

Jean-Marie Monier | Guillaume Haberer

MATHS

MPSI - MP2I

MÉTHODES & EXERCICES

6^e édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Retrouvez nos ouvrages pour les prépas scientifiques ici



<http://dunod.link/prepassc>

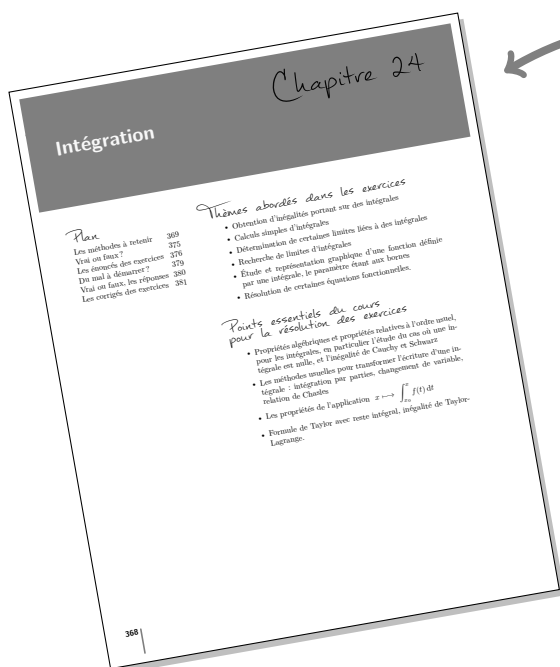
Table des matières

Pour bien utiliser cet ouvrage	vi	17 Arithmétique des polynômes, fractions rationnelles	260
Remerciements	ix	18 Analyse asymptotique	276
1 Raisonnement, vocabulaire ensembliste	1	19 Espaces vectoriels	296
2 Calculs algébriques et trigonométrie	19	20 Espaces vectoriels de dimension finie	308
3 Nombres complexes	37	21 Applications linéaires	319
4 Fonctions d'une variable réelle	54	22 Matrices	334
5 Calcul différentiel élémentaire	68	23 Groupe symétrique, déterminants	350
6 Fonctions usuelles	84	24 Intégration	368
7 Calculs de primitives	101	25 Dénombrements	388
8 Équations différentielles linéaires	120	26 Probabilités sur un univers fini	405
9 Nombres réels, suites numériques	140	27 Variables aléatoires	424
10 Limites, continuité	162	28 Couples de variables aléatoires	441
11 Dérivabilité	177	29 Espaces préhilbertiens réels	467
12 Fonctions convexes	192	30 Séries numériques	484
13 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	202	31 Familles sommables	506
14 Structures algébriques usuelles	215	32 Fonctions de deux variables réelles	522
15 Calcul matriciel et systèmes linéaires	228	Index	546
16 Algèbre des polynômes	245		

Compléments en ligne

Des compléments en ligne, disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage du site de Dunod (<https://dunod.com/EAN/9782100864621>), vous donnent accès à des exercices de colles entièrement corrigés.

Pour bien utiliser cet ouvrage



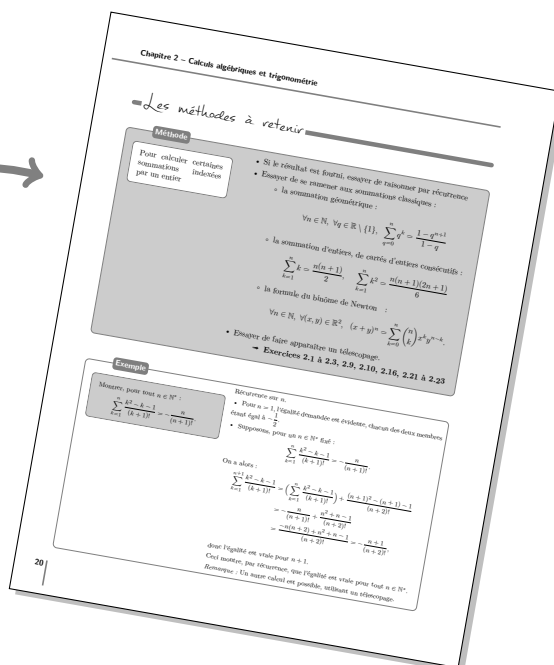
La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

Les méthodes à retenir

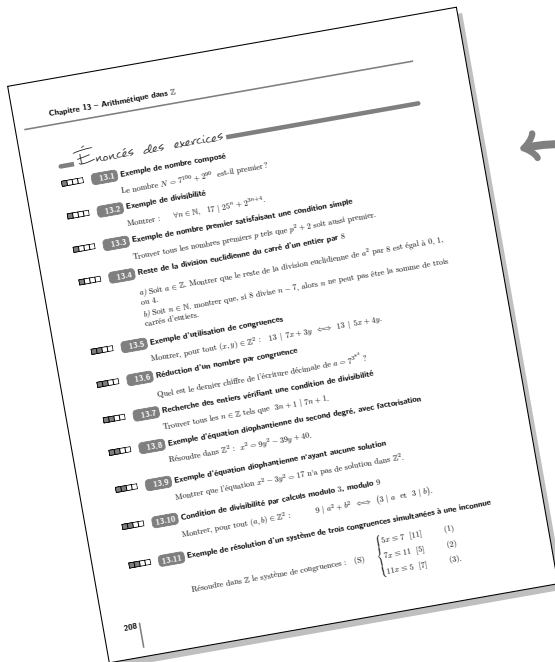
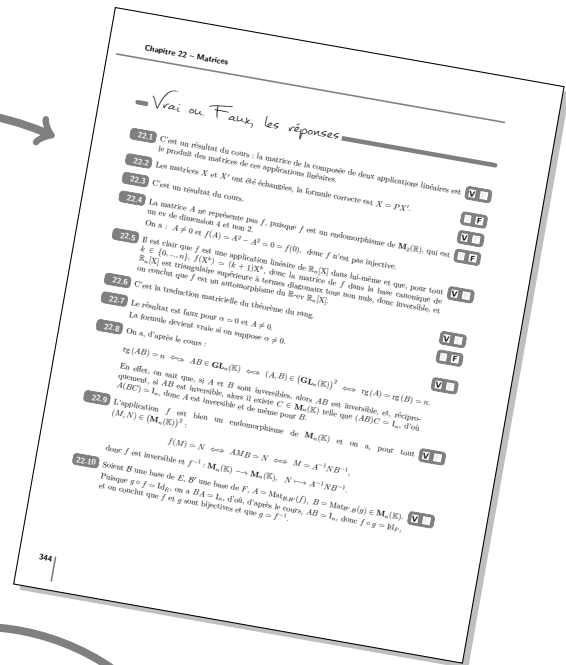
Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



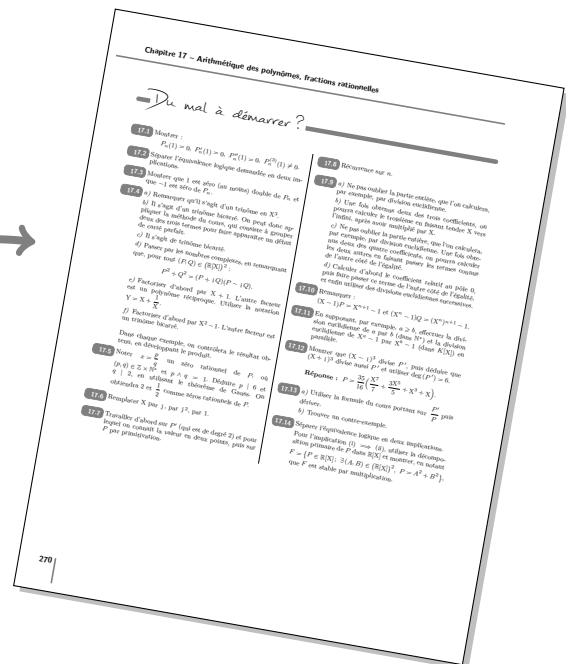
Vrai ou Faux ?

Dix questions pour vérifier la bonne compréhension du cours.



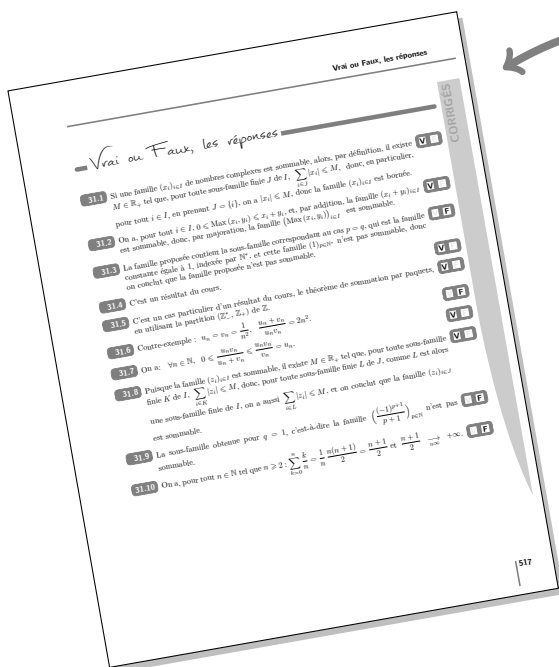
Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.

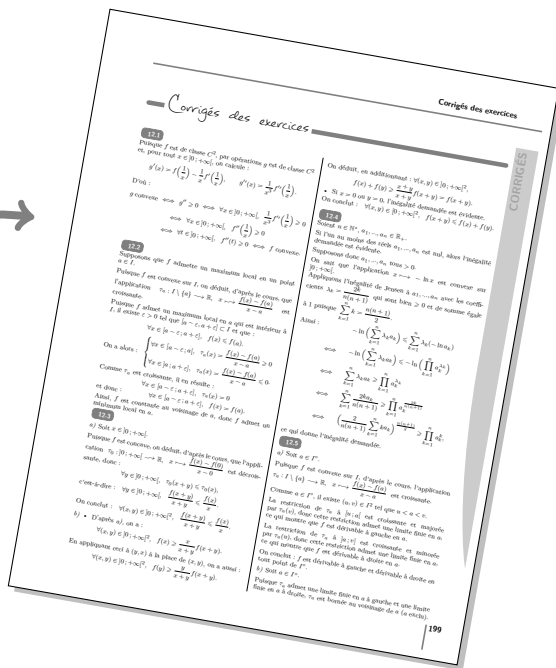


Vrai ou Faux, les réponses

Chaque affirmation vraie est justifiée par une référence au cours ou une courte démonstration, et chaque affirmation fautive est réfutée par la production d'un contre-exemple explicite.

Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.



Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Cécile Lardon, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Chapitre 1

Plan

Les méthodes à retenir	2
Vrai ou faux ?	7
Les énoncés des exercices	8
Du mal à démarrer ?	12
Vrai ou faux, les réponses	13
Les corrigés des exercices	14

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en œuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, $\cap$, $\cup$, complémentaire, $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence, relations d'ordre.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

⇒ **Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.16 à 1.18**

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer :

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Partons du côté apparemment le plus compliqué :

$$\begin{aligned} (A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \\ &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap B \cap \overline{C} \\ &= A \cap (B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (B \setminus C). \end{aligned}$$

Remarque : On pouvait aussi partir du premier membre.

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

⇒ **Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.12, 1.18**

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

On a :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{B \cap C} \\ &= A \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

Exemple

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}; \exists x \in [-1; 2], y = x^2\} = [0; 4].$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1; 2]$ tel que $y = x^2$.

 Si $x \in [-1; 0]$, alors $y \in [0; 1]$.

 Si $x \in [0; 2]$, alors $y \in [0; 4]$.

 On déduit $y \in [0; 4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit $y \in [0; 4]$.

 En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0; 2] \subset [-1; 2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➡ Exercice 1.5

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$, donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\ &= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\ &= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

 donc la formule est vraie pour $n+1$.

 Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

➡ Exercice 1.10

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} = \frac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\frac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n + 2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie (*hérédité*).

⇒ Exercice 1.11

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leq 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 < u_k \leq 1.$$

$$\text{On a alors : } u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n} > \frac{0 + \dots + 0}{n^n} = 0$$

$$\text{et } u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n} \leq \frac{1 + \dots + 1}{n^n} = \frac{n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-1}} \leq 1.$$

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leq 1$.

Méthode

Essayer de :

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.14 (en le redémontrant).

⇒ Exercices 1.3, 1.14, 1.15

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \text{Id}_E$.

Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

★ • *Injectivité* : Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité* : Soit $y \in E$.

On a : $y = (f \circ f)(y) = f(f(y))$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

★ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \text{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \text{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour $f : E \rightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \{y \in F; \exists a \in A, y = f(a)\},$$

$$f^{-1}(A') = \{x \in E; f(x) \in A'\}.$$

Autrement dit :

$$\text{pour tout } y \in F : y \in f(A) \iff (\exists a \in A, y = f(a))$$

$$\text{et, pour tout } x \in E : x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'.$$

→ Exercices 1.16, 1.17

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \rightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.

Montrer :

$$f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}.$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(\overline{A'}) \iff f(x) \in \overline{A'}$$

$$\iff f(x) \notin A'$$

$$\iff \text{Non } (f(x) \in A')$$

$$\iff \text{Non } (x \in f^{-1}(A'))$$

$$\iff x \in \overline{f^{-1}(A')},$$

d'où l'égalité voulue.

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E , est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

• $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

• $\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x)$

• $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z.$

→ Exercice 1.6

Exemple

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \mathcal{R} y \iff |x| = |y|).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

- ★ • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |x|$, d'où $x \mathcal{R} x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
- On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \mathcal{R} y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \mathcal{R} x,$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

- On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \mathcal{R} z,$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$ est :

$$\hat{x} = \{y \in \mathbb{R}; x \mathcal{R} y\} = \{y \in \mathbb{R}; |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E , est une relation d'ordre

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \implies x = y$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z$.

⇒ Exercices 1.9, 1.13

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\leq$ la relation définie dans E par, pour toutes $f, g \in E$:

$$f \leq g \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)).$$

Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre dans E . Cet ordre est-il total ?

- ★ • On a, pour toute $f \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x)$, d'où $f \leq f$, donc $\leq$ est réflexive.

- On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f \leq g \\ g \leq f \end{cases} &\iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f(x) \end{cases} \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)) \iff f = g, \end{aligned}$$

donc $\leq$ est antisymétrique.

- On a, pour toutes $f, g, h \in E$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f \leq g \\ g \leq h \end{cases} &\iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq h(x) \end{cases} \\ &\implies (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq h(x)) \iff f \leq h, \end{aligned}$$

donc $\leq$ est transitive.

Ceci montre que $\leq$ est une relation d'ordre dans E .

- ★ Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$.

On a $f(1) = 0 < 1 = g(1)$, donc on n'a pas $g \leq f$.

On a $f(1) = 0 > -1 = g(-1)$, donc on n'a pas $f \leq g$.

On conclut que l'ordre $\leq$ sur E n'est pas total.

Vrai ou Faux ?

1.1 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E , on a : $A \cap B = \emptyset \iff B \subset \overline{A}$.

V F

1.2 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E , on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

V F

1.3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$.

V F

1.4 $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$.

V F

1.5 Si les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective.

V F

1.6 Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives.

V F

1.7 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = \text{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

V F

1.8 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \text{Id}_E$.

V F

1.9 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E .
On a alors :

V F

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

1.10 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E .
On a alors :

V F

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Énoncés des exercices



1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

- a) Montrer : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.
- b) Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.



1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$



1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.

- a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a , n'ayant pas d'image par f .
- b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b , n'ayant pas d'antécédent par f .
- c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g .



1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?



1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a) \quad L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$$

$$b) \quad \sum_{k=0}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$$

$$c) \quad L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n \quad \text{et} \quad L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n.$$



1.6 Exemple de relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \mathcal{R} y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y).$$

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.
- Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.



1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E , B_1, B_2 des parties de F .

- Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
- 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.
2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?



1.8 Équivalence entre trois assertions faisant intervenir des différences ensemblistes

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$(1) \quad A \setminus B = A, \quad (2) \quad B \setminus A = B, \quad (3) \quad A \cap B = \emptyset.$$



1.9 Exemple de relation d'ordre sur les entiers

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $x \mathcal{R} y \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n)$.

- Montrer que $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$.
- Est-ce que $\mathcal{R}$ est total ?



1.10 Exemple de raisonnement par récurrence à deux pas

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.



1.11 Exemple de raisonnement par récurrence forte

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.



1.12 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction indicatrice de A est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \mapsto \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

On note $\mathbf{1}$ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0, 1\}$ constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A,$$

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $A \cap (A \cup B) = A$ et $A \cup (A \cap B) = A$.



1.13 Exemple de relation d'ordre sur un ensemble de suites réelles

On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$ et on note $\mathcal{R}$ la relation définie dans E par, pour tout $(u, v) \in E^2$, $u \mathcal{R} v$ si et seulement si $v - u$ est croissante.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E .

b) L'ordre $\mathcal{R}$ est-il total ?

c) Montrer : $\forall (u, v) \in E^2, (u \mathcal{R} v \implies u \leq v)$.

d) A-t-on : $\forall (u, v) \in E^2, (u \leq v \implies u \mathcal{R} v)$?



1.14 Composée injective, composée surjective

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Montrer :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.



1.15 Applications : composition, injectivité, surjectivité

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications.

a) Montrer que, si $f \circ g \circ f = f$ et si f est injective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f \circ g = g$ et si g est surjective, alors f est injective.



1.16 Images directes de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A, B de E :

a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b) $A \subset f^{-1}(f(A))$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

**1.17 Images réciproques de parties par une application**

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A', B' de E :

- a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
- b) $f(f^{-1}(A')) \subset A'$
- c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
- d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

**1.18 Différence symétrique, associativité**

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de A et B .

a) *Deux exemples* : Déterminer $A \triangle B$ dans les deux exemples suivants :

- 1) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$
- 2) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [1; +\infty[$.

b) Établir : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

c) Montrer, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$: $\mathbf{1}_{A \triangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

d) En déduire que la loi $\triangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3, (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Du mal à démarrer?

- 1.1 a) Utiliser la distributivité de $\cap$ sur $\cup$.
b) Séparer l'équivalence logique en deux implications.

1.2 *Première méthode :*

Raisonnement par équivalences logiques en passant aux complémentaires.

Deuxième méthode :

Supposer $A \cup B = A \cup C$.

★ Partir d'un élément quelconque x de $A \cup \overline{B}$ et raisonner par l'absurde, pour déduire $x \in A \cup \overline{C}$.

★ L'autre inclusion s'en déduit en échangeant B et C .

- 1.3 a) $a = 2$. b) $b = 3$.
c) À partir de $y = f(x)$, calculer x en fonction de y .

- 1.4 Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$, et trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que ces deux résultats soient différents.

- 1.5 Récurrence (faible) sur n , pour chacune des trois questions.
Pour c), utiliser a).

- 1.6 a) Revenir à la définition d'une relation d'équivalence.
Noter $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2x$, pour la commodité.
b) Revenir à la définition de la classe d'équivalence $\hat{x}$ de x modulo $\mathcal{R} : \forall y \in \mathbb{R}, (y \in \hat{x} \iff x \mathcal{R} y)$.

- 1.7 a) Raisonnement par équivalences logiques successives, en partant de $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.
b) 1) Même méthode qu'en a).
2) Envisager un élément de $A_1 \times B_2$.

- 1.8 Raisonnement par équivalences logiques successives en utilisant, entre autres : $A \subset \overline{B} \iff A \cap B = \emptyset$.

- 1.9 a) Revenir à la définition d'une relation d'ordre.
b) Envisager les éléments 1 et 2 de $\mathbb{N}^*$, par exemple.

- 1.10 Récurrence à deux pas sur n .

- 1.11 Récurrence forte sur n .

- 1.12 a) • Un sens est évident.

Réciproquement, supposer $1_A = 1_B$ et partir d'un élément quelconque a de A , pour montrer $A \subset B$.

- Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A$, $x \notin A$.
- Pour $x \in E$, séparer encore en cas : $x \in A \cap B$, $x \notin A \cap B$.
- Passer aux complémentaires à partir du résultat précédent.

- Utiliser les résultats précédents.

- b) Calculer $1_{A \cap (A \cup B)}$ et $1_{A \cup (A \cap B)}$.

- 1.13 a) Revenir à la définition d'une relation d'ordre.

- b) Envisager u et v de façon que $v - u$ ne soit pas monotone.

- c) Remarquer que, si $u \mathcal{R} v$, alors $v - u$ est croissante et $u_0 = v_0$.

- d) Envisager u, v de façon que $v \geq u$ et que $v - u$ ne soit pas croissante.

- 1.14 a) Revenir aux définitions.

- b) Revenir aux définitions.

- c) Se déduit directement de a) et b).

- 1.15 a) Partir d'un élément x de E , considérer $f(x)$ et déduire $x = g(f(x))$.

- b) Partir de $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, utiliser la surjectivité de g , puis $g = g \circ f \circ g$, et déduire $x_1 = x_2$.

- 1.16 a) Supposer $A \subset B$.

Partir d'un élément quelconque y de $f(A)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f .

- b) Partir de $a \in A$ et utiliser les définitions.

- c) • Montrer, en utilisant a) :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

- Réciproquement, partir de $y \in f(A \cup B)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f .

- d) Utiliser a).

- 1.17 a) Supposer $A' \subset B'$.

Partir d'un élément quelconque x de $f^{-1}(A')$ et utiliser la définition de l'image réciproque d'une partie de F par f .

- b) Partir de $y \in f(f^{-1}(A'))$ et utiliser les définitions.

- c) Raisonnement par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ et en appliquant les définitions.

- d) Raisonnement par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ et en appliquant les définitions.

- 1.18 a) **Réponses :**

1) $A \triangle B = \{2, 3\}$,

2) $A \triangle B =] - \infty; 1[\cup]2; +\infty[$.

- b) Calculer $A \triangle B$ d'après sa définition, en utilisant les formules sur le calcul sur les ensembles.

- c) Utiliser b) et les formules sur les fonctions caractéristiques (cf. Exercice 1.12).

En particulier, pour tous ensembles X, Y :

$$\begin{aligned} 1_{\overline{X}} &= 1 - 1_X, & 1_{X \cap Y} &= 1_X 1_Y, \\ 1_{X \cup Y} &= 1_X + 1_Y - 1_X 1_Y. \end{aligned}$$

d) Calculer les fonctions caractéristiques des deux membres.

Vrai ou Faux, les réponses

1.1 $B \subset \overline{A} \iff (\forall x \in B, x \notin A) \iff (\text{Non} (\exists x \in B, x \in A))$
 $\iff (\text{Non} (A \cap B \neq \emptyset)) \iff A \cap B = \emptyset.$

V F

1.2 Contre-exemple : $E = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
 La formule correcte est : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

V F

1.3 Par exemple, $y = x + 1$.

V F

1.4 Il n'existe pas de réel y fixé plus grand que tout réel x .

V F

1.5 C'est un résultat du cours.

V F

1.6 Contre-exemple : $E = F = G = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto e^x$, $g : y \mapsto |y|$.
 On a alors $g \circ f : x \mapsto |e^x| = e^x$, $g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas.

V F

1.7 L'application f est injective, car, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, donc $x_1 = x_2$.

V F

L'application f est surjective car, pour tout $y \in E$, on a $y = f(f(y))$.

Il en résulte que f est bijective, puis, en composant à gauche par f^{-1} , on obtient $f = f^{-1}$.

1.8 Contre-exemple : $E = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$.

V F

1.9 Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a alors $x \in A$ d'où $f(x) \in A$, ou $x \in B$ d'où $f(x) \in f(B)$, et donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. On obtient $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

V F

Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(B)$. On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, d'où $x \in A \cup B$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, on déduit $y \in f(A \cup B)$. On obtient $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Par double inclusion, on conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1.10 Contre-exemple : $E = F = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = \mathbb{R}_-$, $B = \mathbb{R}_+$.

V F

On a alors : $A \cap B = \{0\}$, $f(A \cap B) = \{0\}$, $f(A) = \mathbb{R}_+$, $f(B) = \mathbb{R}_+$, $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

Corrigés des exercices

1.1

a) On a, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = \underbrace{(A \cap C)}_{\subset A} \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

b) • Supposons $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Soit $x \in A$.

Alors, $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, donc $x \in C$.

Ceci montre : $A \subset C$.

• Réciproquement, supposons $A \subset C$.

On a alors, par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$(A \cup B) \cap C = \underbrace{(A \cap C)}_{=A} \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

On conclut qu'il y a égalité dans l'inclusion obtenue en a) si et seulement si $A \subset C$.

1.2

En appliquant la première implication avec $(\overline{B}, \overline{C})$ à la place de (B, C) , on obtient la seconde implication.

Il suffit donc de montrer la première implication.

• Première méthode : par les ensembles, globalement

On a :

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup C \\ \Rightarrow \overline{A \cup B} &= \overline{A \cup C} \\ \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} &= \overline{A} \cap \overline{C} \\ \Rightarrow A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\ \Rightarrow (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\ \Rightarrow A \cup \overline{B} &= A \cup \overline{C}. \end{aligned}$$

• Deuxième méthode, par les éléments

On suppose $A \cup B = A \cup C$.

★ Soit $x \in A \cup \overline{B}$. Alors $x \in A$ ou $x \in \overline{B}$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cup \overline{C}$.

Supposons $x \notin A$, donc $x \in \overline{B}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $x \notin A \cup \overline{C}$.

Alors, $x \in \overline{A \cup \overline{C}} = \overline{A} \cap C$, donc $x \in C$,

puis $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cup B$, contradiction avec $x \notin A$ et $x \notin B$.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $x \in A \cup \overline{C}$, et on a donc établi l'inclusion $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$.

★ Par rôles symétriques de B et C dans l'égalité d'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on a alors aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité.

1.3

a) Il est clair que : $a = 2$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff xy - 2y = 3x - 1 \\ &\iff xy - 3x = 2y - 1 \iff (y-3)x = 2y - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Si } y \neq 3, \text{ on a : } y = f(x) \iff x = \frac{2y-1}{y-3}$$

donc y admet un antécédent et un seul par f , qui est $\frac{2y-1}{y-3}$.

Si $y = 3$, alors : $y = f(x) \iff 0x = 5$,

donc y n'a pas d'antécédent par f .

Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f .

c) L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $x \mapsto \frac{3x-1}{x-2}$

est la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ à l'arrivée.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{3\})$:

$$y = g(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$

Ainsi, tout élément y de l'arrivée admet un antécédent et un seul par g , donc g est bijective, et l'application réciproque de g est : $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y \mapsto \frac{2y-1}{y-3}$.

1.4

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 + x^2 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2. \end{cases}$$

• Par exemple : $(f \circ g)(1) = 2$ et $(g \circ f)(1) = 4$, donc : $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5

a) • Initialisation :

Pour $n = 0$, on a :

$$L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = L_1^2 - L_0 L_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$$

et $5(-1)^{n+1} = -5$,

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } & L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+3} \\ &= L_{n+2}^2 - L_{n+1} (L_{n+2} + L_{n+1}) \\ &= (L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+2}) - L_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= L_{n+2}(L_{n+2} - L_{n+1}) - L_{n+1}^2 \\
 &= L_{n+2}L_n - L_{n+1}^2 \\
 &= -(L_{n+1}^2 - L_nL_{n+2}) \\
 &= -(5(-1)^{n+1}) = 5(-1)^{n+2},
 \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n , que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • *Initialisation* :

Pour $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_0^2 = 2^2 = 4,$$

et :

$$L_n L_{n+1} + 2 = L_0 L_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4,$$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \left(\sum_{k=0}^n L_k^2 \right) + L_{n+1}^2 \\
 &= (L_n L_{n+1} + 2) + L_{n+1}^2 \\
 &= (L_n L_{n+1} + L_{n+1}^2) + 2 \\
 &= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) + 2 = L_{n+1}L_{n+2} + 2,
 \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n , que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) • *Initialisation* :

Pour $n = 0$:

$$\begin{cases} L_{2n} = L_0 = 2 \\ L_n^2 - 2(-1)^n = 2^2 - 2 = 2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} L_{2n+1} = L_1 = 1 \\ L_n L_{n+1} - (-1)^n = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \end{cases}$$

donc la formule (système de deux formules) est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 L_{2n+2} &= L_{2n+1} + L_{2n} \\
 &= (L_n L_{n+1} - (-1)^n) + (L_n^2 - 2(-1)^n) \\
 &= (L_n L_{n+1} + L_n^2) - 3(-1)^n \\
 &= L_n(L_{n+1} + L_n) - 3(-1)^n \\
 &= L_n L_{n+2} - 3(-1)^n \\
 &= (L_{n+1}^2 - 5(-1)^{n+1}) - 3(-1)^n \\
 &= L_{n+1}^2 + 2(-1)^n \\
 &= L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1} \\
 \text{et} \quad L_{2n+3} &= L_{2n+2} + L_{2n+1} \\
 &= (L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}) + (L_n L_{n+1} - (-1)^n) \\
 &= L_{n+1}(L_{n+1} + L_n) - (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$= L_{n+1}L_{n+2} - (-1)^{n+1},$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n , que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6

a) Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 - 2x$.

1) *Réflexivité* :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)$, donc $x \mathcal{R} x$.

2) *Symétrie* :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \mathcal{R} y$.

On a alors $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$, d'où $y \mathcal{R} x$.

3) *Transitivité* :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$.

On a alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, donc $f(x) = f(z)$, d'où $x \mathcal{R} z$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Notons $\hat{x}$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $y \in \hat{x}$

$$\begin{aligned}
 &\iff x \mathcal{R} y \\
 &\iff x^2 - 2x = y^2 - 2y \\
 &\iff x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \\
 &\iff (x - y)(x + y - 2) = 0 \\
 &\iff (y = x \text{ ou } y = 2 - x).
 \end{aligned}$$

On conclut : $\hat{x} = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x = 1 \\ \{x, 2 - x\} & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

Il en résulte que $\hat{x}$ est de cardinal 1 si $x = 1$, de cardinal 2 si $x \neq 1$.

1.7

a) On a, pour tout $(a, b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned}
 &(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\
 &\iff ((a, b) \in A_1 \times B_1 \text{ et } (a, b) \in A_2 \times B_2) \\
 &\iff (a \in A_1 \text{ et } b \in B_1) \text{ et } (a \in A_2 \text{ et } b \in B_2) \\
 &\iff (a \in A_1 \text{ et } a \in A_2) \text{ et } (b \in B_1 \text{ et } b \in B_2) \\
 &\iff (a \in A_1 \cap A_2 \text{ et } b \in B_1 \cap B_2) \\
 &\iff (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),
 \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) On a, pour tout $(a, b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned}
 &(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) \\
 &\iff ((a, b) \in A_1 \times B_1 \text{ ou } (a, b) \in A_2 \times B_1) \\
 &\iff ((a \in A_1 \text{ ou } a \in A_2) \text{ et } b \in B_1) \\
 &\iff (a \in A_1 \cup A_2 \text{ et } b \in B_1) \\
 &\iff (a, b) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1,
 \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) L'ensemble $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ contient, entre autres, les couples (a, b) où $a \in A_1$ et $b \in B_2$, et ces couples ne sont pas nécessairement dans $A_1 \times B_1$ ou $A_2 \times B_2$.

Donnons un contre-exemple.

Notons $E = F = \{0, 1\}$, $A_1 = B_1 = \{0\}$, $A_2 = B_2 = \{0, 1\}$.

On a alors : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(0, 0)\} \cup \{(1, 1)\}$

et $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
 $= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Ainsi, $(0, 1)$ est dans le premier ensemble et non dans le second.

On conclut qu'en général il n'y a pas égalité entre les deux ensembles envisagés.

1.8

On a :

$A \setminus B = A \iff A \cap \overline{B} = A \iff A \subset \overline{B} \iff A \cap B = \emptyset$,

et, de même :

$B \setminus A = B \iff B \cap \overline{A} = B \iff B \subset \overline{A} \iff B \cap A = \emptyset$,

d'où les équivalences logiques entre les trois assertions.

1.9

a) 1) *Réflexivité* :

On a, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $x \mathcal{R} x$, car $x = x^1$.

2) *Antisymétrie* :

Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$.

Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $x = y^p$.

On a $x \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $x \geq 1$ et $n \geq 0$, d'où $x^n \geq x$, donc $y = x^n \geq x$.

De même, $x \geq y$, et on déduit $x = y$.

3) *Transitivité* :

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$.

Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $z = y^p$.

On a alors : $z = y^p = (x^n)^p = x^{np}$ et $np \in \mathbb{N}^*$, donc $x \mathcal{R} z$.

On conclut : $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) On n'a ni $1 \mathcal{R} 2$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 = 1^n$, ni $2 \mathcal{R} 1$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 = 2^n$.

On conclut : $\mathcal{R}$ n'est pas total.

1.10

Puisque u_{n+2} est donné en fonction de u_{n+1} et de u_n , on va effectuer une récurrence à deux pas.

• *Initialisation* :

Pour $n = 0$, on a $u_1 > u_0$, car $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

Pour $n = 1$, on a $u_2 > u_1$,

car $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

• *Hérédité* :

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_{n+1} > u_n$ et $u_{n+2} > u_{n+1}$. On a alors :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{2} + 1 > \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1 = u_{n+2}.$$

Ceci montre, par récurrence à deux pas sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n.$$

On conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

1.11

Puisque u_{n+1} est donné (entre autres) en fonction de $u_0, \dots, u_n$, on va effectuer un raisonnement par récurrence forte.

• *Initialisation* :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$.

• *Hérédité* :

Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Comme $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!(n-k)!}$, que $u_0, \dots, u_n$ sont dans $\mathbb{Q}_+^*$ et que $0!, 1!, \dots, n!$ sont dans $\mathbb{N}^*$, par opérations, on déduit : $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$.

On conclut, par récurrence forte sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.12

a) • Il est clair que, si $A = B$, alors $1_A = 1_B$.

Réciproquement, supposons $1_A = 1_B$.

Pour tout $a \in A$, on a $1_B(a) = 1_A(a) = 1$, donc $a \in B$, ce qui montre $A \subset B$, puis, de même, $B \subset A$, donc $A = B$.

On conclut : $A = B \iff 1_A = 1_B$.

Autrement dit, la connaissance de 1_A détermine entièrement A .

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$, donc $1_A(x) = 1$ et $1_{\overline{A}}(x) = 0$, d'où $1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$

si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$, donc $1_A(x) = 0$ et $1_{\overline{A}}(x) = 1$, d'où $1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad 1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$.

On conclut : $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$.

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $1_{A \cap B}(x) = 1$, $1_A(x) = 1$, $1_B(x) = 1$, d'où $1_{A \cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x)$

si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $1_{A \cap B}(x) = 0$ et $(1_A(x) = 0 \text{ ou } 1_B(x) = 0)$, d'où $1_{A \cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \quad 1_{A \cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x)$.

On conclut : $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$.

• On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned} 1_{A \cup B} &= 1 - 1_{\overline{A \cup B}} \\ &= 1 - 1_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\ &= 1 - 1_{\overline{A}} 1_{\overline{B}} \\ &= 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B) \\ &= 1 - (1 - 1_A - 1_B + 1_A 1_B) \\ &= 1_A + 1_B - 1_A 1_B. \end{aligned}$$

• On a :

$$1_{A \setminus B} = 1_{A \cap \bar{B}} = 1_A 1_{\bar{B}} = 1_A(1 - 1_B) = 1_A - 1_A 1_B.$$

b) On a, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} 1_{A \cap (A \cup B)} &= 1_A 1_{A \cup B} = 1_A(1_A + 1_B - 1_A 1_B) \\ &= 1_A + 1_A 1_B - 1_A 1_B = 1_A, \end{aligned}$$

donc, d'après a) : $A \cap (A \cup B) = A$.

De même :

$$\begin{aligned} 1_{A \cup (A \cap B)} &= 1_A + 1_{A \cap B} - 1_A 1_{A \cap B} \\ &= 1_A + 1_A 1_B - 1_A 1_B = 1_A, \end{aligned}$$

donc, d'après a) : $A \cup (A \cap B) = A$.

On peut aussi remarquer que, puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \cap (A \cup B) = A$, et que, puisque $A \cap B \subset A$, on a $A \cup (A \cap B) = A$.

1.13

a) 1) *Réflexivité* :

Soit $u \in E$. On a $u - u = 0$ croissante, donc $u \mathcal{R} u$.

2) *Antisymétrie* :

Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $u \mathcal{R} v$ et $v \mathcal{R} u$.

Alors, $v - u$ est croissante et $u - v$ est croissante, donc $v - u$ est constante, et puisque $u_0 = 0 = v_0$, on déduit $v - u = 0$, $u = v$.

3) *Transitivité* :

Soit $(u, v, w) \in E^3$ tel que $u \mathcal{R} v$ et $v \mathcal{R} w$.

Alors, $v - u$ est croissante et $w - v$ est croissante, donc, par addition, $w - u = (w - v) + (v - u)$ est croissante, donc $u \mathcal{R} w$. On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E .

b) Pour montrer que l'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total, il suffit de trouver $u, v \in E$ telles que $v - u$ et $u - v$ ne soient pas croissantes, c'est-à-dire telles que $v - u$ ne soit pas monotone.

Il est clair que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 0$ et $v_n = 1 - (-1)^n$ conviennent. On conclut que l'ordre $\mathcal{R}$ n'est pas total.

c) Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $u \mathcal{R} v$.

Alors, $v - u$ est croissante et $v_0 - u_0 = 0 - 0 = 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u \leq v$.

d) Donnons un contreexemple, dans lequel $u \leq v$ et non $u \mathcal{R} v$. Il suffit de trouver $u, v \in E$ telles que $v - u \geq 0$ et que $v - u$ ne soit pas croissante.

L'exemple donné dans la solution de la question b), $u_n = 0$, $v_n = 1 - (-1)^n$, convient.

1.14

a) Supposons $g \circ f$ injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors :

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Puisque $g \circ f$ est injective, il s'ensuit : $x_1 = x_2$.

On conclut que f est injective.

b) Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que : $z = g \circ f(x)$.

On a alors : $z = g(f(x))$ et $f(x) \in F$.

Ceci montre : $\forall z \in G, \exists y \in F, z = g(y)$.

On conclut que g est surjective.

c) Si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est injective et surjective, donc, d'après a) et b), f est injective et g est surjective.

1.15

a) On suppose $f \circ g \circ f = f$ et f injective.

Soit $x \in E$.

On a : $f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = f(g \circ f(x))$.

Comme f est injective, on déduit :

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Cela montre que g est surjective.

b) On suppose $g \circ f \circ g = g$ et g surjective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Puisque g est surjective, il existe $y_1, y_2 \in F$ tels que :

$$x_1 = g(y_1) \quad \text{et} \quad x_2 = g(y_2).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x_1 = g(y_1) &= (g \circ f \circ g)(y_1) = g(f(g(y_1))) = g(f(x_1)) \\ &= g(f(x_2)) = (g \circ f \circ g)(y_2) = g(y_2) = x_2, \end{aligned}$$

et on conclut que f est injective.

1.16

a) Supposons $A \subset B$.

Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.

Comme $a \in A \subset B$, on a $a \in B$, puis $y = f(a) \in f(B)$.

On obtient : $f(A) \subset f(B)$.

b) Soit $a \in A$. On a : $f(a) \in f(A)$, donc par définition d'une image réciproque, $a \in f^{-1}(f(A))$.

On conclut : $A \subset f^{-1}(f(A))$.

c) • En utilisant a) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} &\implies \begin{cases} f(A) \subset f(A) \cup f(B) \\ f(B) \subset f(A) \cup f(B) \end{cases} \\ &\implies f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B). \end{aligned}$$

• Soit $y \in f(A \cup B)$.

Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

On a : $x \in A$ ou $x \in B$.

Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$.

Si $x \in B$, alors $f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On a donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Ceci montre : $\forall (A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

On conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) En utilisant a) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} &\implies \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases} \\ &\implies f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

1.17

a) Supposons $A' \subset B'$.

Soit $x \in f^{-1}(A')$.

On a $f(x) \in A'$, donc $f(x) \in B'$, puis $x \in f^{-1}(B')$.

On conclut : $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

b) Soit $y \in f(f^{-1}(A'))$.

Il existe $x \in f^{-1}(A')$ tel que $y = f(x)$.

Puis, comme $x \in f^{-1}(A')$, on a $f(x) \in A'$, donc $y \in A'$.

On conclut : $f(f^{-1}(A')) \subset A'$.

c) On a, pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(A' \cup B')$$

$$\iff f(x) \in A' \cup B'$$

$$\iff (f(x) \in A' \text{ ou } f(x) \in B')$$

$$\iff (x \in f^{-1}(A') \text{ ou } x \in f^{-1}(B'))$$

$$\iff x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B').$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

d) On a, pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(A' \cap B')$$

$$\iff f(x) \in A' \cap B'$$

$$\iff (f(x) \in A' \text{ et } f(x) \in B')$$

$$\iff (x \in f^{-1}(A') \text{ et } x \in f^{-1}(B'))$$

$$\iff x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B').$$

On conclut : $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.18

a) 1) Pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, on a :

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{1\},$$

$$\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4\}, \quad A \Delta B = \{2, 3\}.$$

2) Pour $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [1; +\infty[$, on a :

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = [1; 2],$$

$$\overline{A \cap B} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[, \quad A \Delta B =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[.$$

b) On a, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}). \end{aligned}$$

c) On a, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$:

$$\begin{aligned} 1_{A \Delta B} &= 1_{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = 1_A 1_{\overline{B}} + 1_B 1_{\overline{A}} - \underbrace{1_A 1_{\overline{B}} 1_B 1_{\overline{A}}}_{=0} \\ &= 1_A(1 - 1_B) + 1_B(1 - 1_A) = 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A 1_B. \end{aligned}$$

d) Soit $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. On a :

$$\begin{aligned} 1_{(A \Delta B) \Delta C} &= 1_{A \Delta B} + 1_C - 2 \cdot 1_{A \Delta B} 1_C \\ &= (1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A 1_B) + 1_C - 2 \cdot (1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A 1_B) 1_C \\ &= 1_A + 1_B + 1_C - 2(1_A 1_B + 1_A 1_C + 1_B 1_C) + 4 \cdot 1_A 1_B 1_C. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} 1_{A \Delta (B \Delta C)} &= 1_A + 1_{B \Delta C} - 2 \cdot 1_A 1_{B \Delta C} \\ &= 1_A + (1_B + 1_C - 2 \cdot 1_B 1_C) - 2 \cdot 1_A(1_B + 1_C - 2 \cdot 1_B 1_C) \\ &= 1_A + 1_B + 1_C - 2(1_A 1_B + 1_A 1_C + 1_B 1_C) + 4 \cdot 1_A 1_B 1_C. \end{aligned}$$

Ceci montre : $1_{(A \Delta B) \Delta C} = 1_{A \Delta (B \Delta C)}$.

On déduit : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,

et on conclut que la loi Δ est associative dans $\mathcal{P}(E)$.

Calculs algébriques et trigonométrie

Chapitre 2

Plan

Les méthodes à retenir	20
Vrai ou faux ?	25
Les énoncés des exercices	26
Du mal à démarrer ?	29
Vrai ou faux, les réponses	30
Les corrigés des exercices	31

Thèmes abordés dans les exercices

- Calculs de sommations simples ou doubles, de produits simples ou doubles
- Manipulation des coefficients binomiaux, obtention d'égalités et calculs de sommes les faisant intervenir
- Résolution de systèmes linéaires
- Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés du symbole $\sum$ pour une sommation d'un nombre fini de termes, et du symbole $\prod$ pour un produit d'un nombre fini de facteurs
- Règles de calcul élémentaire sur les nombres entiers, sur les nombres réels
- Sommations usuelles : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n q^k$
- Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition et propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$, en particulier :
 - l'expression à l'aide de factorielles $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$,
 - la formule fondamentale $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$,
 - la formule du binôme de Newton
- Opérations élémentaires, méthode du pivot
- Définition et propriétés de $\sin, \cos, \tan$, formules de trigonométrie.