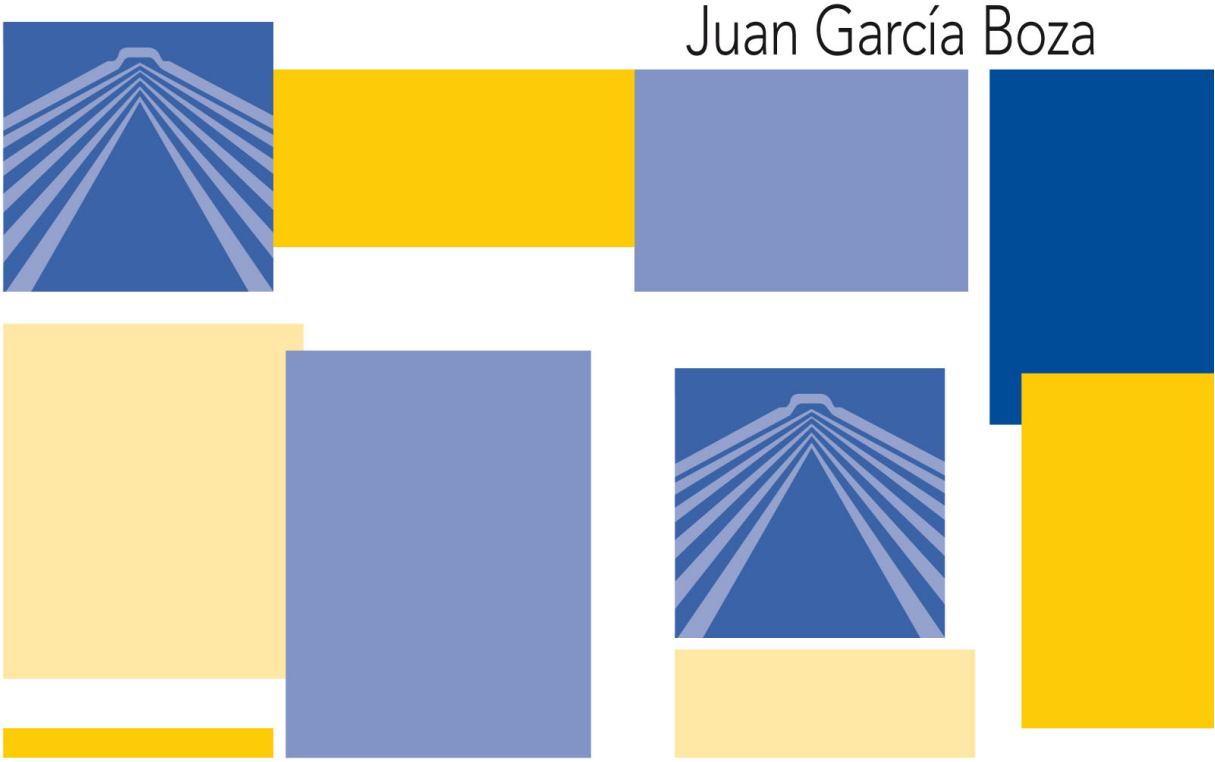
Adaptado EEES

Inversiones financieras: selección de carteras

Teoría y práctica

Incluye material descargable en www.edicionespiramide.es

Juan García Boza



PIRÁMIDE

Inversiones financieras:
selección de carteras
Teoría y práctica

JUAN GARCÍA BOZA

CATEDRÁTICO DE ECONOMÍA FINANCIERA Y CONTABILIDAD
DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Inversiones financieras: selección de carteras

Teoría y práctica

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «ECONOMÍA Y EMPRESA»

Director:
Miguel Santesmases Mestre
Catedrático de la Universidad de Alcalá

Edición en versión digital

Está prohibida la reproducción total o parcial de este libro electrónico, su transmisión, su descarga, su descompilación, su tratamiento informático, su almacenamiento o introducción en cualquier sistema de repositorio y recuperación, en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, conocido o por inventar, sin el permiso expreso escrito de los titulares del copyright.

© Juan García Boza, 2013
© Primera edición electrónica publicada por Ediciones Pirámide (Grupo Anaya, S. A.), 2013
Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-2837-5

A Ana Rosa, Esther y Jorge,
mi esposa e hijos

Índice

Prólogo 13

1. Conceptos básicos 17

1.1. Inversiones financieras 18
1.2. Gestión y administración de carteras 19
1.3. Medidas de la rentabilidad de un título 20
1.4. Medida del riesgo y de la correlación entre los títulos 33
Anexos 43
Anexo I: El operador *SIGMA* 44
Anexo II: Conceptos básicos sobre matrices 49
Anexo III: La herramienta *SOLVER* de Excel 61

2. Introducción a la selección de carteras 73

2.1. Introducción 74
2.2. Carteras: concepto y clases 75
2.3. Fases de la selección de carteras 75
2.4. Análisis de los activos 76
2.5. Los datos estadísticos para el análisis 82
2.5.1. Estimación con datos históricos 83
2.5.2. Previsión subjetiva 90
2.5.3. Otros métodos de estimación 98
2.6. La hipótesis de normalidad de la rentabilidad 98

3. Modelo de selección de carteras de Markowitz 107

3.1. Hipótesis 108
3.2. La rentabilidad esperada de las carteras 109

© Ediciones Pirámide

3.2.1. Carteras con *n* clases de activos 109
3.2.2. Carteras con dos clases de activos 124
3.3. El riesgo de las carteras 127
3.3.1. Carteras con *n* clases de activos 127
3.3.2. Carteras con dos clases de activos 154
3.4. La diversificación del riesgo 158
3.4.1. Carteras con *n* clases de activos 158
3.4.2. Carteras con dos clases de activos 164
3.5. Carteras de menor varianza 186
3.5.1. Frontera de mínimo riesgo 186
3.5.2. Cartera de mínimo riesgo global 193
3.6. Carteras eficientes 197
3.7. Selección de la cartera óptima 214

4. Ampliaciones del modelo de Markowitz 219

4.1. Carteras con ventas en descubierto 220
4.1.1. Carteras con *n* clases de activos 222
4.1.2. Carteras con dos clases de activos 237
4.2. Carteras mixtas 251
4.3. Carteras mixtas con préstamo y carteras mixtas con endeudamiento 255
4.4. Determinación de la cartera óptima con riesgo 263
4.5. Consideración de distintos tantos de interés 282
4.6. Selección de la cartera mixta óptima 285

5. Análisis del modelo de mercado y de los modelos de valoración de activos financieros 287

5.1. El modelo de mercado: análisis de los activos 288
5.1.1. Rentabilidad y riesgo 288
5.1.2. Covarianza entre rentabilidades 303
5.1.3. Clasificación de los activos según su *beta* 309
5.2. El modelo de mercado: análisis de las carteras 310
5.2.1. Rentabilidad y riesgo 311
5.2.2. Determinación de las carteras eficientes y selección de la cartera óptima 319
5.2.3. Las carteras mixtas en el modelo de mercado 325
5.3. Comparación del modelo de mercado con el modelo de Markowitz 329
5.4. El modelo *CAPM* 337
5.4.1. La línea del mercado de capitales 338
5.4.2. La línea del mercado de títulos 349
5.4.3. Los precios de equilibrio de los activos financieros 363
5.4.4. El alfa de un activo financiero 367
5.5. Los modelos factoriales 372
5.5.1. Análisis de los activos 373
5.5.2. Análisis de las carteras 379
5.6. El modelo *APT* 396

© Ediciones Pirámide

6. La evaluación de la gestión de carteras 425

6.1. Introducción 426
6.2. Medidas de rentabilidad 426
6.2.1. Rentabilidad simple 427
6.2.2. Rentabilidad del inversor 428
6.2.3. Rentabilidad del gestor 430
6.3. Medidas de evaluación ajustadas al riesgo 438
6.4. El *VaR* de una cartera 447

Bibliografía 455

© Ediciones Pirámide

Prólogo

En este texto abordamos la problemática correspondiente a la selección de inversiones financieras agrupadas en carteras de renta variable, exponiendo las teorías fundamentales con los contenidos teóricos necesarios para poder acometer el planteamiento y resolución de los distintos supuestos prácticos que consideramos más relevantes.

Esta obra es una introducción a la temática mencionada en su título, y deseamos que sirva de ayuda a todos los interesados en la disciplina, tanto profesionales del ámbito de la gestión de carteras como, de forma especial, a los estudiantes de los diversos grados y posgrados universitarios en los que la misma se cursa. Se ha enfocado este trabajo de tal manera que contenga los fundamentos precisos para abordar con garantías de éxito la resolución práctica de la amplia problemática vinculada al análisis y selección de carteras, estando al alcance de todas las personas con conocimientos básicos tanto de finanzas como de álgebra, ya que toda la exposición se realiza en un lenguaje sencillo y de fácil comprensión.

La obra está estructurada en seis lecciones en las que analizamos los aspectos teórico-prácticos que consideramos más relevantes. Además, con nuestro planteamiento podemos estudiar en cada una de las lecciones las expresiones analíticas generales aplicables a la resolución de los problemas derivados de la selección de carteras con cualquier número de activos. También señalamos, de forma pormenorizada, las etapas en la resolución detallada de cada supuesto práctico, exponiendo, igualmente, cómo se efectúan los cálculos correspondientes.

Nuestro texto es un libro de teoría y de práctica, pues en cada una de las lecciones se incluyen diversos ejemplos de aplicación inmediata de los conceptos estudiados, constando de 196 supuestos prácticos, los cuales son resueltos a continuación de las explicaciones teóricas correspondientes. Los cálculos necesarios para la resolución de cada supuesto práctico se han efectuado, en la gran mayoría de los casos, mediante Excel, por lo que en el CD que acompaña al texto figuran tanto los archivos con los datos correspondientes como la resolución respectiva.

© Ediciones Pirámide

En la lección primera se abordan los conceptos básicos que nos permiten situar nuestro marco de trabajo, introduciendo el concepto de inversiones financieras, las características de la gestión de carteras, así como los conceptos fundamentales relacionados con las medidas de rentabilidad, riesgo y correlación entre los títulos de renta variable. También se incluyen tres anexos en los que exponemos de forma sintética algunos conceptos básicos que serán necesarios en las lecciones siguientes, tales como una síntesis sobre el operador *Sigma,* sobre álgebra matricial y acerca de la utilización de la herramienta *Solver* implementada en Excel.

En la lección segunda, después de definir el concepto de cartera financiera y sus clases, así como las fases de la selección de carteras, vinculamos a cada activo financiero una variable aleatoria expresiva de su rentabilidad, siendo la esperanza matemática de la misma y su desviación típica medidas de la rentabilidad esperada y del riesgo asociado, respectivamente. También analizamos los datos estadísticos necesarios para el análisis de los activos, concluyendo dicha lección introduciendo la hipótesis de normalidad en la distribución de la variable aleatoria representativa del rendimiento de los activos.

En la lección tercera estudiamos el modelo de selección de carteras diseñado por Markowitz, el cual constituye la base fundamental de toda la teoría de carteras. Después de introducir las hipótesis del modelo, dedicamos especial atención a los conceptos y cuantificación de la rentabilidad y del riesgo de las carteras, deduciendo las expresiones generales aplicables para carteras integradas por n activos. También estudiamos la diversificación del riesgo y la determinación de las carteras que forman la frontera de mínimo riesgo, así como la cartera de mínimo riesgo global y las carteras eficientes. Además, a lo largo de la lección resolvemos distintos supuestos prácticos mediante la utilización de matrices, tanto para la determinación de la rentabilidad como para la cuantificación del riesgo, realizando los cálculos con Excel, y de forma especial utilizando la herramienta *Solver.* De este modo, es posible realizar supuestos prácticos de formación de carteras tanto con dos activos como con cualquier número de ellos, pues la metodología expuesta, mediante el cálculo matricial, lo permite.

En la lección cuarta realizamos un estudio de las ampliaciones del modelo de Markowitz, aceptando que para formar carteras esté permitido efectuar ventas en descubierto, las cuales modifican y amplían la frontera eficiente con relación a la hipótesis en que tales ventas no son posibles. Además, para determinar el conjunto de carteras que forman la frontera de mínimo riesgo, así como la cartera de mínimo riesgo global, utilizamos tanto la herramienta *Solver* como el método de los multiplicadores de Lagrange. Asimismo, se introduce la posibilidad de invertir en activos libres de riesgo, dando origen a las carteras mixtas, tanto con préstamo como con endeudamiento, considerando, también, distintos tipos de interés sin riesgo. Todo ello nos permite avanzar en el análisis y determinar la cartera óptima arriesgada para combinar con el activo libre de riesgo, deduciendo que la misma se corresponde con el punto de tangencia entre la línea de asignación de activos y la curva de carteras eficientes.

© Ediciones Pirámide

En la lección quinta se estudia el modelo de mercado propuesto por Sharpe, y efectuamos su análisis tanto para activos como para carteras. También destacamos que el modelo de mercado introduce notables simplificaciones con respecto al modelo de Markowitz, y, además, permite descomponer el riesgo de cualquier activo o cartera en dos componentes: riesgo de mercado y riesgo específico. Analizamos también en esta lección las hipótesis que permiten deducir la ecuación de la línea del mercado de capitales, verificada exclusivamente por las carteras eficientes integradas por un activo libre de riesgo y la cartera de mercado. También obtenemos la ecuación correspondiente a la línea del mercado de títulos, la cual, a diferencia de la ecuación anterior, la verifican tanto títulos individuales como carteras, independientemente de que sean eficientes o no. Esta última ecuación constituye la expresión básica del modelo de valoración de activos de capital o *CAPM*, y, para un activo o cartera cualquiera, proporciona, en situación de equilibrio del mercado, el rendimiento esperado, ajustado al nivel de riesgo correspondiente. Finalmente estudiamos los modelos factoriales y el modelo *APT*, el cual postula la inexistencia de carteras de arbitraje, así como que los diversos factores a los cuales está vinculada la rentabilidad de un activo financiero están incorrelacionados y no son especificados de antemano.

Por último, en la lección sexta estudiamos las distintas medidas vinculadas a la evaluación de la gestión de carteras; como en las lecciones precedentes, exponemos los conceptos teóricos necesarios para entender el proceso de evaluación y poder realizar distintos supuestos prácticos. Así, analizamos la rentabilidad del gestor, la rentabilidad del inversor o las medidas de *perfomance* de las carteras, para concluir con una introducción al estudio del *VaR* de una cartera.

Deseamos que nuestro texto contribuya a que los interesados en la disciplina aborden su estudio con garantías de éxito, y, en cualquier caso, les ayude a reflexionar y a aprender de manera razonada, meditando y ejercitándose a través de la realización de los diversos supuestos prácticos que exponemos, los cuales contribuirán a afianzar los diversos conceptos teóricos analizados.

JUAN GARCÍA BOZA

© Ediciones Pirámide

1 Conceptos básicos

1.1. Inversiones financieras.
1.2. Gestión y administración de carteras.
1.3. Medidas de la rentabilidad de un título.
1.4. Medida del riesgo y de la correlación entre los títulos.
Anexo I: El operador *SIGMA*.
Anexo II: Conceptos básicos sobre matrices.
Anexo III: La herramienta *SOLVER* de Excel.

1.1. INVERSIONES FINANCIERAS

En general, entendemos por inversión *la adquisición por parte de un sujeto económico (persona física o jurídica) de un conjunto de activos capaces de proporcionarle servicios o rentas durante un cierto período de tiempo*. Como tanto el importe de la adquisición como los servicios o rentas son cuantificables en dinero, invertir implica ceder dinero en el momento presente en el que se efectúa la inversión, a cambio de recibir dinero en el futuro. En consecuencia, desde el punto de vista financiero podemos caracterizar a cualquier inversión por el conjunto de desembolsos o *conjunto de pagos* que debe realizar el sujeto inversor, y por el conjunto de rentas o *conjunto de cobros* que percibe a consecuencia de la citada inversión. Tales conjuntos constituyen la *corriente financiera* de la inversión, teniendo lugar los mismos durante un cierto período de tiempo, denominado *horizonte económico*, *horizonte temporal* o *período de vida* de la inversión.

Cuando el activo objeto de la inversión sea un bien material o un activo real (un edificio, maquinaria, etc.), se habla de *inversiones reales*, mientras que cuando sea un título, o *activo financiero* (acciones, bonos, letras del Tesoro, etc.), hablaremos de *inversiones financieras*.

Los activos financieros representan un derecho de propiedad frente a una corriente futura de renta, y en ellos podemos distinguir dos sujetos: el emisor (o unidad económica deficitaria) y el inversor (o unidad económica excedentaria). Para el emisor, un activo financiero constituye un pasivo, pues él es el sujeto prestatario, es decir, el obligado a satisfacer la corriente de renta asociada al activo. Para el inversor, un activo financiero constituye un activo, pues es el sujeto que tiene derecho a recibir la corriente de renta citada.

De acuerdo con lo expuesto, un activo financiero lleva asociados para el inversor dos conjuntos de capitales financieros: el conjunto prestación o conjunto

© Ediciones Pirámide

de pagos que debe realizar dicho sujeto prestamista, y el conjunto contraprestación o conjunto de cobros que ha de percibir dicho sujeto. De igual forma, para el emisor, se tiene el conjunto prestación o conjunto de cobros y el conjunto contraprestación o conjunto de pagos.

En función de las cuantías a percibir por el poseedor de un activo financiero, es posible distinguir entre activos de renta fija y activos de renta variable. Un activo de renta fija promete un conjunto conocido de cobros o flujos de caja, mientras que en un activo de renta variable tales cobros son desconocidos. Las letras del Tesoro o los bonos del Estado son un ejemplo de activos de renta fija, mientras que las acciones lo son de activos de renta variable.

En general, las inversiones financieras suelen realizarse distribuyendo los recursos financieros a invertir entre distintos productos, formando *carteras de inversión.* A partir de ahora nos referiremos a inversiones financieras materializadas en activos de renta variable, negociables en mercados financieros y agrupados en carteras.

1.2. GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN DE CARTERAS

En general, podemos señalar que la parte del campo de las inversiones conocida bajo el nombre de *Gestión de carteras* comprende las siguientes fases[1]:

1. *Análisis de los títulos* o predicción de los rendimientos esperados, riesgos y covarianzas entre los activos disponibles para formar carteras.
2. *Análisis de las carteras* o determinación de sus rendimientos esperados y riesgos probables en función de los títulos que las forman y de las cuantías invertidas en cada uno de ellos.
3. De entre las carteras consideradas más apropiadas en el análisis precedente, *selección de la cartera óptima* o más adecuada a las preferencias y objetivos concretos de un inversor.

En una concepción más amplia, y vinculada a las tres fases anteriores, está la *administración de inversiones* o *administración de carteras*, que es el proceso por el que un gestor administra los recursos financieros que un inversor le encomienda para que sean invertidos. Entre sus funciones se incluyen las tres anteriores y, en general, se pueden señalar las cinco siguientes[2]:

---

[1] Francis, J. C. y Archer, S. H. (1977: 8).

[2] Adaptado de Alexander et al. (2003: 11; 390-392). En otros textos se señalan fases diferentes, pero con contenidos similares. Puede verse: Bodie et al. (2004: 435), o Gitman, L. J. y Joehnk, M. D. (2005: 11-13), los cuales señalan que la *gestión de carteras* implica realizar un seguimiento de las mismas, así como su posible reestructuración en función del comportamiento de las inversiones.

© Ediciones Pirámide

1. Establecer una política de inversión, identificando las preferencias y objetivos del inversor en cuanto a la cuantía que está dispuesto a invertir, la rentabilidad esperada y el riesgo a soportar.
2. Realizar un análisis de activos, con el fin de poder determinar sus rendimientos esperados y riesgos probables, e identificar los activos concretos en los que invertir.
3. Formar y analizar las posibles carteras, determinando la cuantía a invertir en cada uno de los activos previamente seleccionados, así como la rentabilidad esperada y el riesgo de cada cartera.
4. De acuerdo con las preferencias del inversor en cuanto a rentabilidad-riesgo, elegir la cartera óptima o cartera específica en la que invertir.
5. Evaluación periódica del rendimiento y riesgo que corre el inversor con la cartera concreta en la que ha invertido, así como la revisión y reestructuración de la misma.

1.3. MEDIDAS DE LA RENTABILIDAD DE UN TÍTULO

La variable rentabilidad es fundamental en cualquier análisis sobre inversiones financieras, por lo que vamos a estudiar distintas formas de determinar la rentabilidad de un título de renta variable que cotice en un mercado financiero organizado.

Sea C_t el precio o cotización de cierre de un título en la sesión bursátil celebrada en la fecha t; C_{t-1} la cotización en la sesión anterior, y D_t cualquier renta distribuida por el activo en la fecha t. En estas condiciones, la *rentabilidad por sesión* es el tipo de interés que verifica la ecuación de equivalencia financiera entre la cotización C_{t-1} y C_t junto con D_t. En un sentido más amplio, cuando el tipo de interés corresponda a la equivalencia financiera planteada en capitalización simple, la rentabilidad se denomina *simple* o *aritmética;* cuando sea el derivado de la equivalencia en capitalización compuesta, la rentabilidad es *efectiva* o *compuesta,* y se habla de *rentabilidad logarítmica, continua* o *instantánea* cuando proceda de la equivalencia financiera planteada en capitalización continua.

Recordemos que dados dos capitales financieros $(C_0, 0)$ y (C_n, n), para un tipo de interés unitario r en capitalización simple, i en capitalización compuesta y k en capitalización continua, las ecuaciones de equivalencia financiera en capitalización simple, en capitalización compuesta y en capitalización continua son, respectivamente[3]:

[3] La problemática relativa a la valoración de capitales y operaciones financieras puede consultarse en García Boza, J. et al. (2011).

© Ediciones Pirámide

$$C_n = C_0(1 + nr)$$

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

$$C_n = C_0 e^{nk}$$

Por tanto, la rentabilidad simple, r_t, en la sesión de fecha t, verifica:

$$C_t + D_t = C_{t-1}(1 + r_t)$$

De donde:

$$r_t = \frac{C_t + D_t - C_{t-1}}{C_{t-1}} = \frac{C_t - C_{t-1} + D_t}{C_{t-1}}$$

En la expresión anterior, la diferencia de cotizaciones constituye una ganancia de capital, por lo que podemos expresar la rentabilidad simple como:

$$\frac{\text{Ganancias de capital} + \text{Dividendos}}{\text{Precio inicial}}$$

Al tratarse de una sola sesión, la rentabilidad compuesta verifica la misma ecuación anterior:

$$C_t + D_t = C_{t-1}(1 + i_t)$$

La rentabilidad instantánea o logarítmica verifica:

$$C_t + D_t = C_{t-1}e^{k_t} \Rightarrow k_t = \ln\left(\frac{C_t + D_t}{C_{t-1}}\right) = \ln(C_t + D_t) - \ln C_{t-1}$$

Al comparar la expresión anterior con la de la rentabilidad compuesta, se deduce: $k_t = \ln(1 + i_t)$.

La rentabilidad será diaria, semanal, mensual, trimestral o anual, cuando se consideren, respectivamente, las cotizaciones de cierre de *dos sesiones consecutivas* diarias[4], semanales, mensuales, trimestrales o anuales. Además, disponiendo de una serie histórica de cotizaciones de un activo durante un cierto intervalo de tiempo, podemos determinar su *rentabilidad histórica media* como la media aritmética de las rentabilidades obtenidas en las sesiones que integran el citado intervalo.

[4] Si en lugar de considerar las cotizaciones de cierre se considerasen las mínimas o las máximas, tendríamos la rentabilidad mínima o la máxima, respectivamente.

© Ediciones Pirámide

EJEMPLO 1.1

Un título cotiza al final de cierto trimestre a 42 €, y al final del siguiente a 42,50 €, habiendo percibido en el trimestre un dividendo de 1 €. Determinar:

a) Rentabilidad trimestral.
b) Rentabilidad mensual.
c) Rentabilidad anual.

Resolución

a) Se tiene:

$$r_t = \frac{C_t + D_t - C_{t-1}}{C_{t-1}} = \frac{42,50 + 1 - 42}{42} = 3,571429\%$$

La rentabilidad simple y la compuesta es el 3,571429 % trimestral.
Para la rentabilidad logarítmica trimestral tenemos:

$$k_t = \ln\left(\frac{43,50}{42}\right) = 3,509132\%$$

b) Si en las ecuaciones anteriores expresamos el tiempo en meses, obtenemos la rentabilidad mensual. Así, la rentabilidad simple mensual verifica:

$$43,50 = 42\left(1 + 3r^{(m)}\right) \Rightarrow r^{(m)} = 1,190476\%$$

Si comparamos la expresión anterior con la de la rentabilidad simple trimestral, se deduce: $r_t = 3r^{(m)}$.
Para la rentabilidad compuesta mensual se tiene:

$$43,50 = 42\left(1 + i^{(m)}\right)^3 \Rightarrow i^{(m)} = 1,176579\%$$

Al comparar la expresión anterior con la de la rentabilidad trimestral compuesta, tenemos:

$$1 + i_t = \left(1 + i^{(m)}\right)^3$$

© Ediciones Pirámide

La rentabilidad logarítmica mensual es:

$$43,50 = 42e^{3\times k^{(m)}} \Rightarrow k^{(m)} = \frac{\ln\left(\frac{43,50}{42}\right)}{3} = 1,169711\%$$

Si comparamos la expresión anterior con la de la rentabilidad logarítmica mensual, se obtiene: $k_t = 3k^{(m)}$.

c) Para determinar la rentabilidad anual equivalente se expresa el tiempo en años. Así, la rentabilidad simple anual verifica:

$$43,50 = 42\left(1+\frac{1}{4}r_a\right) \Rightarrow r_a = 14,285714\%$$

Si comparamos la expresión anterior con la de la rentabilidad simple mensual, tenemos: $r_a = 12r^{(m)}$. Igual comparación podemos hacer con la rentabilidad trimestral, deduciéndose: $r_a = 4r_t$.

La rentabilidad compuesta anual verifica:

$$43,50 = 42\left(1+i_a\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow i_a = 15,069405\%$$

Al comparar la expresión anterior con la de la rentabilidad compuesta mensual y con la trimestral, se deduce:

$$\left(1+i^{(m)}\right)^{12} = 1+i_a;\ \left(1+i_t\right)^4 = 1+i_a$$

La rentabilidad logarítmica anual es:

$$43,50 = 42e^{\frac{1}{4}k_a} \Rightarrow k_a = 4\ln\left(\frac{43,5}{42}\right) = 14,036528\%$$

Si la comparamos la rentabilidad logarítmica anual con la mensual y con la trimestral, se deduce:

$$k_a = 12k^{(m)};\ k_a = 4k_t$$

EJEMPLO 1.2

Las acciones de cierta empresa cotizaron al final del pasado año a 120 € por acción. Durante el presente año, las cotizaciones al final de los siete primeros me-

© Ediciones Pirámide

ses han sido las siguientes: 121,20; 123; 125; 124; 125,62; 127,32 y 128 € por acción. Determinar:

a) La rentabilidad de cada mes y rentabilidad media mensual (simple y continua).
b) La rentabilidad mensual.
c) La rentabilidad anual.
d) Comparar las distintas medidas de la rentabilidad.

Resolución

a) En la siguiente tabla, correspondiente a este ejemplo en el archivo *Soluciones Ejemplos L 1,* se muestran los resultados:

Sesión	Cotización	R. simple (r_t)	R. instantánea (k_t)
0	120,00		
1	121,20	1,000000%	0,995033%
2	123,00	1,485149%	1,474228%
3	125,00	1,626016%	1,612938%
4	124,00	-0,800000%	-0,803217%
5	125,62	1,306452%	1,297991%
6	127,32	1,353288%	1,344213%
7	128,00	0,534087%	0,532666%
	R. media mensual	**0,929285%**	**0,921979%**

La rentabilidad media mensual simple, $\bar{r}$, es el 0,929285%, y la rentabilidad media mensual instantánea, $\bar{k}$, el 0,921979%. Ambas se han obtenido aplicando en Excel la función *PROMEDIO* a las respectivas series de rentabilidades mensuales.

b) La rentabilidad mensual se deduce de la equivalencia financiera entre la cotización inicial y la final, teniendo en cuenta que la amplitud del intervalo temporal es de 7 meses. Por tanto, se verifica:

Rentabilidad mensual simple:

$$128 = 120\left(1 + 7r^{(m)}\right) \Rightarrow r^{(m)} = 0,952381\%$$

Obviamente, la rentabilidad *media mensual simple* no coincide con la *rentabilidad mensual simple*: $\bar{r} \neq r^{(m)}$.

Rentabilidad mensual compuesta:

$$128 = 120\left(1 + i^{(m)}\right)^7 \Rightarrow i^{(m)} = 0,926242\%$$

© Ediciones Pirámide

Rentabilidad mensual instantánea:

$$128 = 120e^{7k^{(m)}} \Rightarrow k^{(m)} = \frac{1}{7}\ln\left(\frac{128}{120}\right) = 0,921979\%$$

La rentabilidad mensual instantánea coincide con la rentabilidad media mensual logarítmica: $\bar{k} = k^{(m)}$.

c) La rentabilidad anual se deduce de la equivalencia financiera entre la cotización inicial y la final, expresando el tiempo en años. Se verifica:

Rentabilidad anual simple:

$$128 = 120\left(1 + \frac{7}{12}r_a\right) \Rightarrow r_a = 11,428571\%$$

Rentabilidad anual compuesta:

$$128 = 120\left(1 + i_a\right)^{\frac{7}{12}} \Rightarrow i_a = 11,698989\%$$

Rentabilidad anual instantánea:

$$128 = 120e^{\frac{7}{12}k_a} \Rightarrow k_a = \frac{12}{7}\ln\left(\frac{128}{120}\right) = 11,063746\%$$

d) Si comparamos las expresiones respectivas de la rentabilidad mensual con la de la rentabilidad anual, tenemos:

Para la rentabilidad simple:

$$\left.\begin{aligned} 128 &= 120\left(1 + 7r^{(m)}\right) \\ 128 &= 120\left(1 + \frac{7}{12}r_a\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_a = 12r^{(m)}$$

Además, tal y como hemos señalado, $\bar{r} \neq r^{(m)}$, o sea, la rentabilidad *media mensual* simple es distinta de la rentabilidad *mensual* simple, por lo que $12\bar{r} \neq r_a$. Por ello, a la rentabilidad media mensual simple multiplicada por 12 se le denomina *rentabilidad media mensual simple elevada al año*: $\bar{r}_a = 12\bar{r} \neq r_a$.

© Ediciones Pirámide

Para la rentabilidad compuesta es:

$$\left.\begin{aligned} 128 &= 120\left(1+i^{(m)}\right)^{7} \\ 128 &= 120\left(1+i_a\right)^{\frac{7}{12}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(1+i^{(m)}\right)^{12} = 1+i_a$$

Para la logarítmica tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 128 &= 120e^{7k^{(m)}} \\ 128 &= 120e^{k_a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_a = 12k^{(m)}$$

Además, según señalamos es $\overline{k} = k^{(m)}$, por lo que se verifica: $k_a = 12\overline{k} = 12k^{(m)} = \overline{k_a}$. La expresión anterior indica que la rentabilidad anual instantánea coincide con la rentabilidad media mensual instantánea elevada al año.

Si comparamos la rentabilidad logarítmica con la compuesta, se verifica:

$$\left.\begin{aligned} 128 &= 120e^{\frac{7}{12}k_a} \\ 128 &= 120\left(1+i_a\right)^{\frac{7}{12}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_a = \ln\left(1+i_a\right)$$

EJEMPLO 1.3

Las acciones de cierta empresa han cotizado al final de 22 sesiones consecutivas diarias con los valores que se indican en el archivo correspondiente a este ejemplo en *Datos Ejemplos L 1.* Determinar:

a) La rentabilidad diaria simple y logarítmica, así como las correspondientes rentabilidades medias.
b) La rentabilidad media diaria elevada al año.
c) Realizar un planteamiento general del cálculo de la rentabilidad elevada al año.

Resolución

En el archivo correspondiente de *Soluciones Ejemplos L 1* se han hecho los cálculos, obteniéndose:

© Ediciones Pirámide

a) Rentabilidad media diaria simple: $\bar{r} = 0{,}114647\%$; rentabilidad media diaria instantánea: $\bar{k} = 0{,}114304\%$. Los valores anteriores se han obtenido como la media aritmética de las respectivas rentabilidades diarias.

b) Se considera que las Bolsas realizan sesiones de cotización durante 252 días al año, y que las variaciones de los precios que dan origen a la rentabilidad ocurren en dichas sesiones. Por ello, se define la *rentabilidad media diaria elevada al año* como la rentabilidad media diaria multiplicada por 252. En consecuencia, tenemos los siguientes valores para la rentabilidad media diaria (simple y logarítmica) elevada al año, rentabilidad anualizada o rentabilidad media anual deducida de la media diaria (simple e instantánea):

$$\overline{r_a} = \bar{r}\,252 = 0{,}114647\% \times 252 = 28{,}891044\%$$

$$\overline{k_a} = \bar{k}\,252 = 0{,}114304\% \times 252 = 28{,}804608\%$$

c) En general, si se dispone de una serie histórica con las cotizaciones de cierre de un activo durante cierto período[5], tenemos:

Sesión	Precio	R. simple	R. logarítmica
0	C_0	–	–
1	C_1	r_1	k_1
2	C_2	r_2	k_2
3	C_3	r_3	k_3
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
T	C_T	r_T	k_T

Para cualquier sesión *s* se verifica:

$$r_s = \frac{C_s}{C_{s-1}} - 1$$

$$k_s = \ln\left(\frac{C_s}{C_{s-1}}\right) = \ln C_s - \ln C_{s-1}$$

[5] Consideramos que las cotizaciones están ajustadas por cualquier rendimiento obtenido por el título.

© Ediciones Pirámide

La rentabilidad media simple y la media instantánea verifican, respectivamente:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{s=1}^{T} r_s}{T}; \quad \overline{k} = \frac{\sum_{s=1}^{T} k_s}{T}$$

Para la rentabilidad media instantánea tenemos:

$$\overline{k} = \frac{\sum_{s=1}^{T} k_s}{T} = \frac{(\ln C_1 - \ln C_0) + (\ln C_2 - \ln C_1) + (\ln C_3 - \ln C_2) + \cdots + (\ln C_T - \ln C_{T-1})}{T} =$$

$$= \frac{\ln C_T - \ln C_0}{T} = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{C_T}{C_0} \right)$$

De donde:

$$\overline{k} = \frac{\sum_{s=1}^{T} k_s}{T} = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{C_T}{C_0} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\overline{k} = \sum_{s=1}^{T} k_s = \ln \left(\frac{C_T}{C_0} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_T = C_0 e^{T\overline{k}} = C_0 e^{\sum_{s=1}^{T} k_s}$$

Observemos que la rentabilidad instantánea, $\ln \left(\frac{C_T}{C_0} \right)$, correspondiente al intervalo [0, T], es la suma de las rentabilidades instantáneas de los subintervalos, pues se verifica:

$$\ln \left(\frac{C_T}{C_0} \right) = k_1 + k_2 + \cdots + k_T$$

En efecto:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_T = (\ln C_1 - \ln C_0) + (\ln C_2 - \ln C_1) + \cdots + (\ln C_T - \ln C_{T-1}) =$$

$$= \ln C_T - \ln C_0 = \ln \left(\frac{C_T}{C_0} \right)$$

© Ediciones Pirámide

Si son cotizaciones diarias y queremos hallar la rentabilidad anual con 252 sesiones, es:

Rentabilidad media diaria elevada al año, simple e instantánea, respectivamente:

$$\overline{r_a} = 252\overline{r};\ \ \overline{k_a} = 252\overline{k}$$

Rentabilidad anual simple:

$$C_T = C_0\left(1 + r_a \frac{T}{252}\right) \Rightarrow r_a \neq \overline{r_a}$$

Rentabilidad anual continua:

$$C_T = C_0 e^{\frac{T}{252}k_a}$$

De donde se deduce: $k_a = \dfrac{252}{T}\ln\left(\dfrac{C_T}{C_0}\right)$. Pero $\overline{k} = \dfrac{1}{T}\ln\left(\dfrac{C_T}{C_0}\right)$. Por tanto:

$$k_a = 252\overline{k} = \overline{k_a}$$

Rentabilidad anual compuesta:

$$C_T = C_0\left(1 + i_a\right)^{\frac{T}{252}}$$

Al comparar la expresión anterior con la de la rentabilidad anual continua se deduce:

$$\left(1 + i_a\right)^{\frac{T}{252}} = e^{\frac{T}{252}k_a} \Rightarrow k_a = \ln\left(1 + i_a\right)$$

Teniendo en cuenta que de la expresión $r_s = \dfrac{C_s}{C_{s-1}} - 1 = i_s$, se deduce:

$$\left(1 + i_1\right)\left(1 + i_2\right)\cdots\left(1 + i_T\right) = \prod_{s=1}^{T}\left(1 + i_s\right) = \frac{C_T}{C_0} = \left(1 + \overline{i}\right)^T \Rightarrow \overline{i} = \sqrt[T]{\prod_{s=1}^{T}\left(1 + i_s\right)} - 1$$

© Ediciones Pirámide

El valor $\bar{i}$ es la rentabilidad media compuesta o rentabilidad media geométrica:

$$C_T = C_0\left(1+\bar{i}\right)^T \Rightarrow \bar{i} = \sqrt[T]{\frac{C_T}{C_0}} - 1$$

Al comparar la rentabilidad $\bar{i}$ con la anual compuesta se deduce:

$$\left(1+\bar{i}\right)^{252} = 1 + i_a$$

Si las cotizaciones fuesen mensuales o trimestrales, son válidas todas las expresiones anteriores sustituyendo $\frac{T}{252}$ por $\frac{T}{12}$ y por $\frac{T}{4}$, respectivamente.

Con los datos del ejercicio, teniendo en cuenta que disponemos de 21 valores de rentabilidad diaria, la rentabilidad compuesta media diaria verifica:

$$\left(1+\bar{i}\right)^{21} = \frac{C_{21}}{C_0} \Rightarrow \bar{i} = \sqrt[21]{\frac{31,20}{30,46}} - 1 = 0,114369\%$$

La media geométrica elevada al año es:

$$\left(1+\bar{i}\right)^{252} = 1 + \overline{i_a} \Rightarrow \overline{i_a} = 33,381728\%$$

La rentabilidad compuesta anual, i_a, verifica:

$$31,20 = 30,46\left(1+i_a\right)^{\frac{21}{252}} \Rightarrow i_a = 33,381728\%$$

Si comparamos las expresiones respectivas de la rentabilidad geométrica media diaria con la anual, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 31,20 &= 30,46\left(1+\bar{i}\right)^{21} \\ 31,20 &= 30,46\left(1+i_a\right)^{\frac{21}{252}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(1+\bar{i}\right)^{252} = 1 + i_a = 1 + \overline{i_a} \Rightarrow i_a = \overline{i_a}$$

De lo anterior se deduce que la rentabilidad media geométrica elevada al año coincide con la rentabilidad geométrica, compuesta o efectiva anual.

De todas las medidas expuestas, cuando se dispone de una serie histórica de datos de cotizaciones, las más utilizadas son la rentabilidad media simple elevada al año, $\overline{r_a}$, y la rentabilidad media logarítmica elevada al año, $\overline{k_a} = k_a$.

© Ediciones Pirámide

De acuerdo con lo expuesto, considerando que en un año existen 252 sesiones diarias de cotización, 52 semanales o 12 mensuales, para anualizar la rentabilidad media (la simple y la instantánea), obteniendo la rentabilidad media elevada al año, las expresiones a utilizar son:

$$\text{Responsabilidad anual} = \begin{cases} 252 \times \text{Rentabilidad media diaria} \\ 52 \times \text{Rentabilidad media semanal} \\ 12 \times \text{Rentabilidad media mensual} \end{cases}$$

EJEMPLO 1.4

Las cotizaciones mensuales de una acción son las que se indican en el archivo correspondiente a este ejemplo en *Datos Ejemplos L 1.* Determinar:

a) Rentabilidad media mensual.
b) Rentabilidad mensual.
c) Rentabilidad media mensual elevada al año.
d) Rentabilidad anual.

Resolución

a) Calculamos la rentabilidad de cada mes, obteniendo para la rentabilidad media mensual:

Sesión	Cotización	R. simple (r_t)	R. instantánea (k_t)	R. geométrica	
0	100,00				
1	105,00	5,000000%	4,879016%		1,050000
2	104,00	-0,952381%	-0,956945%		0,990476
3	104,00	0,000000%	0,000000%		1,000000
4	106,00	1,923077%	1,904819%		1,019231
5	109,00	2,830189%	2,790879%		1,028302
6	105,00	-3,669725%	-3,738753%		0,963303
7	107,00	1,904762%	1,886848%		1,019048
	R. media mensual	**1,005132%**	**0,966552%**	**0,971238%**	**0,971238%**

© Ediciones Pirámide

La rentabilidad media mensual simple y la instantánea se han obtenido como la media de las respectivas rentabilidades de cada mes. En cambio, la rentabilidad media geométrica se ha deducido de:

$$\left(1+\bar{i}\right)^7 = \prod_{s=1}^{7}\left(1+r_s\right) = \frac{107}{100} \Rightarrow \bar{i} = \sqrt[7]{1,07} - 1 = 0,971238\%$$

Cualquier rentabilidad media es, pues, una media de las rentabilidades de los distintos meses.

b) La rentabilidad mensual correspondiente se deduce de la respectiva ecuación de equivalencia financiera (simple, continua y compuesta) entre la cotización inicial y la final al cabo de 7 meses:

$$\left.\begin{array}{c} 107 = 100\left(1+7r^{(m)}\right) \\ 107 = 100e^{7k^{(m)}} \\ 107 = 100\left(1+i^{(m)}\right)^7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} r^{(m)} = 1\% \\ k^{(m)} = \overline{k} = 0,966552\% \\ i^{(m)} = \bar{i} = 0,971238\% \end{array}\right.$$

La rentabilidad mensual no es una media de las rentabilidades de los respectivos meses, sino que se deduce de la equivalencia entre la cotización inicial y la cotización final del período.

c) La rentabilidad media mensual, simple, continua y geométrica, elevada al año es, respectivamente:

$$\overline{r_a} = 12\bar{r} = 12 \times 1,005132\% = 12,061584\%$$

$$\overline{k_a} = 12\overline{k} = 12 \times 0,966552\% = 11,598624\%$$

$$\left(1+\bar{i}\right)^{12} = 1+\overline{i_a} \Rightarrow \overline{i_a} = \left(1+0,971238\%\right)^{12} - 1 = 12,298039\%$$

d) Para determinar la rentabilidad anual planteamos las ecuaciones de equivalencia entre las cotizaciones inicial y final, expresando el tiempo en años:

$$107 = 100\left(1+\frac{7}{12}r_a\right) \Rightarrow r_a = 12\%$$

$$107 = 100e^{\frac{7}{12}k_a} \Rightarrow k_a = 11,5986245$$

$$107 = 100\left(1+i_a\right)^{\frac{7}{12}} \Rightarrow i_a = 12,298044\%$$

© Ediciones Pirámide

EJEMPLO 1.5

Las cotizaciones de un activo al final de cada mes han sido: 300, 310, 315, 310 y 300 €. Determinar la rentabilidad media mensual.

Resolución

En la siguiente tabla de muestran los resultados:

Sesión	Cotización	R. simple (r_t)	R. instantánea (k_t)	R. geométrica	
0	300,00				
1	310,00	3,333333%	3,278982%		1,033333
2	315,00	1,612903%	1,600034%		1,016129
3	310,00	-1,587302%	-1,600034%		0,984127
4	300,00	-3,225806%	-3,278982%		0,967742
	R. media mensual	**0,033282%**	**0,000000%**	**0,000000%**	**0,000000%**

Observemos que la cotización inicial y la final al cabo de cuatro meses es la misma. Por ello, lo evidente es que la rentabilidad ha sido nula, como ponen de manifiesto tanto la rentabilidad media continua mensual como la media geométrica. En cambio, la rentabilidad media simple indica un 0,033282% mensual. Además, al pasar el precio de 300 a 310 y después de 310 a 300, la rentabilidad continua, en valor absoluto, es la misma. En cambio, la rentabilidad simple es distinta. Lo expuesto justifica que la rentabilidad continua y la compuesta ofrezcan mejores resultados que la media simple. No obstante, debido a la facilidad de su cálculo, la rentabilidad media simple, y su correspondiente elevada al año, son de gran utilización práctica.

1.4. MEDIDA DEL RIESGO Y DE LA CORRELACIÓN ENTRE LOS TÍTULOS

Disponiendo de una serie histórica de las cotizaciones de un activo durante cierto tiempo, podemos determinar su dispersión media alrededor de la rentabilidad media. Se utiliza para ello la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(r_t - \bar{r}\right)^2}{T}}$$

En Excel se calcula con la función *DESVESTP*.

© Ediciones Pirámide

EJEMPLO 1.6

Con los datos correspondientes al ejemplo 1.3, calcular la desviación típica, tanto en términos de rentabilidad simple como de rentabilidad continua.

Resolución

En el archivo correspondiente de *Soluciones Ejemplos L 1* se han hecho los cálculos, obteniéndose una desviación típica diaria, con rentabilidad simple, del 0,236445%, y con rentabilidad continua del 0,235645%.

Sesión	Fecha	Cotización	R. simple (r_t)	R. instantánea (k_t)
0	02/04/a	30,46		
1	03/04/a	30,75	0,952068%	0,947565%
2	04/04/a	30,80	0,162602%	0,162470%
3	05/04/a	30,90	0,324675%	0,324149%
4	06/04/a	30,85	-0,161812%	-0,161943%
5	09/04/a	30,87	0,064830%	0,064809%
6	10/04/a	30,95	0,259151%	0,258816%
7	11/04/a	30,93	-0,064620%	-0,064641%
8	12/04/a	30,98	0,161655%	0,161525%
9	13/04/a	31,10	0,387347%	0,386598%
10	16/04/a	31,12	0,064309%	0,064288%
11	17/04/a	31,15	0,096401%	0,096355%
12	18/04/a	31,08	-0,224719%	-0,224972%
13	19/04/a	31,10	0,064350%	0,064329%
14	20/04/a	31,12	0,064309%	0,064288%
15	23/04/a	31,15	0,096401%	0,096355%
16	24/04/a	31,18	0,096308%	0,096262%
17	25/04/a	31,20	0,064144%	0,064123%
18	26/04/a	31,23	0,096154%	0,096108%
19	27/04/a	31,18	-0,160102%	-0,160231%
20	30/04/a	31,20	0,064144%	0,064123%
21	01/05/a	31,20	0,000000%	0,000000%
		R. media diaria	**0,114647%**	**0,114304%**
		Desviación típica	**0,236445%**	**0,235645%**

De acuerdo con todo lo expuesto, la rentabilidad de un título depende de sus cotizaciones en un cierto intervalo de tiempo. Y éstas están influenciadas por un amplio conjunto de factores: evolución histórica y perspectivas de futuro de la economía en general, del sector particular al que pertenece el título o de las correspondientes a la empresa emisora del título; de las percepciones y expectativas subjetivas de cada inversor, etc. Y si la rentabilidad pasada ha estado influida por

© Ediciones Pirámide

diversas variables, también la rentabilidad futura lo estará. Por ello, la rentabilidad de una acción es una magnitud que tomará distintos valores a través del tiempo, sin que se puedan determinar con certeza y de antemano tales valores. En consecuencia, podemos considerar la rentabilidad como una variable aleatoria que tomará distintos valores en el tiempo, con su correspondiente probabilidad.

Sabemos que en el momento en el que el inversor adquiere determinada acción, no conoce su rentabilidad futura y sí la pasada, teniendo unas expectativas de rentabilidad futura. Ahora bien, la rentabilidad real que obtenga diferirá de la esperada, por lo que existe un riesgo. Así, en general se define el riesgo de un título como *la posibilidad de que el rendimiento efectivamente realizado no coincida con el esperado*. Con una serie histórica de datos, podemos estimar el riesgo de un activo a través de la *cuasidesviación típica* o *desviación típica corregida.* Se utiliza la cuasidesviación típica, en lugar de la desviación típica de la muestra, pues lo que se desea es estimar la desviación típica poblacional a partir de los datos de una muestra[6]. Así, para un título *i* tenemos:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(r_t - \bar{r}\right)^2}{T-1}}$$

En Excel se calcula con la función *DESVEST*.

En el ejemplo precedente, la desviación típica diaria de la rentabilidad simple, para la muestra especificada, es el 0,236445%. Pero para disponer de una *estimación del riesgo* de dicho activo para la población total es preciso calcular la cuasidesviación típica, que asciende al 0,242284%, y al 0,241464%, si se considera la rentabilidad instantánea.

EJEMPLO 1.7

Con los datos correspondientes al ejemplo 1.4, calcular el riesgo, tanto en términos de rentabilidad simple como de rentabilidad instantánea.

Resolución

En el archivo correspondiente de *Soluciones Ejemplos L 1* se han hecho los cálculos, obteniéndose un riesgo mensual del 2,817747% y del 2,802879%, según se consideren, respectivamente, rentabilidades simples o rentabilidades continuas:

[6] La cuasidesviación típica es un estimador insesgado de la desviación típica poblacional, por lo que es la medida adecuada del riesgo cuando se obtiene el mismo a partir de una muestra.

© Ediciones Pirámide

Sesión	Cotización	R. simple (r_t)	R. instantánea (k_t)
0	100,00		
1	105,00	5,000000%	4,879016%
2	104,00	-0,952381%	-0,956945%
3	104,00	0,000000%	0,000000%
4	106,00	1,923077%	1,904819%
5	109,00	2,830189%	2,790879%
6	105,00	-3,669725%	-3,738753%
7	107,00	1,904762%	1,886848%
	R. media mensual	**1,005132%**	**0,966552%**
	Riesgo mensual	**2,817747%**	**2,802879%**

Cuando el riesgo calculado corresponda a períodos de tiempo inferiores al año, puede ser necesaria su anualización. Con datos de rentabilidad simple o con rentabilidad continua, tenemos que, por ejemplo, la cuasivarianza anual en función de la mensual es[7]:

$$\sigma_a^2 = \sigma_m^2 12$$

En consecuencia, al ser la desviación típica la raíz cuadrada de la varianza, el riesgo anual en función del mensual es:

$$\sigma_a = \sigma_m \sqrt{12}$$

En general, el riesgo anual en función del riesgo diario o del riesgo mensual, así como el mensual en función del diario, es, respectivamente[8]:

$$\sigma_a = \sigma_d \sqrt{252}$$

$$\sigma_a = \sigma_m \sqrt{12}$$

$$\sigma_m = \sigma_d \sqrt{20}$$

[7] Para ello se acepta la siguiente hipótesis: «los rendimientos no están correlacionados en intervalos sucesivos de tiempo, o sea, son independientes y están idénticamente distribuidos». La independencia implica que la rentabilidad de un período no influye en la rentabilidad del siguiente. Como la varianza de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas de las variables, la varianza para, por ejemplo, 12 meses, es la suma de las varianzas de cada uno de esos meses. Y si la varianza mensual es constante, la varianza anual es la varianza mensual multiplicada por 12. Puede verse Benninga (1998: 82) o Jorion (1999: 103).

[8] En general, se suele suponer que en el año se dan 250 o 252 sesiones diarias de negociación, 52 semanales, 12 mensuales o 20 en un mes.

© Ediciones Pirámide

EJEMPLO 1.8

Con los datos del ejemplo 1.7, determinar el riesgo anual.

Resolución

Hemos determinado el valor del riesgo mensual para la rentabilidad simple y para la continua, siendo, respectivamente, 2,817747% y 2,802879%. En consecuencia, el riesgo anual, según se considere rentabilidad simple o rentabilidad logarítmica, es, respectivamente:

$$\sigma_a = \sigma_m \sqrt{12} = \begin{cases} 2{,}817747\% \times \sqrt{12} = 9{,}760962\% \\ 2{,}802879\% \times \sqrt{12} = 9{,}709458\% \end{cases}$$

Las variaciones en la rentabilidad de un activo pueden estar influenciadas por las variaciones ocasionadas en otro u otros activos. Para poner de manifiesto el grado o fuerza de la relación existente entre las rentabilidades de dos activos cualesquiera, se puede calcular tanto la covarianza como el coeficiente de correlación lineal.

La covarianza mide el grado de asociación entre dos variables, y si se dispone de una muestra en forma de serie temporal podemos estimar la covarianza poblacional entre la rentabilidad del título *i* y la del título *j* a través de la expresión[9]:

$$\text{cov}_{ij} = \sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(r_{it} - \overline{r_i}\right)\left(r_{jt} - \overline{r_j}\right)}{T-1}$$

La covarianza indica en qué medida las rentabilidades de dos acciones se mueven en el mismo o en distinto sentido. Su signo depende de cuál sea la dirección de la asociación entre r_i y r_j. Es positivo cuando se trata de una asociación positiva, es decir, los valores de r_i inferiores (o superiores) a su media tienden a estar asociados a los valores de r_j inferiores (o superiores) a su media. Es negativo

[9] Excel la calcula con la función *COVAR* y divide entre *T*. Para pasar a la estimación de la covarianza poblacional, basta con multiplicar la salida de Excel por el cociente $\frac{T}{T-1}$.

© Ediciones Pirámide

cuando se trata de una asociación negativa, de modo que, los valores de r_i inferiores (o superiores) a su media tienden a estar asociados a los valores de r_j superiores (o inferiores) a su media.

Si las rentabilidades son independientes, la covarianza es cero. En cambio, la afirmación contraria no es cierta, de modo que puede suceder que la covarianza sea nula y las rentabilidades sean dependientes. Por ello, cuando la covarianza sea cero, las rentabilidades se dicen no correlacionadas.

En síntesis, un valor positivo de la covarianza indica que las rentabilidades tienden a moverse en el mismo sentido, por lo que es probable que un rendimiento superior (o inferior) al esperado en un activo se produzca conjuntamente con un rendimiento también superior (o inferior) al esperado en el otro activo. Un valor negativo señala que las rentabilidades tienden a moverse en sentido opuesto, siendo probable que un rendimiento superior (o inferior) al esperado en un activo se produzca juntamente con un rendimiento inferior (o superior) al esperado en el otro activo. Un valor pequeño o nulo indica que la relación entre las rentabilidades es poca o nula.

No obstante lo anterior, al estar la covarianza expresada en términos absolutos, para interpretar mejor el grado de relación entre las rentabilidades de dos activos es preferible utilizar el coeficiente de correlación lineal[10]:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

EJEMPLO 1.9

Para dos activos se dispone de una muestra con cotizaciones mensuales, según se indica en el archivo *Datos L 1.* Determinar:

a) Rentabilidad media mensual simple e instantánea.
b) Riesgo mensual simple e instantáneo.
c) La covarianza y el coeficiente de correlación lineal para rentabilidades simples y para rentabilidades continuas.

[10] En Excel se calcula con la función *COEF.DE.CORREL*. Es importante observar que el programa utiliza para su cálculo tanto la covarianza como las desviaciones típicas obtenidas al dividir entre T y no al dividir entre $T - 1$. No obstante, es indiferente, pues al ser un cociente, todos los denominadores (T o $T - 1$) se simplifican y no inciden en el valor del coeficiente. Sin embargo, para obtener, a partir del coeficiente de correlación, la covarianza entre las rentabilidades de dos títulos, es preciso tener en cuenta si se toman las desviaciones típicas con T o con $T - 1$, hallándose, respectivamente, la covarianza con T o con $T - 1$.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Se exponen los resultados obtenidos de la hoja de Excel correspondientes al archivo de *Soluciones Ejemplos L 1:*

	Activo A			Activo B		
Sesión	**Cotizaciones**	**R. simple (r_t)**	**R. instantánea (k_t)**	**Cotizaciones**	**R. simple (r_t)**	**R. instantánea (k_t)**
0	20,25			30,15		
1	22,10	9,135802%	8,742281%	31,10	3,150912%	3,102290%
2	23,05	4,298643%	4,208816%	32,50	4,501608%	4,403227%
3	23,50	1,952278%	1,933465%	32,45	-0,153846%	-0,153965%
4	24,10	2,553191%	2,521142%	33,15	2,157165%	2,134227%
5	24,50	1,659751%	1,646128%	33,50	1,055807%	1,050272%
6	24,30	-0,816327%	-0,819677%	33,40	-0,298507%	-0,298954%
7	24,45	0,617284%	0,615387%	33,50	0,299401%	0,298954%
8	24,70	1,022495%	1,017303%	34,15	1,940299%	1,921715%
9	24,90	0,809717%	0,806456%	34,50	1,024890%	1,019674%
10	25,10	0,803213%	0,800004%	34,85	1,014493%	1,009381%
11	25,20	0,398406%	0,397615%	35,15	0,860832%	0,857148%
12	25,30	0,396825%	0,396040%	35,45	0,853485%	0,849863%
	R. media mensual	**1,902607%**	**1,855413%**		**1,367212%**	**1,349486%**
	Riesgo mensual	**2,616332%**	**2,510449%**		**1,383206%**	**1,356072%**
	Covarianza	0,0002385	0,00022592			
	Covarianza estimada	**0,00026018**	**0,00024646**			
	Coef. Correlación lineal	**0,71895311**	**0,72394826**			

El coeficiente de correlación lineal es un número que sirve de indicador de la intensidad o grado de la covariación lineal entre las rentabilidades de dos activos. Su objetivo es poner de manifiesto el grado o fuerza de la relación lineal existente entre las rentabilidades de dos clases de activos. Toma valores entre −1 y +1 y su significado es el siguiente:

— Para los dos valores extremos del coeficiente, −1 y +1, los valores de las rentabilidades de ambos activos están exactamente sobre una recta.

— Si toma el valor 1, las variables representativas de las rentabilidades de los activos siguen una relación lineal de pendiente positiva: $r_i = a + br_j$ con $b > 0$. Por tanto, una modificación en la rentabilidad de un activo implica otra del mismo sentido en la rentabilidad del otro activo[11].

[11] Por ejemplo, si la rentabilidad de un activo aumenta (o disminuye) 2 puntos porcentuales, la del otro también aumenta (o disminuye), aunque no exactamente 2 puntos, pues depende de la pendiente de la recta que las relaciona.

© Ediciones Pirámide

EJEMPLO 1.10

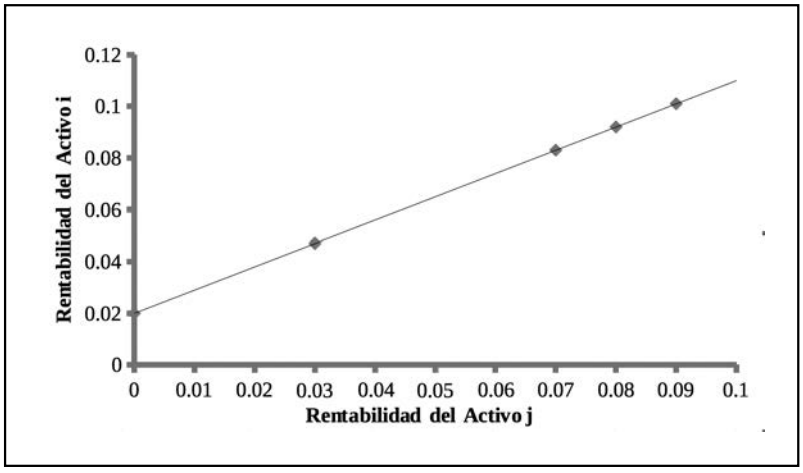
Los valores de la rentabilidad de dos activos son los siguientes:

Activo *i*	Activo *j*
0,00%	2,00%
3,00%	4,70%
7,00%	8,30%
8,00%	9,20%
9,00%	10,10%

Calcular el coeficiente de correlación lineal y representar gráficamente las rentabilidades.

Resolución

En el archivo correspondiente de *Soluciones* y con la función *COEF.DE.CORREL* se obtiene $\rho_{ij} = 1$. El gráfico es:



Se observa que, efectivamente, todos los valores están sobre una recta de pendiente positiva. La ecuación de la misma es: $r_i = 0{,}02 + 0{,}90r_j$. Vemos que al aumentar la rentabilidad del activo *j*, la del *i* también aumenta. Así, por ejemplo, al aumentar la rentabilidad del activo *j* en 4 puntos porcentuales (del 3 al 7%), la

© Ediciones Pirámide

del *i* también aumenta (del 4,70 al 8,30%), pero lo hace en 3,6 puntos porcentuales, que es el producto: 4% × 0,90.

Si el coeficiente de correlación toma el valor cero, las rentabilidades se encuentran linealmente incorrelacionadas, aunque puede existir otro tipo de correlación entre ellas. En general, si el valor que toma está próximo a cero, las rentabilidades están incorrelacionadas y no tienen relación lineal entre sí.

Si las rentabilidades son independientes, al ser la covarianza nula, el coeficiente de correlación lineal es cero. En cambio, la afirmación contraria no es cierta, de modo que puede suceder que el coeficiente de correlación sea nulo y las variables sean dependientes. En general, la independencia elimina la posibilidad de cualquier relación entre las variables representativas de las rentabilidades, mientras que la no correlación únicamente elimina las relaciones lineales.

Si toma el valor −1, las variables representativas de las rentabilidades de los activos están relacionadas a través de la ecuación de una recta de pendiente negativa: $r_i = c + dr_j$ con $d < 0$. En consecuencia, una modificación de la rentabilidad de un activo implica otra de sentido contrario en la rentabilidad del otro. Así, por ejemplo si $\rho_{ij} = -1$ y la ecuación que relaciona las rentabilidades de dos activos es $r_i = 0{,}09 - 0{,}10r_j$, al aumentar el activo *j* su rentabilidad en 2 puntos porcentuales, pasando del 7% al 9%, la del *i* disminuye en 0,20 puntos porcentuales, pasando del 8,3 al 8,1%: 2%(−0,10).

Un coeficiente de correlación positivo (o negativo) lo es cuando la covarianza también es positiva (o negativa), por lo que se puede interpretar en el mismo sentido que ya hemos señalado para ésta.

Es importante destacar que el coeficiente de correlación lineal no es propiamente una medida de tipo cuantitativo, sino que representa una medida de tipo cualitativo, pues indica únicamente el grado de intensidad de la relación lineal existente entre las dos variables representativas de las rentabilidades de dos títulos. Así, por ejemplo, si para dos activos el coeficiente de correlación lineal es 0,20 y para otros dos es 0,40, ello no implica que la relación entre los segundos activos es doblemente intensa que en los primeros, sino simplemente que es mayor.

© Ediciones Pirámide

Anexos

Anexo I: El operador *SIGMA*.
Anexo II: Conceptos básicos sobre matrices.
Anexo III: La herramienta *SOLVER* de Excel.

ANEXO I: EL OPERADOR *SIGMA*

1. Concepto

Las sumas $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ y $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_pb_p$ se pueden expresar de forma abreviada mediante la notación *sigma*:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{h=1}^{h=p} a_h b_h = \sum_{h=1}^{p} a_h b_h = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_pb_p$$

El símbolo $\sum$, sumatorio, es la letra griega mayúscula *sigma*. Es un *operador* matemático que significa adición. La expresión $\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (sumatorio de x_i desde que i vale 1 hasta que i vale n) indica que se han de sumar todos los valores de x_i desde el valor x_1 al x_n, debiendo ser n un número natural. Los números situados en la parte inferior y en la superior del signo *sigma* constituyen, respectivamente, el límite inferior y el límite superior del sumatorio. Cuando los límites del sumatorio son desconocidos o carecen de importancia, se omiten.

© Ediciones Pirámide

EJEMPLO 1.11

Desarrollar las expresiones siguientes:

a) $\sum_{k=7}^{10} x_k$

b) $\sum_{p=5}^{8} p$

c) $\sum_{i=1}^{3} x_{ij}$

d) $\sum_{k=1}^{3} x_k + \sum_{j=2}^{4} x_j$

e) $\sum_{k=1}^{n-s} x_{s+k}$

Resolución

a) $\sum_{k=7}^{10} x_k = x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$

b) $\sum_{p=5}^{8} p = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$

c) $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}$

d) $\sum_{k=1}^{3} x_k + \sum_{j=2}^{4} x_j = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3 + x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$

e) $\sum_{k=1}^{n-s} x_{s+k} = x_{s+1} + x_{s+2} + x_{s+3} + \cdots + x_n = \sum_{i=s+1}^{n} x_i$

EJEMPLO 1.12

Escribir en forma de sumatorio cada una de las expresiones siguientes:

a) $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}$

b) $5^3 + 6^4 + 7^5 + 8^6 + 9^7$

© Ediciones Pirámide

c) $\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{1}{x_7}$

d) $x_1y_1(k-1)+x_2y_2(k-2)+\cdots+x_ny_n(k-n)$

e) $(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\cdots+(x_{20}-\overline{x})^2$

Resolución:

a) $x_5+x_6+x_7+x_8+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=\sum_{i=5}^{8}x_i+\sum_{j=12}^{15}x_j$

b) $5^3+6^4+7^5+8^6+9^7=\sum_{5}^{9}k^{k-2}$

c) $\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{1}{x_7}=\sum_{5}^{7}\frac{1}{x_i}$

d) $x_1y_1(k-1)+x_2y_2(k-2)+\cdots+x_ny_n(k-n)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i(k-i)$

e) $(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\cdots+(x_{20}-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2$

---

2. Propiedades

a) El sumatorio de una suma es igual a la suma de los sumatorios:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i$$

Al desarrollar tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=$$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i$$

b) El sumatorio de una constante por una variable es igual al producto de la constante por el sumatorio de la variable:

$$\sum_{i=1}^{n}kx_i=k\sum_{i=1}^{n}x_i$$

© Ediciones Pirámide