NOMBRES

De récits en théorèmes

Victor **Delétang**



Illustrations de
Nicolas Jambon

ellipses

NOMBRES

De récits en théorèmes

Victor Delétang

ellipses

REMERCIEMENTS

Ma femme, Nathalie, et mes deux fils, Tiago et Nelson, pour leur patience ; Nicolas Jambon pour sa relecture très minutieuse et ses magnifiques illustrations ; Philippe Royer pour sa relecture critique et ses encouragements ; l'ensemble de mes professeurs de mathématiques.

Conception graphique couverture : Éric VIGIER
Conception graphique intérieur : Charline PINTO
Mise en pages : Nord Compo

ISBN 9782340-097865
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2024
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

AVANT-PROPOS

Ce livre atypique s'adresse aussi bien aux élèves de collège ou de lycée – voire aux étudiants – qu'aux passionnés ou aux simples amateurs curieux de (re)découvrir les mathématiques.

Dans ces pages, vous traverserez l'ensemble des programmes du collège et du lycée, avec parfois même quelques détours par des notions enseignées dans le supérieur ; vous y rencontrerez naturellement les différents types de nombres – des naturels aux complexes – les opérations qui les lient et les structures qui les regroupent. Vous y trouverez donc tout ce qui est enseigné en classe et bien plus encore ! Vous réaliserez probablement en chemin que les mathématiques sont plus riches et plus belles que vous ne le pensiez.

Alors que vous cheminerez ainsi à travers l'Histoire des mathématiques et ses petites histoires fictionnelles, vous y croiserez quelques noms connus et d'autres moins, depuis l'aube naissante à l'orée d'une grotte du Paléolithique jusqu'à un funeste après-midi du printemps 1832, en passant par les rivages de la Méditerranée antique, le Bagdad des Abbassides ou la Renaissance italienne…

Même si la promenade se révèle agréable, n'hésitez pas, quand vous en sentirez le besoin, à prendre des chemins de traverse, à feuilleter les pages à la recherche d'une illustration ou à suivre une idée d'un chapitre à l'autre… bref, soyez des lecteurs libres !

Bon voyage !

TABLE DES MATIÈRES

Mode d'emploi 7

Histoire 1 Une aube nouvelle 11

Chapitre 1 Compter – Nombres Entiers 15

Chapitre 2 Mesurer – Fractions 39

Histoire 2 Bienvenue chez les Pythagoriciens ! 53

Chapitre 3 Compléter – Irrationnels et relatifs 59

Chapitre 4 Écrire – Chiffres (et lettres...) 73

Chapitre 5 Grouper – Arithmétique 115

Histoire 3 Al-Khwarizmi, comparaison et réduction 139

Chapitre 6 Modéliser – Équations 145

Histoire 4 La ballade du Sieur Cardan 155

Chapitre 7 Calculer – Matrices 157

Chapitre 8 Résoudre – Nombres complexes 171

Histoire 5 Galois et les structures algébriques 185

Chapitre 9 Structurer – Congruence 193

Bibliographie 209

MODE D'EMPLOI

Ce livre est divisé en chapitres qui abordent chacun soit un concept mathématique, soit un moment de l'Histoire des mathématiques. Ces chapitres s'enchaînent en suivant, autant que possible, la chronologie historique, faite d'avancées successives ou de changements de point de vue, de généralisations ou d'applications imprévues d'idées antérieures. Il se trouve que ce cheminement est peu ou prou parallèle à celui suivi par un élève au cours de sa scolarité.

La lecture peut bien sûr s'effectuer dans l'ordre des pages, mais aussi en suivant les nombreux renvois – sous la forme « retrouvez-le au chap. 3 sect. 2 » par exemple – ou bien d'illustration en illustration, ou encore d'histoires en Histoire.

Afin que celui qui voyage dans ces pages puisse en saisir facilement les particularités les plus remarquables, les propriétés et les formules sont encadrées, afin de pouvoir être identifiées plus aisément au cœur du texte.

Quant aux passages plus techniques, souvent des démonstrations, ils apparaissent sur un fond gris afin de permettre aux lecteurs de les passer si, par goût ou par nécessité, ils ne souhaitent pas interrompre le rythme de leur lecture (les démonstrations étant l'essence même des mathématiques, il sera néanmoins important de profiter d'un temps plus calme ou plus propice à la réflexion pour les lire).

Enfin, en gras, apparaissent les concepts nouveaux dont on fournit justement une définition.

Niveaux

Chaque chapitre mathématique du livre est accompagné d'une référence au niveau correspondant de l'enseignement secondaire : « Collège », « Lycée » ou « Supérieur ». Si la plupart des notions abordées dans le livre figurent explicitement dans les programmes de l'Education Nationale, ce n'est pas le cas de certaines démonstrations ou développements pour lesquels le niveau annoncé est donc plus subjectif.

Le niveau de langue et de réflexion a été lui aussi adapté à celui de la notion abordée : plus basique pour les notions simples de niveau Collège et plus élaboré pour les notions les plus complexes de niveau Lycée ou Supérieur.

Bien sûr, en aucun cas ces indications de niveau ne doivent constituer des barrières : l'ensemble du livre est accessible au lecteur curieux, y compris les quelques paragraphes siglés « Supérieur » qui ont pour ambition d'ouvrir des perspectives au-delà du programme de mathématiques du secondaire et qui font souvent appel à plusieurs notions apparaissant dans différents chapitres de l'ouvrage.

Histoire(s)

L'histoire des mathématiques est abordée de deux façons complémentaires dans ce livre.

D'une part, des fictions romancées autour de grandes figures des mathématiques permettent au lecteur de vivre leurs découvertes « de l'intérieur ». Ces chapitres consacrés à des épisodes et des personnages de l'histoire des mathématiques sont de la pure fiction : on pourra leur reprocher d'un peu trop personnaliser l'Histoire, voire de prendre quelques libertés avec la réalité mais pas d'ennuyer le lecteur.

D'autre part, l'histoire des idées, des symboles et des techniques mathématiques est présentée au fur et à mesure de leur apparition dans le livre. Si la connaissance de l'histoire des mathématiques, de l'enchaînement et de la diffusion des idées est importante en elle-même, elle permet également de mieux comprendre comment s'est construite, brique par brique, avec parfois des hésitations ou des retours en arrière suivis de soudaines élévations, la cathédrale de nos mathématiques contemporaines.

Applications

Si ce livre fournit quelques exemples d'applications des concepts mathématiques à des situations « réelles », il occulte volontairement tout côté « utilitariste » : les seules applications qui y figurent sont donc des « énigmes » ou des jeux – de société ou sportifs.

Les mathématiques sont d'ailleurs elles-mêmes assez proches d'un jeu, dont les axiomes et la logique constituent les règles de base.

Nombres et…

Les nombres et les opérations, des plus simples au plus complexes, ne constituent pas à eux seuls toutes les mathématiques ! Ce livre consacré aux nombres est lui-même une partie d'un ensemble plus large comprenant trois tomes, partageant la même ambition d'exhaustivité et de rigueur mais aussi de vulgarisation :

- Nombres
- Figures et Solides
- Fonctions et Données

Les deux premiers tomes sont en général rassemblés de nos jours sous le nom d'**algèbre** et le dernier rassemble des théories connues sous le nom d'**analyse**.

Même si ces divisions sont classiques, la scission des mathématiques en différents domaines se révèle toujours un peu artificielle tant les liens sont nombreux, entre nombres et figures, entre courbes et fonctions ou entre théorie des nombres et analyse, par exemple !

UNE AUBE NOUVELLE

▶ Grotte du Cerdon dans l'Ain en France, il y a environ 12 000 ans

Nahar vient d'ouvrir les yeux alors que le reste de la tribu dort encore. À la lumière rasante du soleil levant, elle distingue nettement les reliefs de la paroi qui lui fait face dans la petite caverne. Une grande faille la traverse sur toute sa hauteur, abritant les outils de la tribu – armes, pierres plates ou acérées, cordes... Autour de cette faille se hérissent de plus petites fissures : l'ensemble lui rappelle la ramure des rennes.

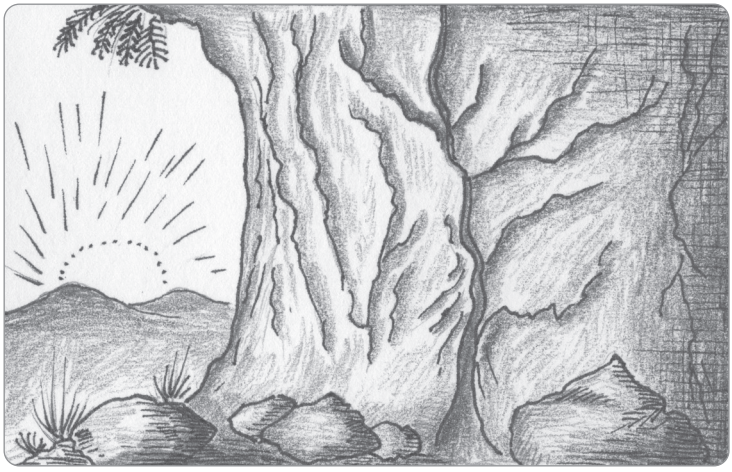


Figure 1 – À l'aube de la caverne

Source : Nicolas Jambon

Le froid de la nuit ne s'est pas encore retiré de la grotte – les corps endormis sont toujours enveloppés d'un nuage de vapeur – mais il ne mord plus aussi fort le pied de Nahar qui dépasse de la peau dans laquelle elle est enroulée.

Un jour nouveau commence !

Dans sa tribu, Nahar, du haut de ses onze printemps mutins, est une éclaireuse : elle parcourt la forêt environnante à la recherche de gibier, se fiant à ses sens aiguisés et à sa connaissance du terrain environnant. Une fois qu'elle a découvert un troupeau, elle retourne avertir les chasseurs : quel type de gibier ? où se trouve-t-il ? y a-t-il un seul animal ? une paire ? beaucoup ?

Ce matin, la petite troupe part chasser le renne, au-delà de la rivière au fond de la vallée, au-delà même de la colline qui s'embrase le soir. Le soleil est déjà haut quand les chasseurs s'arrêtent dans une grande prairie que borde

le cours d'eau, à l'orée de la forêt. C'est le moment pour Nahar de quitter le groupe et de partir en reconnaissance, seule avec sa lance à la pointe en os taillé : comme elle n'est qu'éclaireuse, elle n'est pas encore équipée du terrible propulseur qu'utilisent les chasseurs plus expérimentés.

Nahar est partie droit à travers bois, le soleil dans le dos, toujours face au vent pour ne pas alerter d'éventuels gibiers ; elle se dirige vers la clairière où, plusieurs fois déjà, elle a trouvé des rennes en pâture. Elle aime ces moments, seule dans la forêt à sentir les odeurs d'humus, à profiter du bruit du vent dans les branches hautes des arbres, tous les sens aux aguets.

La clairière est maintenant proche, juste après cette petite butte rocailleuse qui se dresse devant elle. Nahar ralentit sa course, et se met à progresser de façon plus prudente, anticipant l'emplacement du prochain pas pour éviter de faire craquer une branche ou rouler un caillou, maîtrisant son souffle jusqu'à se rendre parfaitement silencieuse. Elle gravit lentement les derniers mètres puis se couche contre le sol avant de passer la tête au-dessus du sommet de la butte pour découvrir enfin la clairière.

Cette fois-ci pas de troupeau en train de paître, mais une tribu ! Une autre tribu !

La surprise a duré une seconde et Nahar, le cœur battant la chamade, s'est immédiatement cachée derrière le rocher à sa droite. Une fois calmée, elle a pu reprendre ses esprits et jeter à nouveau un coup d'œil rapide vers la clairière. Les membres de l'autre tribu semblent communiquer à grand renfort de gestes, pointant successivement les différentes directions. Sont-ils perdus ou à la recherche de quelque chose ? En tout cas, pour Nahar qui, comme ses semblables, ne sait dénombrer qu'« un », « deux » et « beaucoup », ils sont à coup sûr « beaucoup » et même « beaucoup » « beaucoup » ! Mais sont-ils plus ou moins que le groupe de chasseurs qu'elle a quitté ce matin ? Comment le savoir ? Cette information serait pourtant importante si ces guerriers cherchaient autre chose que de nouveaux territoires de chasse et s'il devait y avoir un combat !

Depuis sa cachette, Nahar continue à jeter des coups d'œil furtifs vers la clairière et essaye mentalement d'associer chacun des guerriers qui s'y trouvent à un guerrier de son groupe[1] : le petit trapu qui s'agite avec Roac, celle qui a la cicatrice avec Anouan, celui… ah non voilà qu'ils ont bougé ! Et d'ailleurs Anouan est-il bien parti avec eux ce matin ? Nahar ne se souvient plus vraiment l'avoir vu… Elle n'y arrive pas, les chasseurs sont trop nombreux et elle ne les connaît pas. De toute façon, elle va devoir revenir rapidement auprès des siens.

1. En mathématiques modernes, nous dirions qu'elle tente d'établir une **injection** du groupe ennemi dans celui de sa propre tribu.

Nahar regarde une dernière fois la tribu dans la clairière et, soudain, elle a une idée : elle lève un doigt pour le petit trapu, un autre pour la balafrée, un autre pour celui qui est de dos… puis se rend compte, une fois que tous ses doigts sont levés, qu'il y a plus de guerriers que de doigts sur ses mains. Il aurait fallu que les guerriers soient moins nombreux ou que ses mains possèdent plus de doigts ; mais on ne peut pas changer de mains !

En revanche, on peut en dessiner une… comme lorsqu'on fait le tour de ses doigts avec un bâton dans la poussière, ou comme sur les parois de la grotte, après avoir trempé sa main dans la peinture. On pourrait alors dessiner plein de mains ou rajouter des doigts si on le voulait pour chaque guerrier ; mais la grotte, comme la poussière, ne se transporte pas !

Le soleil est en train de redescendre dans le ciel, et les quelques nuages qui le masquaient ont disparu. Chaque relief du rocher, derrière lequel Nahar se tient toujours cachée, se découpe maintenant nettement. Ainsi apparaît, juste sous son nez, une série de petites rainures parallèles qu'elle n'avait pas remarquées jusque-là, et qu'on pourrait croire gravées si on les observait à distance. Nahar hésite… elle y appose sa main… il y a plus de rainures que de doigts à sa main mais elles ont la même taille. Tout à coup la solution à son problème lui apparaît !

Ses mains n'ont peut-être pas assez de doigts et un dessin dans la poussière disparaît trop vite mais pas sa lance ! Et les rainures peuvent y être gravées aussi nombreuses que les guerriers en bas, qui semblent d'ailleurs enfin se décider sur la direction à suivre : celle d'où elle est venue !

Rapidement, elle se saisit d'une pierre dure et, dans la pointe en os de sa lance, elle grave une encoche pour chaque homme qu'elle aperçoit en bas dans la clairière. Puis, elle prend ses jambes à son cou et court, aussi vite que possible, rejoindre les chasseurs de sa tribu.

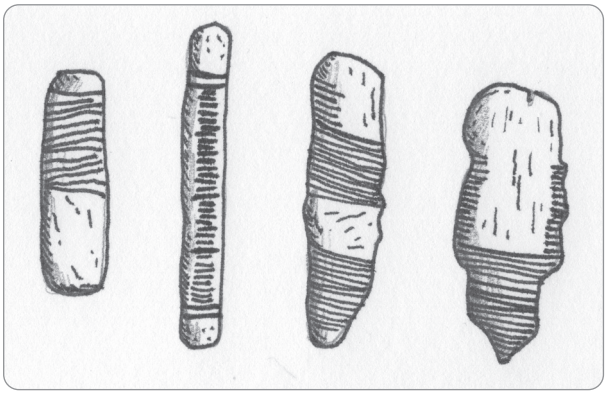


Figure 2 – Encoches paléolithiques

Source : Nicolas Jambon

Elle les retrouve à l'endroit où elle les a quittés. Ils sont en train de discuter de son absence prolongée. Anouan est bien là d'ailleurs, qui tente de convaincre les autres de se mettre en route. Quand Nahar surgit enfin, elle a beaucoup de mal à se faire entendre au milieu des questions qui fusent de toutes parts :

— Oui, elle est saine et sauve.

— Non, elle ne s'est pas perdue.

— Oui, elle vient bien de dire qu'elle a vu un groupe de guerriers d'une autre tribu dans la grande clairière.

— Oui, ils sont « beaucoup ».

Ces dernières explications mettent la tribu dans un tel émoi que Nahar doit attendre patiemment que le calme revienne pour leur montrer les encoches gravées sur sa lance, une pour chaque guerrier qu'elle a vu. Roac est le premier à comprendre ce que Nahar veut leur expliquer et il faut toute son autorité pour que les autres acceptent de se calmer et de s'aligner. Roac et Nahar n'ont plus qu'à associer un guerrier à chaque encoche pour se rendre compte qu'il y a moins d'encoches que de guerriers.

« Nous sommes plus « beaucoup » ! » s'exclame Roac. « En avant ! »

Et les autres, convaincus ou simplement disciplinés, se rangent en file indienne derrière lui, à la rencontre de leur futur.

CHAPITRE 1

COMPTER – NOMBRES ENTIERS

Vous voici donc au tout début d'un voyage en terre des nombres, long de quelques centaines de pages… À la lecture du titre de ce chapitre, vous devriez cependant vous sentir confiants et rassurés : les nombres entiers, les opérations, vous les connaissez et vous les pratiquez depuis plusieurs années déjà !

Profitons donc que vous soyez en confiance pour pimenter un peu ce premier chapitre en y introduisant une pincée d'abstraction et un zest de démonstration !

1 Nombres

COLLÈGE

Dès la préhistoire, nos ancêtres ont commencé à compter, à l'aide d'encoches sur des os, et à dessiner des figures sur les parois de leurs grottes : même si personne n'a retenu leurs noms, ce sont eux les premier(ère)s mathématicien(ne)s !

Les nombres sont donc apparus bien avant l'écriture ! Leur usage s'est ensuite développé et propagé, pendant des millénaires alors que, dans le même temps, pour communiquer, les humains utilisaient des langages de plus en plus élaborés. Malheureusement, sans trace écrite et, évidemment, sans enregistrement de l'époque, impossible d'en savoir beaucoup plus !

1 Abstraction

COLLÈGE

Ce n'est pas un hasard si le langage, comme les nombres, se sont ainsi développés simultanément : tous les deux sont liés à la capacité d'**abstraction** de l'être humain. Il s'agit d'un mot important, qui reviendra souvent dans ce livre, car il s'agit d'une des principales caractéristiques des mathématiques d'être une science abstraite ! Mais qu'est-ce que cela signifie ?

Rassurez-vous à nouveau, le fait même que vous soyez capables de lire ces lignes prouve que vous pratiquez déjà l'abstraction à un niveau élevé, sans même le savoir !

L'abstraction est une des facettes de notre intelligence qui consiste à transformer ce que nous voyons, sentons, entendons, touchons, en idées les plus générales possibles.

Vous avez, par exemple, déjà entendu parler de peinture abstraite : les formes et leurs couleurs n'y sont pas directement reconnaissables – pas de personnages, pas de paysage… la peinture abstraite s'oppose ainsi à la peinture figurative qui cherche à représenter ce que l'on voit.

Autre exemple, dans le film *Vice-Versa* des studios Pixar, pour trouver un raccourci, les personnages pénètrent dans le dangereux « hangar des pensées abstraites », où ils se trouvent progressivement réduits à une simple forme de couleur, tels le malheureux Bing Bong, éléphant en peluche, simplifié en une trompe rose. Ce même mécanisme nous permet de reconnaître dans cette lampe antique en terre cuite, une tête d'éléphant :

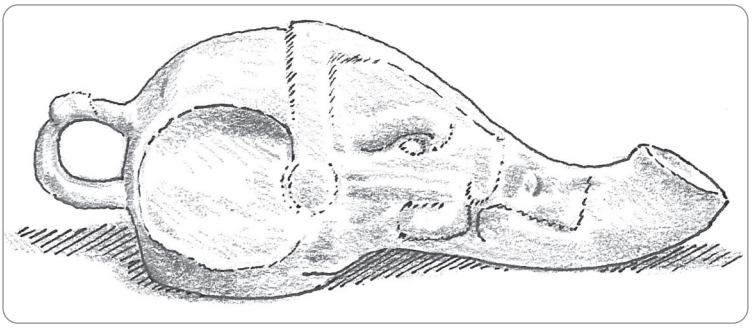


Figure 3 – Éléphant abstrait

Source : Nicolas Jambon

Si vous connaissez sans doute *Vice-Versa*, vous êtes peut-être moins familiers de Platon, un philosophe grec de l'Antiquité, qui vivait vers 400 avant J.-C. et qui relatait dans ses livres les enseignements de son maître Socrate. Une des leçons de Socrate concernait ce qu'on appelle « l'allégorie de la caverne » : des hommes enchaînés dans une grotte, dos à l'entrée, ne perçoivent du monde extérieur que son ombre projetée sur la paroi du fond de la caverne et l'écho affaibli de ses sons. Lorsqu'ils sortent de leur obscurité, ils sont éblouis et enivrés de découvrir le monde dans sa pleine lumière !



Figure 4 – La caverne des illusions

Source : Nicolas Jambon

Cette leçon fameuse repose sur une **allégorie** : une histoire qui donne une apparence à une idée compliquée. On pourrait la résumer ainsi : nous sommes comme les hommes dans leur caverne, ce que nous voyons ou sentons n'est pas vrai, nos sens nous trompent sur la réalité du monde.

Pour Platon, le « vrai » monde, que le sage doit tenter d'atteindre, est celui des **idées**, et les mathématiques constituent justement un des moyens d'accéder à ce monde des idées !

Résumons : l'abstraction consiste, par l'action de notre intelligence, à transformer le monde sensible et unique qui nous entoure en un monde d'idées générales. Mais ce monde d'idées est-il le seul véritable ? Nos sens nous mentent-ils nécessairement ? Je vous laisse y réfléchir… vous avez toute votre vie pour trouver vos propres réponses !

Monde des idées, abstraction, philosophes grecs… peut-être tout cela vous a-t-il paru un peu compliqué ! Prenons, pour finir, l'exemple du langage afin de mieux saisir ce qui se cache derrière ces notions !

Quand les enfants commencent à parler, ils comprennent que le « bonbon » qu'ils réclament – prêts à jouer la comédie d'une tristesse inconsolable en cas de refus – ne désigne pas un bonbon en particulier. Ce n'est pas nécessairement un des crocos en gélatine du paquet caché par leur mère en hauteur dans l'armoire de la cuisine, ou un des oursons en guimauve que leur père dissimule dans les tiroirs de son bureau, mais n'importe quelle nourriture aux couleurs vives et au goût sucré ou acidulé. Le mot « bonbon » est donc une abstraction de toutes les sucreries différentes qu'il désigne.

Un peu plus tard, les mêmes enfants grandissent et comprennent que derrière le mot « jaune » par exemple, se cachent un groupe d'objets, de toutes formes et toutes tailles – banane, balle de tennis, lune ou soleil – dont la seule caractéristique commune est leur couleur. Ils sont alors parvenus à un deuxième niveau d'abstraction !

Mais vous avez déjà franchi tous ces niveaux et vous êtes donc prêts à affronter la sous-section suivante…

2 Nombres entiers

COLLÈGE

Les nombres suivent la même logique : on utilise par exemple le mot « cinq » pour désigner des groupes d'objets dont la seule caractéristique commune est de comporter la même « quantité » d'éléments – éléments qui ne sont même pas forcément strictement identiques entre eux.

Il y a là deux abstractions successives ! La première est semblable à celles que nous venons de décrire concernant les bonbons ou les objets jaunes et permet de regrouper des objets, selon leur goût ou leur couleur par exemple.

La seconde est d'un genre nouveau : elle consiste à associer exactement les objets d'un groupe et ceux d'un autre. S'il y a « cinq » bonbons et « cinq » objets jaunes, c'est bien parce qu'il est possible de relier, avec un crayon ou mentalement, chaque « bonbon » du premier groupe à un « objet jaune » du second :

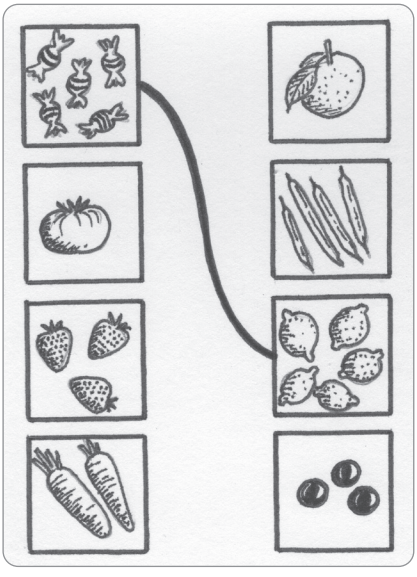


Figure 5 – Cardinaux

Source : Nicolas Jambon

À tous ces groupes dont on peut associer les éléments un à un correspond un **nombre entier**, « cinq » dans notre exemple, que l'on appelle le **cardinal** des groupes[1].

En mathématiques savantes, nous nommons cette correspondance entre ces deux groupes une **bijection**.

Bien sûr, tout ce processus d'abstraction qui mène aux mots puis aux nombres est inconscient pour le jeune enfant, comme il l'était pour les premiers humains qui ont gravé des encoches dans des os ! Nous l'avons finalement si bien intégré que je parierais que beaucoup d'entre vous viennent seulement d'en prendre conscience : comme promis, vous pratiquiez déjà l'abstraction sans le savoir !

2 Opérations élémentaires – Addition et Multiplication

COLLÈGE

Vous pouvez effectuer plusieurs manipulations avec les groupes d'objets correspondants à des nombres ; à chaque type de manipulation on associe mathématiquement une **opération**. Pour se représenter ou pratiquer ces manipulations, quoi de plus pratique pour nos ancêtres que de petits cailloux (plus faciles à saisir que des grains de sable et moins périssables que des bâtonnets) ; et c'est justement du mot « caillou », *calculus* en latin, que dérive le mot moderne de « calcul »[2] !

Quand on cherche le résultat d'une ou plusieurs opérations, on effectue donc des **calculs** de différents types, selon les manipulations : regrouper, enlever, séparer etc.

1 Addition

COLLÈGE

Débutons avec l'opération la plus simple : on peut prendre deux groupes de cailloux – **les termes** – et les regrouper en un seul ; c'est une **addition**.

Le résultat de l'addition – **la somme** – est le nombre de cailloux du nouveau groupe obtenu après regroupement de tous les cailloux.

1. Il existe en mathématiques une autre notion de nombre : les **nombres ordinaux**, qui donnent une position dans un classement, le n° 1, le n° 2 etc. En pratique dans ces pages, nous confondrons ces deux notions.
2. Et que dérive aussi, probablement, rien moins que l'invention de l'écriture ! Puis d'autres moyens de calculs plus « modernes » : abaques, bouliers etc. à retrouver au chap. 1 sect. 6.