie a donc toutes les chances de ne pas être celle d'un carré !

5. Il est vrai qu'un système linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles raies, mais par contre il peut en faire disparaître.

7. Il ne faut pas mélanger écritures réelles et complexes !

10. Un système instable a une solution qui diverge de la solution particulière.

❑ Les erreurs classiques

→ Ne pas savoir distinguer un filtre linéaire d'un système non linéaire.
→ Ne pas savoir trouver rapidement (sans calculs) les caractéristiques d'un filtre.
→ Multiplier les inconnues dans le calcul de la fonction de transfert.
→ Mélanger les écritures réelles et complexes : il faut choisir entre domaine temporel (réels) et fréquentiel (complexes) !
→ Ne pas savoir résoudre une équation différentielle à coefficients constants avec second membre constant.
→ Vouloir systématiquement résoudre l'équation différentielle pour obtenir le signal de sortie. Si l'entrée $e(t)$ est périodique, il est préférable de raisonner dans le domaine fréquentiel !

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. Le sinus est une fonction isomorphe des filtres linéaires. Cela signifie qu'un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre.
Le filtre (1) comporte 2 raies supplémentaires à 5 et 6 kHz . Il est donc non linéaire.
Par contre, les filtres (2) et (3) semblent linéaires.

> *Un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles raies, mais à l'inverse, il peut en faire disparaître : c'est le principe du filtrage.*

2. Le filtre (2) supprime la raie 1, atténue un peu la raie 2, et garde inchangées les raies 3 et 4. Il s'agit d'un passe haut dont la fréquence de coupure est voisine de 2 kHz . Il pourrait aussi s'agir d'un passe-bande dont la bande passante est $\left[2\,\text{kHz} - f_{\text{coup2}}\right]$ avec $f_{\text{coup2}} > 4\,\text{kHz}$.
Le filtre (3) garde intactes les raies 1 et 2, atténue la raie 3, et supprime la raie 4. C'est un filtre passe bas de fréquence de coupure voisine de 3 kHz .

⇨ *Méthode 1.6*

Exercice 1.2

1. → À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant ne peut donc pas circuler, donc la tension aux bornes de R_2 est nulle, soit $V_E = V_S$.
$\left|\underline{H}\right|_{\text{BF}} = 1$ soit $G_{\text{dB BF}} = 0$.
→ À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil. Un pont diviseur de tension entre R_1 et R_2 donne , soit $V_S = R_1 / \left(R_1 + R_2\right) V_E$.
$\left|\underline{H}\right|_{\text{HF}} = 1/10$ soit $G_{\text{dB HF}} = -20$.

⇨ *Méthode 1.4*

2. Un pont diviseur de tension donne $\dfrac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} = \dfrac{\underline{Z_C} + R_1}{\underline{Z_C} + R_1 + R_2} = \dfrac{1/\,jC\omega + R_1}{1/\,jC\omega + R_1 + R_2}$.
Après multiplication du numérateur et du dénominateur par $jC\omega$, il vient :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 + j\,R_1 C\omega}{1 + j\left(R_1 + R_2\right)C\omega} = H_0 \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}}.$$

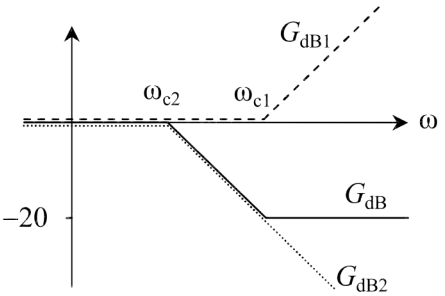
avec $H_0 = 1$, $\tau_1 = R_1 C = 10^{-4}\,\text{s}$ et $\tau_2 = \left(R_1 + R_2\right)C = 10^{-3}\,\text{s}$.

⇨ *Méthode 1.1*

3. La fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ avec $\underline{H}_1 = 1 + j\omega\tau_1$ et $\underline{H}_2 = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau_2}$.

→ $\underline{H}_2$ correspond à un filtre passe bas classique du 1er ordre de pulsation de coupure :
$\omega_{c2} = 1/\tau_2 = 10^3$ rad/s.

→ $\underline{H}'_1 = 1/\underline{H}_1$ correspond également à un filtre passe bas du 1er ordre de pulsation de coupure : $\omega_{c1} = 1/\tau_1 = 10^4$ rad/s.



Or $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\left|(1/\underline{H}'_1)\cdot\underline{H}_2\right| = 20\log|\underline{H}_2| - 20\log|\underline{H}'_1| = G_{dB2} - G'_{dB1}$.

Il suffit de tracer les diagrammes de Bode des filtres G_{dB1} (avec $G_{dB1} = -G'_{dB1}$) et G_{dB2} et de les additionner.

4. La pulsation de coupure à -3dB est donnée par $|\underline{H}_c| = |\underline{H}|_{max}/\sqrt{2}$. Ici $|\underline{H}|_{max} = 1$ correspond au gain statique. $|\underline{H}_c| = 1/\sqrt{2}$ donne $\dfrac{1+\omega_c^2\tau_1^2}{1+\omega_c^2\tau_2^2} = \dfrac{1}{2}$ en mettant l'égalité au carré, soit : $2 + 2\omega_c^2\tau_1^2 = 1 + \omega_c^2\tau_2^2$ et donc $\left(\tau_2^2 - 2\tau_1^2\right)\omega_c^2 = 1$, qui n'existe que si $\tau_2 > \tau_1$, ce qui est vérifié ici. Dans ce cas : $\boxed{\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_2^2 - 2\tau_1^2}} = 1{,}01.10^3 \text{ rad/s}}$.

Cette pulsation de coupure correspond quasiment à celle du filtre passe bas $\underline{H}_2$.

5. La fonction de transfert déterminée à la question 1. s'écrit en notation de Laplace : $H = \dfrac{V_S}{V_E} = \dfrac{1+\tau_1 p}{1+\tau_2 p}$ soit $\left[1+\tau_2 p\right]V_S = \left[1+\tau_1 p\right]V_E$. La transposition dans le domaine temporel donne : $\boxed{\tau_2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_S(t) + V_S(t) = \tau_1 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_E(t) + V_E(t)}$.

⇨ *Méthode 1.3*

> ✎ *Il est possible également de déterminer l'équation différentielle à partir de la loi des mailles, sans partir de H. Toutefois, il est généralement plus rapide de transposer la fonction de transfert, surtout quand elle a été déjà calculée dans la question précédente !*

6. Le signal d'entrée est périodique. Nous recherchons donc le signal de sortie en régime établi, à partir de la fonction de transfert.

⇨ *Méthode 1.6*

> 💣 *Il serait vain de vouloir partir de l'équation différentielle pour rechercher la solution $V_S(t)$! En effet, seule la solution particulière est recherchée (régime établi). Or le second membre est variable donc la solution particulière est difficile à trouver sur l'équation différentielle !*

Commençons par décomposer en série de Fourier le signal d'entrée $e(t)$ ce qui se fait simplement en linéarisant le carré du cosinus : $e(t) = A\cos^2(\omega t) = A/2 + A/2\cos(2\omega t)$.

La série de Fourier contient donc 2 termes :

→ A/2 est la composante continue, correspondant à $\omega = 0$. Or $\left|\underline{H}(\omega = 0)\right| = 1$, donc la composante continue du signal de sortie est $A/2 \cdot 1 = A/2$.

→ $A/2\cos(2\omega t)$ est une composante alternative de pulsation $\omega' = 2\omega = 10^5\,\text{rad/s}$.

$\left|\underline{H}(\omega')\right| = \dfrac{\sqrt{1+\omega'^2\tau_1^2}}{\sqrt{1+\omega'^2\tau_2^2}} = 0{,}10$ et $\text{Arg}\left(\underline{H}\right) = \arctan(\omega'\tau_1) - \arctan(\omega'\tau_2) = -0{,}09\,\text{rad}$.

La composante alternative du signal est donc $0{,}1 \cdot A/2\cos(2\omega t - 0{,}09)$.

Le signal de sortie est la somme de ces composantes : $\boxed{V_S(t) = \dfrac{A}{2} + \dfrac{A}{20}\cos(2\omega t - 0{,}09)}$.

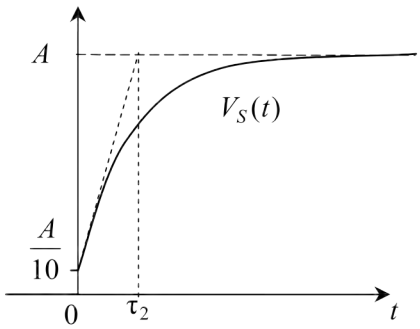
7. Partons de l'équation différentielle obtenue dans la question 4. Pour $t > 0$, $V_E(t) = A$ constante donc l'équation différentielle se simplifie : $\tau_2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_S(t) + V_S(t) = A$.

⇨ *Méthode 1.7*

La solution particulière est $V_{S\text{p}} = A$ et la solution de l'équation homogène est $V_{S\text{h}} = \alpha\exp(-t/\tau_2)$. La solution générale est donc $V_S = A + \alpha\exp(-t/\tau_2)$ avec α une constante à déterminer à l'aide de la condition initiale.

> ✎ *Pour un système d'ordre 1, il y a 1 constante à déterminer, et 1 condition initiale ; pour un système d'ordre 2, il y aurait 2 constantes à déterminer à l'aide de 2 conditions initiales.*

La condition initiale est donnée par la continuité de la tension aux bornes du condensateur, soit $U_C(t = 0^+) = 0$. Or $V_E(t = 0^+) = A$, qui se partage donc entre R_1 et R_2 selon un pont diviseur de tension :
$V_S(0^+) = U_C(0^+) + U_{R_1}(0^+) = 0 + R_1/(R_1 + R_2)A$.
Cette condition appliquée à la solution générale donne $A + \alpha = R_1/(R_1 + R_2)A$ soit $\alpha = -AR_2/(R_1 + R_2)$.



Finalement : $\boxed{V_S(t) = A\left(1 - \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\exp(-t/\tau_2)\right)}$

> ✎ *Ne pas conclure hâtivement que la tension $V_S(t)$ est continue donc nulle à $t = 0^+$ à cause de la présence du condensateur : le condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes uniquement !*

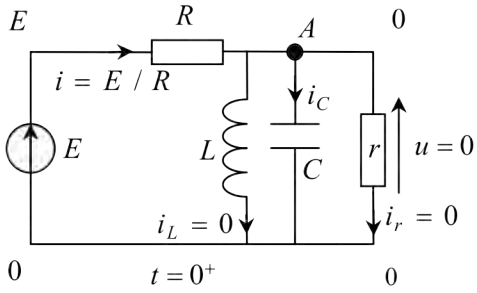
> ✎ *Le régime établi est la solution particulière. Comme la tension d'entrée est constante, donc statique, la tension du régime établi est donnée par $A \cdot \left|H(\omega = 0)\right| = A$.*

Corrigé

Exercice 1.3

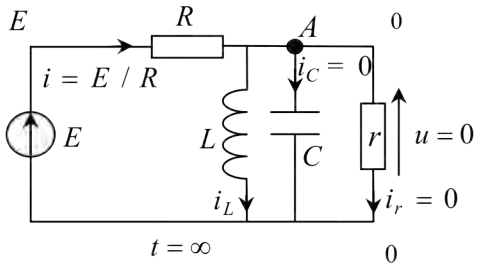
1. Un générateur de tension est, par définition, un dipôle actif qui maintient entre ses bornes une tension indépendante du courant qu'il débite.

2. Choisissons de noter 0 le potentiel de la ligne en bas du montage. Le condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes donc $u(0^+)=0$, soit $V_A(0^+)=0$. La tension u est la même aux bornes de r, L et C, et $i_r(0^+)=u(0^+)/r=0$. La tension aux bornes de R est E, ce qui implique $i(0^+)=E/R$ dans R. D'autre part, la bobine impose la continuité du courant donc $i_L(0^+)=0$.



Enfin, la loi des nœuds appliquée en A à $t=0^+$ donne $i_C(0^+)=i(0^+)-i_r(0^+)-i_L(0^+)=E/R$.

3. Au bout d'un temps très long, le régime établi est atteint. Pour un signal d'entrée constant, le régime établi correspond à une constante : toutes les tensions et intensités sont constantes. Or $u=u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ avec i_L constant donc $u(\infty)=0$ et par conséquent $i_r(\infty)=u(\infty)/r=0$ soit $V_A(\infty)=0$. La tension aux bornes de R est E, ce qui implique $i(\infty)=E/R$ dans R.



D'autre part $i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ avec u constant donc $i_C(\infty)=0$.

Enfin, la loi des nœuds appliquée en A à $t=\infty$ donne $i_L(\infty)=i(\infty)-i_r(\infty)-i_C(\infty)=E/R$.

4. Il est possible de déterminer directement l'équation différentielle en partant de la loi des nœuds en A dans le domaine temporel : $i=i_L+i_C+i_r$. (1)

⇨ *Méthode 1.2*

Or $i=\big(E-u\big)/R$, $i_L=1/L\int u(t)dt$, $i_C=C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ et $i_r=u/r$.

En remplaçant les intensités dans la loi des nœuds (1) et en dérivant temporellement l'équation obtenue pour fait disparaître l'intégrale dans i_L, il vient $\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\big(E-u\big)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{L}u+C\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ soit en multipliant par L et sachant que E est constante : $\boxed{LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+L\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=0}$.

L'autre méthode consiste à se placer dans le domaine fréquentiel et déterminer la fonction de transfert.

⇨ *Méthode 1.3*

Notons Z_{eq} l'impédance équivalente à l'association $r // C // L$. Un pont diviseur de tension donne $\frac{u}{E} = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+R} = \frac{1}{1+R\frac{1}{Z_{eq}}}$ avec $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Lp} + Cp + \frac{1}{r}$ en notation de Laplace, soit

$$\frac{u}{E} = \frac{1}{1+R\left(\frac{1}{Lp}+Cp+\frac{1}{r}\right)} = \frac{Lp}{R+\left(1+\frac{R}{r}\right)Lp+RLCp^2}. \quad (1)$$

> *Ne pas chercher à calculer Z_{eq} directement avant d'appliquer le pont diviseur de tension, ce qui serait très lourd en calculs ! Quand il y a plusieurs impédances en parallèle, il faut faire apparaître $1/Z_{eq}$ dans l'expression de H, puis remplacer $1/Z_{eq}$ par la somme des admittances.*

Transposons la fonction de transfert (1) dans le domaine temporel :

$$\left[R+\left(1+\frac{R}{r}\right)Lp+RLCp^2\right]u = [Lp]E,$$

ce qui donne avec E constante et en divisant par R : $\boxed{LC\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)L\frac{du(t)}{dt}+u(t)=0}$.

Pour obtenir un régime pseudo-périodique, il faut $\Delta_{\text{équation caractéristique}} < 0$.

L'équation caractéristique étant $LCp^2+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)Lp+1=0$, la condition à satisfaire est $\Delta_{EC} = \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)^2 L^2 - 4LC < 0$, soit $\boxed{\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right) < 2\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

> *L'équation caractéristique est simplement le polynôme au dénominateur de la fonction de transfert.*

Exercice 1.4

1. Le filtre est un passe bande, car il n'y a pas de terme de degré 0 ni de degré 2 dans le polynôme du numérateur.

⇨ *Méthode 1.5*

$$\underline{H} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$$

Ce résultat se retrouve sur les équivalents basse et haute fréquence :

→ à BF, $\underline{H} \sim \frac{jx/Q}{1} = j\frac{x}{Q}$ et $|\underline{H}| \xrightarrow{x\to 0} 0$

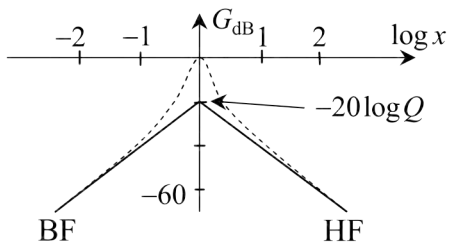
→ à HF, $\underline{H} \sim \dfrac{jx/Q}{-x^2} = -j\dfrac{1}{Qx}$ et $|\underline{H}| \xrightarrow{x\to\infty} 0$.

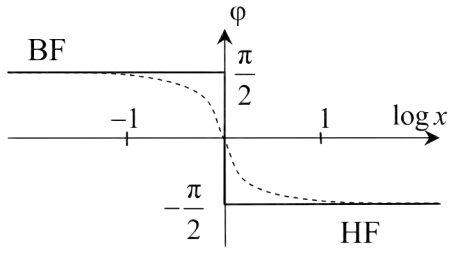
2. À partir des équivalents sont déduites les asymptotes des diagrammes de Bode :

	Équivalent	$G_{dB} = 20\log\|\underline{H}\|$	$\varphi = \arg(\underline{H})$
BF	$\underline{H} \sim j\dfrac{x}{Q}$	$G_{dB\,BF} = 20\log x - 20\log Q$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$
HF	$\underline{H} \sim -j\dfrac{1}{Qx}$	$G_{dB\,HF} = -20\log x - 20\log Q$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

Il est beaucoup plus simple d'écrire d'abord les équivalents de $\underline{H}$, puis ensuite d'en déduire les asymptotes, plutôt que de commencer par exprimer le gain et la phase sur $\underline{H}$ puis d'essayer de les simplifier ensuite.

Remarquons que $\underline{H}(x=1) = 1$ (indépendant de Q) donc la courbe réelle (en pointillés sur le diagramme) passe par $G_{dB}(x=1) = 0$ et $\varphi(x=1) = 0$.



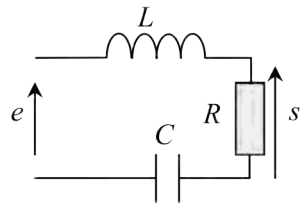


3. Un circuit $R\ L\ C$ permet la réalisation d'un passe-bande : la tension de sortie s est prise aux bornes de R.

⇨ *Méthode 1.1*

Appliquons un pont diviseur de tension aux bornes de R :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + jL\omega + 1/jC\omega} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$



En identifiant avec la forme de la fonction de transfert proposée, il vient : $\dfrac{1}{\omega_0 Q} = RC$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2} = LC$ soit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

4. Le signal d'entrée est périodique. Commençons par le décomposer en série de Fourier, ce qui s'obtient simplement en linéarisant le carré :

$$e(t) = E_0 \cos^2\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) = \frac{E_0}{2}\left(1+\cos(\omega_0 t)\right).$$

⇨ *Méthode 1.6*

→ Le premier terme de la série est la composante continue $E_0/2$. Elle est multipliée en sortie par $\left|\underline{H}(x=0)\right|$. Or $\left|\underline{H}(x=0)\right| = 0$: il n'y a donc plus de composante continue en sortie.

→ Le terme suivant de la série est $(E_0/2)\cos(\omega_0 t)$. La pulsation $\omega = \omega_0$ correspond à $x = 1$. Or nous avons vu à la question 2 que $\left|\underline{H}(x=1)\right| = 1$ et $\varphi(x=1) = 0$. Cette composante de la série a son amplitude conservée et n'est pas déphasée.
Le signal de sortie est donc $s(t) = (E_0/2)\cos(\omega_0 t)$.

5. À haute fréquence $\omega >> \omega_0$, on a $\underline{H} \sim -j\frac{1}{Qx} = \frac{1}{p}\frac{\omega_0}{Q}$. La fonction de transfert est en $1/p$: c'est un intégrateur. L'intégration d'un signal créneau $+E_0/-E_0$ donne un signal triangulaire. La condition Q petit est nécessaire pour ne pas avoir un signal trop faible en amplitude en sortie, ce qui pourrait se produire car $x >> 1$.

6. Il faudrait théoriquement décomposer le signal en série de Fourier et calculer la sortie correspondant à chaque terme. Le signal créneau étant périodique, les pulsations des termes de la série sont des multiples entiers de ω_0. Or l'énoncé spécifie que $Q >> 1$, ce qui veut dire que le passe-bande est très sélectif et ne garde que les pulsations très proches de $x = 1$ soit dans notre cas uniquement $\omega = \omega_0$. Seule la pulsation fondamentale du créneau passe, donc le signal de sortie est quasi sinusoïdal.

Exercice 1.5

1. Le filtre passe-bande ne laisse pas passer la composante continue : $\left|\underline{H}(\omega=0)\right| = 0$.

2. Si le signal de sortie est quasi sinusoïdal, c'est que le filtre ne laisse passer qu'une seule composante du spectre du signal d'entrée. Or la période du sinus obtenu est la même que celui du carré : la seule composante conservée du carré est donc le fondamental.

3. a) La pulsation passante du passe-bande est ω_0, qui correspond à la pulsation du sinus de sortie de la première expérience. On mesure à l'oscilloscope 5 carreaux de 50µs soit $T_0 = 250\,\mu s$, ce qui donne $\boxed{\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2{,}5.10^4 \text{ rad/s}}$.

b) La composante fondamentale du carré a une amplitude de $2V_0/\pi$ d'après la décomposition en série de Fourier donnée par l'énoncé. L'amplitude de cette composante de pulsation ω_0 est multipliée par $\left|\underline{F}(j\omega = j\omega_0)\right| = F_0$ d'après l'expression de la fonction de transfert. L'amplitude du signal sinusoïdal de sortie est donc $(2V_0/\pi)\cdot F_0$.

⇨ *Méthode 1.6*

La lecture des amplitudes des signaux de l'expérience 1 donne 2 carreaux pour V_0 soit $V_0 = 1$ V et 3 carreaux pour le sinus de sortie soit $(2V_0/\pi)\cdot F_0 = 6$ V.

Corrigé

On en déduit : $\boxed{F_0 = \dfrac{6\pi}{2V_0} = 9{,}4}$. La bande passante est amplifiée.

4. a) Dans la deuxième expérience, la période a été divisée par 10 (voir base de temps) et donc les pulsations multipliées par 10. On peut considérer que $\omega >> \omega_0$ et rechercher un équivalent de $\underline{F}$: $\underline{F}(j\omega) \approx \dfrac{F_0}{jQ\omega/\omega_0} = \dfrac{1}{j\omega}\dfrac{F_0\omega_0}{Q}$ ou (en notation de Laplace) $\dfrac{v_s}{v_e} = \dfrac{1}{p}\dfrac{F_0\omega_0}{Q}$ qui se comporte donc comme un intégrateur, ce que l'énoncé confirme.

b) La transposition de la fonction de transfert dans le domaine temporel donne $v_s(t) = \dfrac{F_0\omega_0}{Q}\displaystyle\int_0^t v'_e(t')\,\mathrm{d}t'$. v'_e est la fonction v_e dont on a enlevé la composante continue qui est filtrée (éliminée), donc $v'_e = V_0/2$ pendant la première demi-période. Il vient $v_s(t) = \dfrac{F_0\omega_0}{Q}\dfrac{V_0}{2}t + \text{cte}$ pour $0 \le t \le T/2$. La pente est $\dfrac{F_0\omega_0}{Q}\dfrac{V_0}{2}$ et se lit à l'oscilloscope : montée en tension de 6 carreaux ($1{,}2\,\text{V}$) en une durée de 2,5 carreaux ($12{,}5\,\mu\text{s}$), soit une pente de $1{,}2/12{,}5 = 0{,}096\,\text{V}/\mu\text{s}$. En conclusion $\boxed{Q = \dfrac{F_0\,\omega_0\,V_0}{2\times\text{pente}} = 1{,}22}$.

Exercice 1.6

1. a) Le problème est similaire au pendule pesant simple. Pour le détail des calculs, on pourra se reporter à la méthode 2 du chapitre « Moment cinétique » Prépas sciences 1re année.

→ Pour le cas a) : les forces appliquées sont le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$, la réaction du support (analogue à la tension du fil du pendule) $\vec{R} = -R\vec{e}_r$ et le frottement du type fluide $\vec{F} = -\alpha\vec{v}(M) = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Le théorème du moment cinétique appliqué à M par rapport à O est : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_0(M)_{\mathfrak{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{P}\right) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{T}\right) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{F}\right)$ avec $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{P}\right) = -mgl\sin\theta\,\vec{e}_z$, $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{T}\right) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{F}\right) = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_z$ et $\vec{L}_0(M)_{\mathfrak{R}} = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. Le TMC donne donc l'équation différentielle $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - \alpha l\dot{\theta}$. Pour de petits angles, $\sin\theta \approx \theta$ soit $\boxed{ml\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + mg\theta = 0}$. (a)

→ Pour le cas b) : le poids est $\vec{P} = m\vec{g} = mg\left(-\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$, la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$, le frottement $\vec{F} = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et l'on a toujours $\vec{L}_0(M)_{\mathfrak{R}} = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. Les moments sont alors $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{P}\right) = mgl\sin\theta\,\vec{e}_z$, $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{T}\right) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0\left(\vec{F}\right) = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_z$ et le TMC donne l'équation différentielle : $\boxed{ml\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} - mg\theta = 0}$ (b).

→ (a) : 3 coefficients constants de même signe (positifs) ;

→ (b) : coefficients de signes différents.

> ✎ *Le cours nous permettrait déjà à ce stade de conclure que (a) est un système stable (mêmes signes) et (b) un système instable (signes différents).*

b) À l'équilibre, il y a $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ donc $mg\,\theta_{eq} = 0$ soit $\boxed{\theta_{eq} = 0}$ dans les 2 cas. La position d'équilibre correspond à la solution particulière des équations différentielles.

c) → L'équation caractéristique de (a) est $m\,l\,r^2 + \alpha\,r + mg = 0$ et $\Delta_{EC} = \alpha^2 - 4m^2 g\,l < 0$ car α petit. Les racines de l'EC sont donc $r = \dfrac{-\alpha \pm j\sqrt{-\Delta}}{2\,m\,l}$.

La forme de la solution est donc $\theta(t) = A\exp\left(-\dfrac{\alpha}{2ml}t\right)\cos\left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2ml}t + \varphi\right)$. On remarque que $\theta(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Si l'on écarte légèrement la masse de sa position d'équilibre, elle y revient au bout d'un certain temps. L'équilibre est donc stable.

→ L'équation caractéristique de (b) est $m\,l\,r^2 + \alpha\,r - mg = 0$ et $\Delta_{EC} = \alpha^2 + 4m^2 g\,l > 0$. Les racines de l'EC sont donc $r_{\pm} = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4m^2 g\,l}}{2\,m\,l}$. Comme $\sqrt{\alpha^2 + 4m^2 g\,l} > \alpha$, il y a une racine réelle positive r_+ et une racine négative réelle négative r_-.

La forme de la solution est donc $\theta(t) = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t)$. On remarque que $\theta(t) \xrightarrow{t\to\infty} \pm\infty$ à cause de $\exp(r_+ t)$. Si l'on écarte très légèrement la masse (même de manière infime !), A devient non nulle et la masse s'éloigne de la position d'équilibre. L'équilibre est donc instable.

⇨ *Méthode 1.9*

> ✎ *Si α n'avait pas été petit, les solutions auraient été exponentielles décroissantes au lieu de sinusoïdales pour le cas (a), mais cela n'aurait rien changé à la stabilité : seul le signe des coefficients joue sur la stabilité !*

2. a) Calculons la fonction de transfert $\underline{s}/\underline{e}$ pour la transposer ensuite en équation différentielle dans le domaine temporel.

⇨ *Méthode 1.3*

→ Dans le cas (a'), en appliquant un pont diviseur de tension :

$$\boxed{H = \frac{s}{e} = \frac{R}{R + L\,p + 1/C\,p} = \frac{RC\,p}{1 + RC\,p + LC\,p^2}}. \quad \text{(a')}$$

Transposons dans le domaine temporel : $\left[1 + RC\,p + LC\,p^2\right]s = \left[RC\,p\right]e$ soit en régime libre :

$$\boxed{LC\frac{d^2}{dt^2}s(t) + RC\frac{d}{dt}s(t) + s(t) = 0}. \quad \text{(a')}$$

→ Dans le cas (b'), la loi d'Ohm aux bornes de (L série R) s'écrit : $v' - s = (R + L\,p)i$, et la loi d'Ohm aux bornes de Z_C s'écrit : $e - v' = (1/C\,p)i$.

Il s'agit du même courant i dans C et dans L et R car l'impédance d'entrée de l'amplificateur est infinie.

En combinant les 2 lois d'Ohm pour éliminer i, il vient : $v'-s=(R+Lp)Cp(e-v')$ soit, en multipliant l'égalité par G : $G(v'-s)=(R+Lp)CpG(e-v')$. Or $s=Gv'$ donc $s(1-G)=(RCp+LCp^2)(Ge-s)$. En séparant s et e, on en déduit :

$$\boxed{H=\frac{s}{e}=\frac{G(RCp+LCp^2)\,p^2}{(1-G)+RCp+LCp^2}}. \quad \text{(b')}$$

Transposons dans le domaine temporel :
$\left[(1-G)+RCp+LCp^2\right]s=\left[G(RCp+LCp^2)\right]e$ soit avec $G=2$ et en régime libre :

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s(t)+RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)-s(t)=0}. \quad \text{(b')}$$

À ce stade, on peut déjà conclure que (a') est un système stable (3 mêmes signes au dénominateur de H) et (b') un système instable (signes différents au dénominateur de H pour $G=2$)

⇨ *Méthode 1.8*

b) Le régime établi correspond à la solution particulière des équations différentielles, soit ici dans les 2 cas : $s_P=0$. C'est la valeur que prend la sortie s au bout d'un temps très long.

c) → L'équation différentielle (a') est similaire à celle de (a) en mécanique. L'équation caractéristique pour (a') est $LCr^2+RCr+1=0$, qui est le dénominateur de $H(p)$!

La solution est $s(t)=A\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_{EC}}}{2LC}t+\varphi\right)$ avec $\Delta_{EC}=(RC)^2-4LC<0$ car R petit : $s(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$. Si une perturbation écarte s de son régime établi, le signal de sortie y retourne : le système est stable.

→ L'équation différentielle (b') est similaire à celle de (b) en mécanique. L'équation caractéristique pour (b') est $LCr^2+RCr-1=0$, qui est le dénominateur de $H(p)$.

La solution est $s(t)=A\exp(r_+t)+B\exp(r_-t)$ avec $r_\pm=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2+4LC}}{2LC}$. Comme $r_+>0$: $s(t)\xrightarrow{t\to\infty}\pm\infty$ (si $A\neq0$). La moindre perturbation va rendre A non nulle (même de manière infime) : s diverge alors et s'éloigne de sa position d'équilibre. Le système est instable.

⇨ *Méthode 1.9*

3. La solution particulière donne la position d'équilibre (mécanique) ou le régime établi (électricité). Toutefois, le système tend vers cette solution uniquement si le système est stable !

En électricité, c'est l'introduction d'un composant actif (amplificateur) qui peut déstabiliser le système : c'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Rétroaction : exemple de l'ALI

UN SCIENTIFIQUE



John Ralph Ragazzini (1912-1988) est le fils d'immigrés italiens installés à New York. Il effectue ses études à Columbia University et obtient son diplôme en 1941. Durant la guerre, il participe à la recherche opérationnelle de défense nationale, en particulier le projet Manhattan chargé de concevoir la bombe atomique. Il devient, par la suite, l'un des principaux concepteurs des amplificateurs opérationnels.

Un peu d'histoire

On doit à un inventeur américain, Lee De Forest, la conception du premier amplificateur électronique à l'aide d'une lampe triode en 1906. L'amplificateur linéaire intégré a été conçu en 1947 par John Ragazzini et s'est développé industriellement dans les années 1960. Il était utilisé initialement pour réaliser des fonctions linéaires comme l'addition, la soustraction, la multiplication par une constante, l'intégration, la dérivation… Cela permettait de résoudre de manière automatique certains types d'équations à l'aide d'un montage électronique. Par la suite, le développement des circuits intégrés a considérablement amélioré les performances de ces amplificateurs. Parallèlement, les coûts de fabrication ont énormément baissé. Ceci a permis à ces calculateurs électroniques d'ouvrir la voie à la conception des calculatrices actuelles.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- Connaître les propriétés des amplificateurs opérationnels (impédance d'entrée importante, gain, fréquence de coupure, saturations)
- Connaître les modèles utilisés (ALI idéal et ALI linéaire du 1er ordre) ainsi que leurs limites

Ce qu'il faut savoir faire

- Savoir reconnaître le fonctionnement (probable) linéaire ou saturé d'un amplificateur opérationnel
- Déterminer le signal de sortie d'un amplificateur opérationnel, qu'il soit en fonctionnement linéaire ou saturé

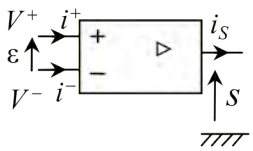
L'amplificateur opérationnel linéaire du 1er ordre

Le modèle de l'ALI linéaire du 1er ordre



L'amplificateur opérationnel (noté AO ou ALI) est un circuit intégré **actif** constitué de transistors. Il comporte 2 entrées : V^+ (entrée non inverseuse) et V^- (entrée inverseuse). Il amplifie en sortie s la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = V^+ - V^-$ et fournit du courant i_S en sortie.

L'ALI a des impédances d'entrées très grandes, une impédance de sortie faible, un gain différentiel en tension très important à basse fréquence : $\mu_0 \approx 10^5$ à 10^6, ainsi qu'un comportement de type passe-bas de fréquence de coupure $f_0 \approx 10$ à 20 Hz.



Le modèle simplifié de l'ALI linéaire du 1er ordre est le suivant :

→ la résistance d'entrée est infinie, donc **les courants de polarisation sont nuls** $\boxed{i^+ = i^- = 0}$,

→ la résistance de sortie est nulle,

→ la fonction de transfert est de type passe bas du 1er ordre : $\boxed{\dfrac{s}{\varepsilon} = \dfrac{\mu_0}{1+\tau p}}$.

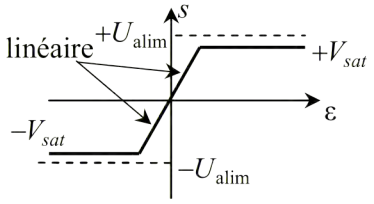
avec **une pulsation de coupure** $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau} \approx 100$ rad/s et **un gain statique** $\mu_0 \approx 10^5$.

⇨ Méthode 2.1. Comprendre ce qu'est un modèle

Toutefois, la tension de sortie ne peut pas dépasser 2 valeurs extrêmes $\pm V_{sat}$ appelées **tensions de saturation**, généralement opposées et légèrement inférieures aux tensions d'alimentation.

Il y a donc 2 modes de fonctionnement possibles : soit linéaire, soit saturé.

Le courant de sortie i_S quant à lui est limité à $i_{S\max} \approx 20$ mA.



Caractéristique statique de transfert

Remarque

La transposition de la fonction de transfert opérationnelle dans le domaine temporel s'écrit : $\boxed{s(t) + \tau \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} s(t) = \mu_0\, \varepsilon(t)}$ avec un temps de réponse $\tau = 1/\omega_0 \approx 10$ ms.

❑ Exemple du montage amplificateur non inverseur

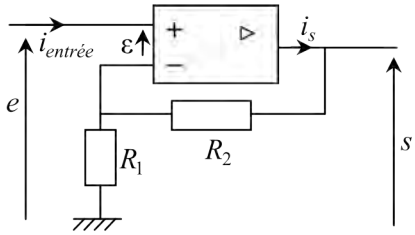


Figure a : Amplificateur non inverseur

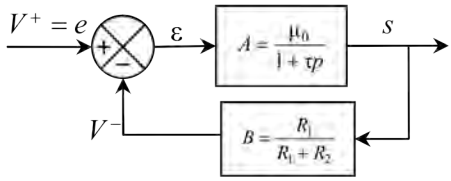


Schéma fonctionnel

Les relations sont : $s = \mu_0 / (1+\tau p)\varepsilon$, $\varepsilon = V^+ - V^-$, $V^+ = e$ et $V^- = R_1 / (R_1 + R_2)s$, ce qui permet de représenter ce montage par le schéma fonctionnel.

En combinant les 3 relations précédentes, il vient : $\frac{s}{e} \simeq \frac{\mu_0}{(\mu_0 R_1 / (R_1 + R_2)) + \tau p}$ pour $\mu_0 >> 1$.

Les coefficients du dénominateur sont tous positifs : **le système est donc stable**.

⇨ **Méthode 2.3. Étude générale de stabilité**

C'est un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \mu_0 \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{1}{\tau}$ et de gain statique $\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{1}{B}$. **Le gain du montage ne dépend que de la rétroaction *B*** et non de μ_0.

	Gain statique	Pulsation de coupure	Produit gain-bande passante
ALI seul	μ_0	$1/\tau$	μ_0 / τ
Ampli non inverseur	$(R_1 + R_2) / R_1$	$\mu_0 R_1 / ((R_1 + R_2)\tau)$	μ_0 / τ

Le produit gain-bande passante du montage non inverseur est conservé. Il est généralement de l'ordre de quelques MHz. Il y a donc un compromis entre gain et bande passante.

❑ Exemple du montage à hystérésis

Reprenons le montage précédent (figure a) en inversant simplement les bornes V^+ et V^-.

Les relations $s = \frac{\mu_0}{1+\tau p}(V^+ - V^-)$ avec $V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ et $V^- = e$ donnent :

$\frac{s}{e} \simeq \frac{\mu_0}{\mu_0 R_1 / (R_1 + R_2) - \tau p}$. Les coefficients du polynôme au dénominateur sont de signes opposés : **le montage est donc instable !** Le signal de sortie $s(t)$ diverge donc lors d'un régime transitoire très court et **se sature à** $+V_{sat}$ **ou** $-V_{sat}$.

Le résultat obtenu dans les 2 exemples précédents se généralise :

une rétroaction sur la borne inverseuse V^- stabilise le montage et permet un fonctionnement linéaire, alors qu'une rétroaction sur la borne non inverseuse V^+ déstabilise le montage et amène une saturation en sortie.

⇨ **Méthodes 2.2. ALI sans rétroaction ou avec une seule rétroaction et 2.3. Étude générale de stabilité**

❑ Limites du modèle linéaire du 1er ordre

Une unique rétroaction sur la borne (–) stabilise le montage, mais on constate en travaux pratiques que l'ALI peut saturer tout de même dans certaines situations. C'est le cas si la tension demandée en sortie dépasse les tensions de saturation $\pm V_{sat}$, mais également si l'intensité de sortie demandée à l'ALI dépasse l'intensité de saturation $\boxed{i_{S\max} \approx 20\ \text{mA}}$.

D'autre part, la vitesse de balayage d'un ALI est limitée : il ne peut pas donner une pente supérieure à une valeur limite σ appelée « slew rate » de l'ordre de 1 à $10\,\text{V/}\mu\text{s}$ suivant les types d'ALI. C'est une limite en fréquence du comportement linéaire.

Il existe d'autres limites au modèle, comme les courants de polarisation qui ne sont pas tout à fait nuls, le décalage de la tension de sortie (offset), etc.

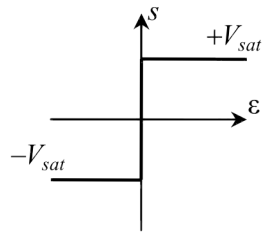
⇨ **Méthode 2.1. Comprendre ce qu'est un modèle et en connaître ses limites**

■ Le cas limite de l'ALI idéal de gain infini en régime linéaire

❑ Le modèle

L'ALI idéal de gain infini est une modélisation encore simplifiée du modèle précédent avec $\mu_0 \to \infty$.

Un fonctionnement linéaire d'un ALI idéal impose donc d'avoir $\varepsilon = 0$ **soit** $V^+ = V^-$. **Il y a toujours par ailleurs** $i^+ = i^- = 0$.



❑ Exemples de montages linéaires

Le montage amplificateur non inverseur

Le montage amplificateur non inverseur (figure a) est étudié avec le modèle de l'ALI idéal.

La rétroaction est sur la borne (–) : le fonctionnement est *a priori* linéaire donc $V^+ = V^-$.

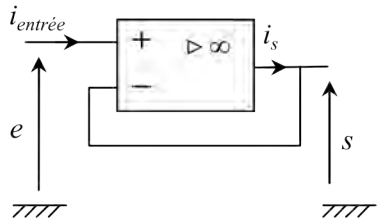
⇨ **Méthode 2.4. L'égalité des tensions d'entrée**

Or $V^+ = e$ et $V^- = R_1 / (R_1 + R_2)\, s$, donc $R_1 / (R_1 + R_2)\, s = e$ soit $H = \dfrac{s}{e} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$.

On retrouve, avec moins de calculs, le même gain qu'avec le modèle linéaire du 1er ordre dans la bande passante. Toutefois, le modèle de l'ALI idéal de gain infini ne permet pas de trouver la fréquence de coupure, ni de démontrer sa stabilité.

D'autre part **la résistance d'entrée** $R_{entrée} = e / i_{entrée}$ du montage **est infinie** car $i_{entrée} = i^+ = 0$ pour e non nul. De plus, **l'impédance de sortie est nulle** car la tension s n'est pas du tout modifiée si l'on place une impédance $\underline{Z}_u$ en sortie de l'ALI. En effet, c'est l'amplificateur opérationnel qui apporte l'intensité nécessaire à l'alimentation de $\underline{Z}_u$ et non pas la source e.

Le suiveur



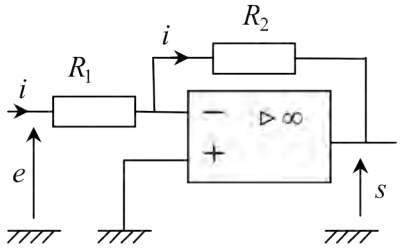
Il y a rétroaction unique sur la borne inverseuse. Le fonctionnement est linéaire, et donc $V^+ = V^-$.

Or $V^+ = e$ et $V^- = s$ donc $\boxed{s = e}$.

D'autre part $i_{entrée} = i^+ = 0$ donc $\boxed{R_{entrée} = e / i_{entrée} = \infty}$.

De plus $\boxed{R_{sortie} = 0}$.

L'inverseur



La rétroaction unique sur la borne inverseuse permet un fonctionnement linéaire : $V^+ = V^-$.

Or $V^+ = 0$ et $V^- = R_2\, e + R_1\, s$.

$V^+ = V^-$ donne $\boxed{H = \dfrac{s}{e} = -\dfrac{R_2}{R_1}}$.

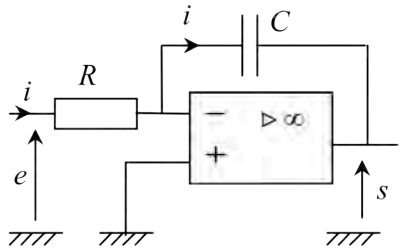
La tension est inversée et multipliée par une constante.

D'autre part $R_{entrée} = e / i = R_1$: l'impédance d'entrée n'est pas très élevée. On perd une des qualités de l'ALI. Par contre **l'impédance de sortie reste nulle**. L'ALI fournit en sortie l'intensité permettant d'alimenter par exemple une impédance $\underline{Z}_u$ branchée en sortie.

L'intégrateur

Il y a rétroaction unique sur la borne inverseuse donc $V^+ = V^-$.

Le même calcul mène à $\boxed{H = \dfrac{s}{e} = -\dfrac{1}{RCp}}$.



La transposition dans le domaine temporel permet d'écrire $RC\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}s(t) = -e(t)$ soit

$\boxed{s(t) = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int_0^t e(t)\,\mathrm{d}t + s_0}$, ce qui réalise l'opération intégration.

De même que pour l'inverseur, $R_{entrée} = R$ et $R_{sortie} = 0$.

❑ Associations en cascade

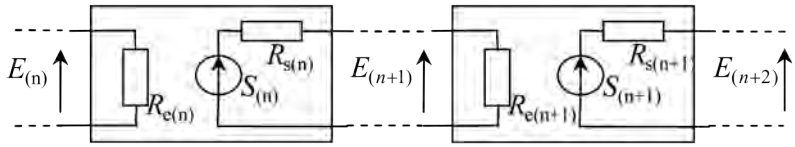
Associons des filtres linéaires en cascade (voir figure ci-après). Chaque filtre (n) est modélisé par une résistance d'entrée $R_{e(n)}$ et un générateur de Thévenin en sortie de f.e.m. $S_{(n)}$ et de résistance de sortie $R_{s(n)}$.

→ Le filtre (n), quand il est seul, ne débite pas de courant en sortie : $H_n = S_{(n)} / E_{(n)}$.

De même pour le filtre (n+1) qui a une fonction de transfert $H_{n+1} = S_{(n+1)} / E_{(n+1)}$.

→ Le filtre (n) quand il est associé en cascade avec un filtre (n+1) a une fonction de transfert $H'_n = E_{(n+1)} / E_{(n)}$, mais *a priori* $E_{(n+1)} \neq S_{(n)}$. **La fonction de transfert du filtre est donc**

modifiée par l'ajout d'un filtre mis en cascade à la suite ! Pour avoir $E_{(n+1)} = S_{(n)}$, il faut soit $R_{s(n)} = 0$, soit ne pas faire circuler de courant dans $R_{s(n)}$ donc avoir $R_{e(n+1)} \to \infty$.



Une grande impédance d'entrée ou une petite impédance de sortie ($R_{e(n+1)} >> R_{s(n)}$) permet l'association en cascade de filtres sans perturber les fonctions de transfert.
C'est le cas de nombreux montages à base d'ALI.

■ Le cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime saturé

❑ Le modèle

L'absence de rétroaction, ou une unique rétroaction positive sature la sortie.
Il y a alors deux saturations possibles :

→ saturation positive : $\boxed{s = +V_{sat} \text{ si } V^+ > V^-}$;

→ saturation négative : $\boxed{s = -V_{sat} \text{ si } V^+ < V^-}$.

❑ Comparateur simple

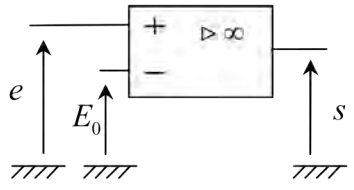
⇨ **Méthode 2.5. Tracé et lecture d'une caractéristique entrée-sortie**

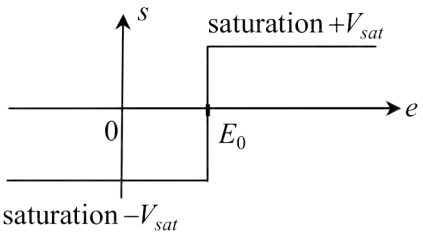
Appliquons directement une tension fixée E_0 sur la borne V^-, et plaçons l'entrée $e(t)$ sur la borne V^+.

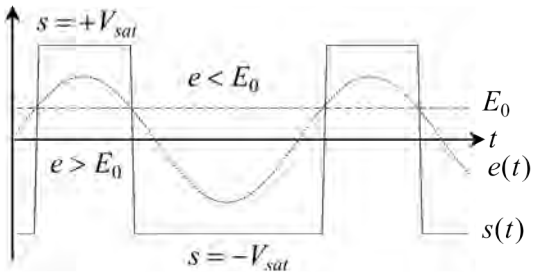
→ il y a saturation positive $s = +V_{sat}$ si $V^+ > V^-$ donc si $e(t) > E_0$;

→ il y a saturation négative $s = -V_{sat}$ si $V^+ < V^-$ donc si $e(t) < E_0$.

Ceci permet de tracer la caractéristique ci-après.
L'application d'un signal purement sinusoïdal en entrée $e(t)$ donne dans ce cas un signal créneau en sortie, donc riche en harmoniques.
L'apparition de nombreuses harmoniques en sortie est caractéristique du comportement non linéaire du montage.

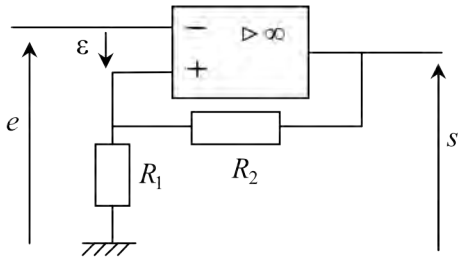






❑ Comparateur à hystérésis inverseur (trigger de Schmidt inverseur)

La rétroaction sur la borne (+) donne une sortie saturée. Il y a donc deux cas possibles :



→ saturation positive $s = +V_{sat}$. Il faut avoir $V^+ > V^-$. Or $V^+ = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \left(+V_{\text{sat}}\right)$ et $V^- = e$.

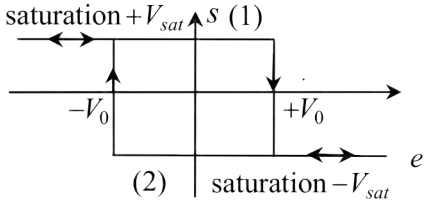
La condition à vérifier est donc :

$$e < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}. \quad (1)$$

→ saturation négative $s = -V_{sat}$. Il faut avoir $V^+ < V^-$. Or $V^+ = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \left(-V_{\text{sat}}\right)$ et $V^- = e$.

La condition est donc $e > -\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$. (2)

On remarque la présence de 2 seuils de basculement différents notés $\pm V_0$ avec $V_0 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$. Les conditions (1) et (2) avec les valeurs de s correspondantes sont placées sur la caractéristique $s(e)$ ci-contre.



➪ **Méthode 2.5. Tracé et lecture d'une caractéristique entrée-sortie**

Remarque

Un montage non linéaire peut admettre plusieurs solutions s pour une entrée e donnée : par exemple, si $e = 0$, s peut être aussi bien égal à $+V_{sat}$ que $-V_{sat}$. Les conditions (1) et (2) sont des conditions nécessaires mais non suffisantes. Supposer par exemple que $s = +V_{sat}$ et vérifier que l'inégalité $V^+ > V^-$ est compatible avec la valeur de e ne prouve pas que la sortie est saturée +, mais simplement que c'est une solution possible.

En pratique, quand il y a 2 solutions possibles, la sortie dépend de l'état antérieur. Lorsque la sortie était précédemment saturée $+V_{sat}$, elle y reste tant que rien ne l'oblige à basculer à $-V_{sat}$. Si une information binaire « 1 » ou « 0 » est associée à chacun de ces deux états, elle est conservée tant que le signal de commande e ne l'oblige pas à changer de valeur. On parle de **fonction mémoire**.

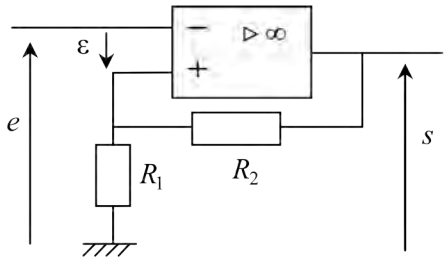
■ Quel modèle doit-on utiliser ? Celui de l'ALI linéaire du 1er ordre ou de l'ALI idéal de gain infini ?

❑ Méthode 2.1. Comprendre ce qu'est un modèle et en connaître ses limites

Le type de modèle à utiliser est généralement indiqué dans l'énoncé… Il est aussi souvent précisé sur le symbole de l'ALI représenté sur le schéma : le symbole ∞ dans la représentation de l'ALI signifie que le gain est infini, donc l'ALI idéal…
Et pourtant, il faut prendre du recul ! Comme dans tous les domaines de la physique, il est important de ne pas appliquer les formules correspondantes à un modèle sans comprendre ce qu'est un modèle, et sans connaître ses limites.
Un modèle est une représentation théorique **simplifiée** d'un phénomène réel complexe. Il décrit correctement la réalité, mais seulement de manière approchée, et uniquement pour **un nombre limité de phénomènes** : cela définit son domaine de validité. Un modèle est généralement associé à **des hypothèses**. Si ces hypothèses sont vérifiées, c'est que l'on est bien dans le domaine de validité. **Il faut donc toujours avoir ces hypothèses en tête** !
Revenons aux 2 modèles de l'ALI proposés. Le plus simple est celui de l'ALI idéal de gain infini. Il demande bien moins de calculs, tout en donnant d'excellents résultats… dans son domaine de validité ! En effet, nous avons vu dans les rappels de cours que les 2 modèles donnent le même gain statique pour l'amplificateur non inverseur à 4 chiffres significatifs (en négligeant 1 devant μ_0, soit un rapport 10^{-5}). Par contre, seul le modèle linéaire du 1er ordre permet d'étudier la stabilité dans les cas incertains, comme en présence de double rétroaction résistive par exemple. Il est également le seul permettant de décrire la perte de gain à trop haute fréquence. Toutefois, le modèle de l'ALI linéaire du 1er ordre a aussi ses propres limites. D'autres modèles plus complexes permettent de décrire les « défauts » de l'ALI, comme les intensités i^+, i^- pas tout à fait nulles, la tension de décalage (offset) en sortie, la chute de gain en $1/\omega^2$ à plus haute fréquence, etc.
En pratique, dans un exercice contenant un montage avec ALI, si rien n'est indiqué dans l'énoncé, on utilisera le modèle de l'ALI idéal de gain infini **à condition de savoir s'il fonctionne en régime linéaire ou saturé** (voir méthode 2.2.) et de ne pas monter à trop haute fréquence. Mais attention aux surprises en travaux pratiques (donc cas réels) : les limites du modèle sont facilement dépassées !

⇨ Exercices 2.2 et 2.5

Prenons l'exemple d'utilisation d'un modèle utilisé avec la mauvaise hypothèse (donc en dehors de son domaine de validité). Repartons du comparateur à hystérésis inverseur en supposant l'ALI idéal de gain infini et un fonctionnement linéaire (ce qui est faux) donc $V^+ = V^-$.



Or $V^+ = R_1 / (R_1 + R_2)s$ et $V^- = e$ donc :

$R_1 / (R_1 + R_2)s = e$ soit $\underline{H} = \underline{s} / \underline{e} = (R_1 + R_2) / R_1$.

On obtient donc un résultat qui semble « mathématiquement » cohérent. Or la mise en pratique de ce montage aboutit systématiquement à une saturation en sortie. La solution que l'on vient de trouver existe mathématiquement mais est une solution instable (comme un équilibre instable en mécanique, pour faire une analogie).

En regardant le résultat $\underline{H}$ obtenu, rien ne permet de déceler l'instabilité ! Il n'est en effet pas possible de *démontrer* son instabilité avec le modèle idéal : il faudrait utiliser le modèle de l'ALI du 1er ordre.

■ Comment savoir si l'ALI fonctionne en régime linéaire ou en régime saturé ?

❑ Méthode 2.2. ALI sans rétroaction, ou avec une seule rétroaction

Dans ce cas, la réponse est immédiate.

→ Sans aucune rétroaction, un ALI ne peut pas fonctionner en régime linéaire. Il sera donc saturé.

→ La présence d'une rétroaction unique sur la borne non inverseuse V^+ déstabilise le montage. La sortie est donc nécessairement saturée.

→ La présence d'une rétroaction unique sur la borne inverseuse V^- rend (en général) stable l'ALI. Celui-ci fonctionne donc en régime linéaire, à condition de ne pas lui demander une tension de sortie supérieure à sa tension de saturation + ou inférieure à sa tension de saturation -.

⇨ **Exercices 2.2, 2.3, 2.4, 2.6 et 2.7**

Ce résultat du cours peut être appliqué tel quel, sans démonstration… sauf si l'énoncé la demande, bien sûr ! Dans ce cas on utilisera la méthode 2.3.