

MATHEMATIK

für die (technische) Welt



Carsten Rathgeber

Mathematik

- für die technische Welt -

(5. Auflage – korrigiert und erweitert)

Dipl.-Ing. Carsten Rathgeber

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäß §44b UrhG („Text und Data Mining“) zu gewinnen, ist untersagt.

© 2026 Carsten Rathgeber (5. Auflage)

Herstellung und Verlag:

BoD · [Books on Demand GmbH](#), Überseering 33, 22297 Hamburg

ISBN: 978-3-7693-6939-7

Vorwort

„Ich behaupte aber, dass in jeder besonderen Naturlehre
nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne,
als darin Mathematik anzutreffen ist.“
Kant, Immanuel
Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Vorrede

Mathematik ist in unserer Welt besonders bedeutsam für wissenschaftliche und technische Gestaltungen. Sie bemüht sich um Gleichungen und deren Auflösbarkeit, um Zahlen und formale Möglichkeiten und um geometrische und dynamische Zusammenhänge. Dies muss bezogen auf die jeweiligen Realitätsaspekte (Körper, Kräfte, Bewegungen, Felder ...) geleistet (und interpretiert) werden. Die formalen Beschreibungsrealitäten und die tatsächliche (physikalische, chemische, technische, soziale ...) Welt sind abzugleichen.

Mit diesem Buch werden Grundlagen und Vertiefungsaspekte dargestellt, die aus dem Bereich der mittleren Ausbildungsjahre (Sekundarstufe I) bis zu den ersten Studienjahren reichen.

Die Inhalte werden knapp dargelegt und sind auch für die modernen Berufsausbildungen und weitere Qualifizierungen geeignet.

Dabei eignet sich das Buch auch für Seiten- und Quereinsteiger der beruflichen und dualen Ausbildungen bzw. für entsprechende Studiengänge.

Es werden Aufgaben, Lösungshinweise, Musterlösungen und ergänzende Informationen vorgestellt, die selbstständige Lern- und Arbeitsprozesse unterstützen. Hierbei werden auch weiterführende und übergreifende Aspekte thematisiert.

Hinweise, die zur Verbesserung beitragen, nehmen Autor und Verlag jederzeit gerne auf.

Inhaltsverzeichnis

Seite		Inhalte
v		Vorwort
vii-ix		Vorblätter (Werte, Symbole und Zeichen, Grundbegriffe der Mathematik, Mengenlehre)
x		Impressionen / Anregungen / Impulse
11-27	G	Grundlagen: Zahlen, Rechnen, Logik, Wurzelberechnung, Gleichungen, Algebra, Geometrie, ...
28		„Zwischenschritt“
29	S	Sekundarstufe II
29-34		Analysis (Differenzial- und Integralrechnung)
35-43		Vektorrechnung, Abbildungen, Drehungen, Determinanten, Matrizen
44-51		Stochastik, Regressionen, Ergänzungen zur Stochastik
52-70	V	Vertiefungen
52-54		Reihen etc., Analysis im komplexen Raum, Experimentelle Mathematik
55-58		DGL, PDGL, Differenzialgeometrie
59		Signalformen
60-64		Transformationen, Fourier-Reihen / -Transformation, DFT, Laplace- und z-Transformationen, ...
65-67		Zeta-Funktion (ζ ; Zeta). Elliptische Gleichungen
68-71		Vektoranalysis, Maxwellsche Gleichungen, Integralgleichungen, Wellengleichungen, Faltungen
72-90	E	Ergänzungen
72-74		Physik, Sonnensystem
75-77		Elektrische Schaltungen und Bauelemente, Antennen, Schwingungen/Oszillator, LTI, Netzwerke
78		Digitalisierte Realität, Abtastung, Dirac-Funktion (Dirac-Impuls)
79		Information in Systemen, Netzstrukturen und Matrizen
80-84		Logische Schaltungen, KVs, Gattertechnik, Rechner, Vernetzung, Software, Verschlüsselungen
85-87		Quanteninformation, Quantenrechenprozesse, Quantengatter
88-93		Licht, Bildverarbeitung
94-128	A_G	Informations- u. Aufgabenseiten (Anregungen / Grundlagen / Ergänzungen / Vertiefungen)
94		Aufgabenübersicht I (Aufgaben 1-34); Aufgabenübersicht II (Aufgaben 35-60)
95-128		Grundlagen / Sekundarstufe II (Vortest ... Aufgaben, Lösungen, Tipps, Anregungen)
129-154	A_v	Ergänzungen / Vertiefungen (Aufgaben, Lösungen, Tipps, Anregungen, Informationen)
155-157	O	Orientierungen
		Historische Hinweise
158f		Sachwortverzeichnis / „Weltbild“
160		Verzeichnis der Namen
161		Ungleichungen (II) / Sprichwörter (dt./engl.)
162		Buchstabiertafel / Morse-Code.
163		Einschätzungen zur Mathematik / Literatur, Bezüge / Autor, Kontakt
164		Notizen

Werte

n	$n^{0,5}$	$n^{1/3}$	$\lg(n)$	$n!$	n^2	n^3	$1/n$	$\exp(n) = e^n$
1	± 1	1	0	1	1	1	1	$e \approx 2,71828$
2	$\pm 1,41421$	1,259921	0,3010299	2	4	8	0,5	7,389056
3	$\pm 1,73205$	1,442249	0,47712122	6	9	27	0,3333	20,0855
4	± 2	1,58740	0,60206	24	16	64	0,25	54,598
5	$\pm 2,23606$	1,709975	0,698970	120	25	125	0,2	148,413
6	$\pm 2,44948$	1,81712	0,77815	720	36	216	0,1666	403,428
7	$\pm 2,64575$	1,91293	0,845098	5040	49	343	0,14285	1096,633
8	$\pm 2,828427$	2	0,903089	40320	64	512	0,125	2980,957
9	± 3	2,08008	0,954242	362880	81	729	0,111	8103,08
10	$\pm 3,162277$	2,154435	1	3628800	100	1000	0,1	22026,26
11	$\pm 3,316624$	2,223980	1,0413926	39916800	121	1331	0,0909	59874,14
12	$\pm 3,46410$	2,289428	1,0791812	479001600	144	1728	0,0833	162754,8
20	$\pm 4,472135$	2,7144176	1,3010299	$2,43290 \cdot 10^{18}$	400	8000	0,05	$4,8516 \cdot 10^8$
30	$\pm 5,477225$	3,1072325	1,47712125	$2,65252 \cdot 10^{32}$	900	27000	0,0333	$1,0686 \cdot 10^{13}$
50	$\pm 7,07106$	3,6840315	1,698970	$3,04140 \cdot 10^{64}$	2500	125000	0,02	$5,1847 \cdot 10^{21}$
100	± 10	4,6415888	2	$9,33262 \cdot 10^{157}$	10000	1000000	0,01	$2,6881 \cdot 10^{43}$
500	$\pm 22,3606$	7,937005	2,69897	$1,2201 \cdot 10^{1134}$	250000	$1,25 \cdot 10^8$	0,002	$1,4035 \cdot 10^{217}$

Elementare Winkelwerte

φ in deg	φ in rad	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$	φ in deg	φ in rad	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
0,1°	0,001745	0,00174532	0,99999847	0,00174533	50°	0,872664	0,76604444	0,64278760	1,19175359
1°	0,017453	0,01745240	0,99984769	0,01745506	60°	1,047197	0,86602540	0,5	1,73205080
2°	0,034906	0,03489949	0,99939082	0,03492076	70°	1,221730	0,93969262	0,34202014	2,74747741
5°	0,087266	0,08715574	0,99619469	0,08748866	80°	1,396263	0,98480775	0,17364817	5,67128181
10°	0,174532	0,17364817	0,98480775	0,17632698	90°	1,570796	1	0	∞
20°	0,349065	0,34202014	0,93969262	0,36397023	135°	2,356194	0,70710678	-0,70710678	-1
22,5°	0,392699	0,38268343	0,92387953	0,41421356	180°	3,141592	0	-1	0
25°	0,436332	0,42261826	0,90630778	0,46630765	270°	4,712388	-1	0	∞
30°	0,523598	0,5	0,86602540	0,57735026	360°	6,28318	0	1	0
40°	0,698131	0,64278760	0,76604444	0,83909963	720°	12,5663	0	1	0
45°	0,785398	0,70710678	0,70710678	1	57,295°	1	0,8414709	0,54030230	1,55740772

Zufallsziffern

Listen von Zufallsziffern wurden unter Beachtung von sinnvollen Verteilungen zusammengestellt. Sie stehen für viele Alltagsaufgaben - auch auf Schiffen und U-Booten - als einfaches Hilfsmittel zur Verfügung. Der Umfang kann beliebig groß gestaltet sein.

Zufallslisten können auch unter Verwendung von Telefonbüchern und ähnlichen Verzeichnissen von Nummern erstellt werden. So werden nach definierten Kriterien Nummern bzw. deren Anteile auf den einzelnen Seiten genutzt.

Zeilen-Nr.:

Spaltennummern

	1 ... 5	6 ... 10	11 ... 15	16 ... 20	21 ... 25	26 ... 30	31 ... 35	36 ... 40	41 ... 45	46 ... 50
1	97842	69095	25982	03484	25173	05982	14624	31653	17170	92785
	53047	13486	69712	33567	82313	87631	03197	02438	12374	40329
	40770	47013	63306	48154	80970	87976	04939	21233	20572	31013
	52733	66251	69661	58387	72096	21355	51659	19003	75556	33095
5	41749	46502	18378	83141	63920	85516	75743	66317	45428	45940
6	87569	22661	55970	52623	35419	76660	42394	63210	62626	00581
	22896	62237	39635	63725	10463	87944	92075	90914	30599	35671
	02697	33230	64527	97210	41359	79399	13941	88378	68503	33609
	20080	15652	37216	00679	02088	34138	13953	68939	05630	27653
10	20550	95151	60557	57449	77115	87372	02574	07851	22428	39189
11	47360	03571	95657	85065	80919	14890	97623	57375	77855	15735
	48481	98262	50414	41929	05977	78903	47602	52154	47901	84523
	48097	56362	16342	75261	27751	28715	21871	37943	17850	90999
	20648	30751	96515	51581	43877	94494	80164	02115	09738	51938
15	60704	10107	59220	64220	23944	34684	83696	82344	19020	84834

Zeichen, Symbole, Guillemets ... (WIN-System: <ALT> (+) Nr. → S. → Symbol/Zeichen)

(Aufruf unter win mit: Taste (Windows) + R → Menü charmap aktivieren)

Nr.	S.	Nr.	S.	Nr.	S.	Nr.	S.	Nr.	S.	Nr.	S.	Nr.	S.	Nr.	S.	Nr.	S.
Guillemets						0187	»	0171	«	0155	›	0139	‹				
1	☺	36	\$	96	`	0166		0386	Б	0421	Р	0463	І	0499	dz	05001	Ⓐ
2	☹	37	%	97	a	0167	§	0387	б	0422	Р	0464	Дз	0500	Г	05002	Ⓑ
3	♥	38	&	98	b	0168	·	0388	Б	0423	З	0465	О	0501	г	1000	Ⓒ
4	♦	39		99	c	0169	©	0389	б	0424	З	0466	О	0502	Hu	2000	Ⓓ
5	♣	40	(	100	D	0171	ª	0390	С	0425	Σ	0467	Ü	0503	р	2001	Ⓔ
6	♠	41	)	0132	„	0172	¬	0391	С	0426	І	0468	U	0504	N	2003	Ⓕ
7	•	42	*	0133	...	0173	-	0392	с	0427	ı	0469	Ü	0505	ñ	2004	Ⓖ
8	■	43	+	0134	†	0174	®	0393	Д	0428	Т	0470	ü	0506	À	2005	Ⓗ

Symbole

Alpha A, α	Epsilon E, ε	Iota I, ι	Nü N, v	Rho P, ρ	Phi Φ, φ, ϕ
Beta B, β	Zeta Z, ζ	Kappa K, κ	Xi Ξ, ξ	Sigma Σ, σ	Chi Χ, χ
Gamma Γ, γ	Eta H, η	Lambda Λ, λ	Omicron O, o	Tau T, τ	Psi Ψ, ψ
Delta Δ, δ	Theta Θ, θ	Mü M, μ	Pi Π, π	Upsilon Υ, υ	Omega Ω, ω

SI-Präfixe (Festlegung gemäß DIN 1301)				Binärpräfixe (IEC-Präfixe zur Basis 2)		
Symbol	Name	Größe	Benennung	IEC: International Electrotechnical Commission		
Y	Yotta	$(10^3)^8 = 10^{24}$	Quadrillion	Symbol	Name	Größe
Z	Zetta	$(10^3)^7 = 10^{21}$	Trilliarde	Ki	kibi	$2^{10} = 1024^1 = 1.024$
E	Exa	$(10^3)^6 = 10^{18}$	Trillion	Mi	mebi	$2^{20} = 1024^2 = 1.048.576$
P	Peta	$(10^3)^5 = 10^{15}$	Billiarde	Gi	gibi	$2^{30} = 1024^3 = 1.073.741.824$
T	Tera	$(10^3)^4 = 10^{12}$	Billion	Ti	tebi	$2^{40} = 1024^4 = 1.099.511.627.776$
G	Giga	$(10^3)^3 = 10^9$	Milliarde	Pi	pebi	$2^{50} = 1024^5 = 1.125.899.906.842.624$
M	Mega	$(10^3)^2 = 10^6$	Million	Z	exbi	$2^{60} = 1024^6 = 1.152.921.504.606.846.976$
k	Kilo	$(10^3)^1 = 10^3$	Tausend	Zi	zebi	$2^{70} = 1024^7 = 1.180.591.620.717.411.303.424$
h	Hekto	10^2	Hundert	Yi	yobi	$2^{80} = 1024^8 = 1.208.925.819.614.629.174.706.176$
da	Deka	10^1	Zehn	Informationseinheiten		
d	Dezi	10^{-1}	Zehntel	• 1 Byte = 8 bit (1 Byte entspricht einem Oktett)		
c	Zenti	10^{-2}	Hundertstel	• B: Byte		
m	Milli	$(10^{-3})^1 = 10^{-3}$	Tausendstel	• b: bit		
μ	Mikro	$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$	Millionstel	• $[I(a_i)] = [-\log_2(p(a_i))] = [-\log(p(a_i))] = \text{bit}$		
n	Nano	$(10^{-3})^3 = 10^{-9}$	Milliardstel	• $[I(a_i)] = [-\log_e(p(a_i))] = [-\ln(p(a_i))] = \text{nat}$		
p	Piko	$(10^{-3})^4 = 10^{-12}$	Billionstel	• $[I(a_i)] = [-\log_{10}(p(a_i))] = [-\lg(p(a_i))] = \text{Hartley}$		
f	Femto	$(10^{-3})^5 = 10^{-15}$	Billiardstel	Umrechnungen		
a	Atto	$(10^{-3})^6 = 10^{-18}$	Trillionstel	1 Ki ≡ 1024		
z	Zepto	$(10^{-3})^7 = 10^{-21}$	Trilliardstel	1 Mi ≡ 1048576		
y	Yokto	$(10^{-3})^8 = 10^{-24}$	Quadrillionstel	1 k ≡ 1024; 1 M ≡ 1000000		

Symbol	Erläuterung / Hinweis	Symbol	Erläuterung / Hinweis
=	gleich	∈	Element von; ist Element von
≠	nicht gleich; ungleich	∉	kein Element von; ist nicht Element von
≐	gleich gemäß Definition	{ }	Menge
≈	in etwa	{ ξ ξ = ... }	Menge aller x, für die gilt
≐	gleich bzw. fast; nahezu gleich; ungefähr	∅	leere Menge
≡	entspricht	⊂	ist Teilmenge von
~	proportional zu	⊄	ist nicht Teilmenge von
<	kleiner als	⊆	Teilmenge bzw. unechte Teilmenge von
>	größer als	⊃	Durchschnitt; geschnitten mit
>>	sehr viel größer	∪	Vereinigung; vereinigt mit
<<	sehr viel kleiner	∴	ohne
≥	kleiner als oder gleich	/	Differenzmenge
≤	größer als oder gleich	∧	und; Element von a und von b
+	und, plus	∨	oder; Element von a oder von b
-	weniger, minus	→	daraus folgt; aus ... folgt; folglich ist
·	mal, multipliziert	∀	für alle
/	geteilt durch, dividiert	∃	es existiert genau
!	Fakultätszeichen (z. B.: 3! = 1 · 2 · 3 = 6)	¬	Negation
%	Prozentzeichen	Σ	Summe
∞	Unendlich	'	Ableitung
ℵ; ℵ ₀	Aleph; Aleph-Null	∂	Differenzial
		∫	Integral

Konstanten ...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n + 1) \right) = 0,5772 \ 15664 \ 90153 \ 28606 \ 06512 \ 00082 \ 40243 \ 10421 \ 59335 \ 93992 \dots = C \text{ (Eulersche Konstante)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = 2,71828 \ 18284 \ 59045 \ 23536 \ 02874 \ 71352 \ 66249 \ 77572 \ 47093 \ 69995 \text{ (Eulersche Zahl)}$$

$$\text{Feigenbaum Konstante } \delta = 4,66920 \dots$$

$$\text{Goldener Schnitt } \tau = 1,61803 \dots$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp(bx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^n}{n!}$$

$$\binom{r}{1} = \frac{r}{1}; \binom{r}{2} = \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2}; \binom{r}{3} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots r \in \mathbb{R}$$

$$\text{Binomische Reihe: } (1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} \cdot x^n; r \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

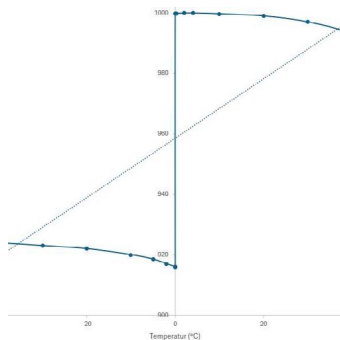
$$\sum_{k=1}^n (2k) = n \cdot (n+1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ für } |x| < 1$$

Grundbegriffe der Mathematik

Gleichungen, Benennungen, Bezeichnungen			
$a = b$	a ist gleich b	$\sim$	ist proportional, bzw. steht für Gleichmächtigkeit
$a \neq b$	a ist ungleich b	$\neg$	Negation
$a := b$	a wird durch b definiert	$\geq$	ist größer oder gleich
$a \doteq b$	definitionsgemäß ist a gleich b	$\leq$	ist kleiner oder gleich
$\equiv$	... ist identisch gleich ...	$\forall$	Allquantor (für alle)
$\approx$	ist gleich (angenähert)	$\exists$	Existenzquantor
$\approx \sim$	ist ungefähr gleich	$\rightarrow$	strebt gegen
Gleichung, Regel, Schreibweisen		Bezeichnung; Erklärung; Hinweise	
$a; b; \dots;$		Variable = Platzhalter; Terme $\rightarrow$ mit Rechenoperationen verknüpfte Zahlen bzw. Variable	
$a + b = c$		a: Summand; b: Summand; a + b: Summenterm; c: Summenterm	
$a - b = c$		a: Minuend; b: Subtrahend; a - b: Differenzterm; c: Differenzterm	
$a \cdot b = c$		a: Faktor; b: Faktor; a · b: Produktterm; c: Produktterm	
$a/b = \frac{a}{b} = a : b = c$		a: Zähler b: Nenner; a / b: Bruchterm; c: Bruchterm	
x		x: Variable	
Funktionsbegriff		$f : A \rightarrow B$: f heißt Funktion, wenn $f \subseteq A \times B$ [A: Definitionsbereich; B: Wertebereich; f: Graph der Funktion]	
$f(x)$		Funktion f in Abhängigkeit von der Variable x	
$t(n)$		Funktion t in Abhängigkeit von n	
$2 \cdot a = a \cdot 2 = a + a$		A: Variable; 2: Koeffizient (Faktor)	
$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$		Einselement	
$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$		Nullelement	
$a + b = b + a$		Die Addition ist kommutativ für a, b $\in \mathbb{R}$	
$a \cdot b = b \cdot a$		Die Multiplikation ist kommutativ für a, b $\in \mathbb{R}$	
$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$		Die Addition ist assoziativ für a, b, c $\in \mathbb{R}$	
$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$		Die Multiplikation ist assoziativ für a, b, c $\in \mathbb{R}$	
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		Die Addition und Multiplikation sind distributiv a, b, c $\in \mathbb{R}$	
$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$		$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d$	$(a + b) \cdot (c + d) = (c + d) \cdot a + (c + d) \cdot b$
Exponenten und Wurzeln			
$a \cdot a = a^2$		a: Basis; a ² : Potenzterm; 2 [² $\rightarrow$ () ²]: $\rightarrow$ Exponent	
$a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = a/a = 1$ (für a $\neq 0$)			
$a^{-b} = 1/a^b$		$(a^{1/m})^n = a^{n/m} = \sqrt[n]{a^m}$	
$b \cdot a^n + c \cdot a^n = (b + c) \cdot a^n$		$(a^n)^m = a^{nm} = a^{n \cdot m}$	
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$a^{1/m} \cdot b^{1/m} = (ab)^{1/m}$	
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$		$a^{1/m} \cdot b^{1/m} = (a/b)^{1/m}$	
$a^n/b^n = (a/b)^n$		$(a^{1/m})^{1/n} = a^{1/m \cdot n} = \sqrt[n]{a^{1/m}}$	
Logarithmen			
$\log_a b = c$	Log: Logarithmus; a: Basis; b: Numerus; n: Logarithmus	$\log_a$	
$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$	Definition	n = 2: log dualis	
$\log_a (ef) = \log_a e + \log_a f$	Logarithmus von einem Produkt	n = e: log naturalis	
$\log_a (e/f) = \log_a e - \log_a f$	Logarithmus von einem Quotienten	n = 10: log dekadischer	
$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$	Logarithmus einer Potenzfunktion	$\log_n b = \log_m b / \log_m n$	
$\log_a b^{1/n} = (1/n) \cdot \log_a b$	Logarithmus einer Wurzelfunktion		
Rechengesetze		Elementare Beziehungen	
Kommutativgesetz	$a + b = b + a; a \cdot b = b \cdot a$	$A = A$	Reflexivität
Assoziativgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$A = B \rightarrow B = A$	Symmetrie
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$A = B \wedge B = X \rightarrow A = X$	Transitivität
Mengenlehre			
$A = A; A \subset A$		Offenes Intervall: $]a, b[= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	
$A = B$: A und B sind gleich und besitzen die gleichen Elemente		Abgeschlossenen Intervall: $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	
$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 200\} \rightarrow n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ^0, 11, 12, 13 \ 14\}$		Halboffenes Intervall: $]a, b[= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	
Leere Menge $A = \{\} = \emptyset; \emptyset \subset A$		Halboffenes Intervall: $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	
$A \subset B$ und $B \subset C \rightarrow A \subset C$		Unendliches Intervall (rechts): $]a, \infty[= \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x\}$	
$A \subset B$ und $B \subset A \rightarrow A = B$		Unendliches Intervall (links): $]-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	
Operationen ...			
Zuordnungsvorschrift: $a \mapsto f(a)$	Operation: $a(b + c) = ab + ac$	Summenzeichen: $\sum_{i=1}^m a_i = a_1 + \dots + a_m$	Produktzeichen: $\prod_{i=1}^m a_i = a_1 \cdot \dots \cdot a_m$
Polynomfunktion: $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m x^m$		Zeilenvektor: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$	Spaltenvektor: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$
Summe e. geometrischen Reihe: $\sum_{v=0}^n q^v = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; n \in \mathbb{N}; q \neq 1$		Teleskop-Σ: $\sum_{i=1}^{m-1} (a_{i+1} - a_i) = a_m - a_1$	
Monom: $m_v : x \mapsto x^v; v = 0, 1, 2, \dots$			

Impressionen / Anregungen / Impulse

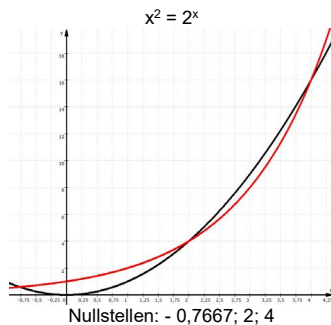
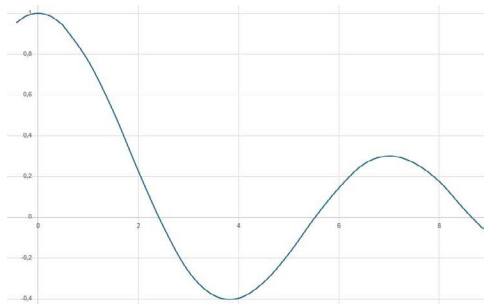


Temperaturverlauf im Süßwasser-Teich im Sommer und Winter

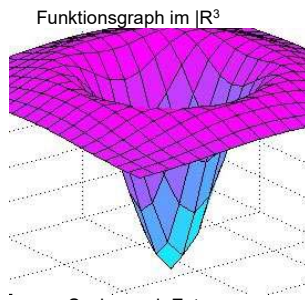
	Sommer	Winter
„oberhalb ...“	8°C	0°C
↑	7°C	1°C
↓	6°C	2°C
	5°C	3°C
Boden	4°C	4°C

Links: Wasser-Eis: Temperatur zur Dichte
Dichte-Anomalie bei 4°C (genähert)
gestrichelte Linie: Trendlinie

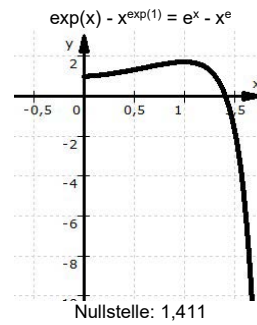
Rechts: Bessel-Funktion: Zylinderfunktion



Nullstellen: - 0,7667; 2; 4



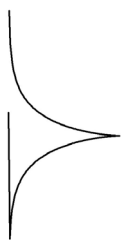
Suche nach Extrema ...



Nullstelle: 1,411

Fotos © Rathgeber, Carsten

Die Wissenschaft beschreibt mit Modellen die Realität. Der Kern der Modelle wird mathematisch formuliert. Die Beziehung der Modelle zur Welt ist selbst klärungsbedürftig. (Siehe zum Beispiel Adorno (1982), S. 209-400 („Dritter Teil: Modelle“).) In zunehmender Art werden in Wissenschaft und Technik stochastische Beschreibungen eingesetzt. Dies gilt besonders für die Physik (Quantenphänomene), die Biologie (Evolution, Mutation, Selektion, ...) und die Nachrichten- und Informationstechnik (Information als Ausdruck von Entropiebetrachtungen (→ Shannon)). Weiterhin zeigt sich, dass vielfältige Realitätsaspekte durch Methoden der KI aufgeklärt werden können. Auch bleibt die Rückfrage zur „Kausalität“ und zum „Wesensgehalt“ der Daten erhalten.



„Traktrix“

Nachweis mittels vollständiger Induktion für:

$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$ (für $n \geq 1$); F_n : Fermat-Zahlen

$F_n = 2^{2^n} + 1$; $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65537$; ...

n	$\prod_{k=0}^{n-1} F_k$	$F_n - 2$
1	3	$5 - 2 = 3$
2	$3 \cdot 5 = 15$	$17 - 2 = 15$
3	$3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$	$257 - 2 = 255$
4	$3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 = 65535$	$65537 - 2 = 65535$

(Hinweis: Bisher sind nur die Fermat-Zahlen 3, 5, 17, 257, 65537 als Primzahlen bekannt.)

Nachweis: Induktionsanfang: z. B. $n = 1 \rightarrow$ ist erfüllt

Induktionsvoraussetzung: $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$ für $n \geq 1 \rightarrow$ ist gegeben

Induktionsschluss: Schluss von n auf $n + 1$: $\prod_{k=0}^n F_k = F_{n+1} - 2$

$$\prod_{k=0}^n F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) \cdot F_n = (F_n - 2) \cdot (2^{2^n} + 1) = ((2^{2^n} + 1) - 2) \cdot (2^{2^n} + 1) = (2^{2^n} - 1) \cdot (2^{2^n} + 1) = (2^{2^n} - 1) \cdot (2^{2^n} + 1) = (2^{2^{n+1}} - 1) = (2^{2^{n+1}} + 1) - 2 = F_{n+1} - 2$$

π

π : Kreiszahl, auch Archimedes-Konstant bzw. auch Ludolphsche Zahl

Kreiszahl: $\pi = U/d = \text{Kreisumfang} \text{ geteilt durch den Durchmesser } d$; $U = d \cdot \pi = 2\pi r$; $A = \text{Kreisfläche} = \pi \cdot r^2$

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\ 82148\ 08651\ 32823\ 06647\ 09384\ 46095\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128\ 48111\ 74502\ 84102\ 70193\ 85211\ 05559\ 64462\ 29489\ 54930\ 38196\ 44288\ 10975\ 66593\ 34461\ 28475\ 64823\ 37867\ 83165\ 27120\ 19091\ 45648\ 56692\ 34603\ 48610\ 45432\ 66482\ 13393\ 60726\ 02491\ 41273\ 72458\ 70066\ 06315\ 58817\ 48815\ 20920\ 96282\ 92540\ 91715\ 36436\ 78925\ 90360\ 01133\ 05305\ 48820\ 46652\ 13841\ 46951\ 94151\ 16094\ 33057\ 27036\ 57595\ 91953\ 09218\ 61173\ 81932\ 61179\ 31051\ 18548\ 07446\ 23799\ 62749\ 56735\ 18857\ 52724\ 89122\ 79381\ 83011\ 94912\ ...$

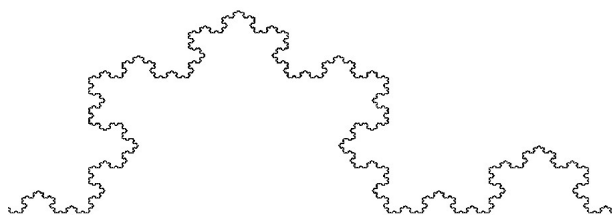
Näherungen: (22/7); (223/71); (355/113 → Kettenbruch: [3;7;15;1])

$$355/113 = 3,1415926 \dots = \pi + 0,00000026 \dots = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = [3;7;15;1]$$

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \right)$$

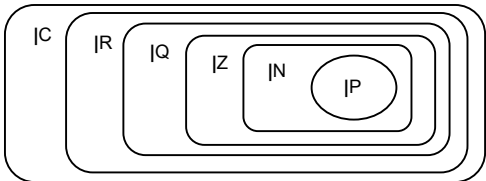
$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

→ BBP-Formel (BBP: Bailey; Borwein; Plouffe)



Koch-Kurve (Fraktal)

Zahlen

Definition der Zahl (nach Peano: eine axiomatische Begründung) 1. Null ist eine Zahl. 2. Der Nachfolger irgendeiner Zahl eine Zahl. 3. Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger. 4. Null ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl. 5. Jede Eigenschaft der Null, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu. Gemäß der axiomatischen Begründung der natürlichen Zahlen zählt das Prinzip der vollständigen Induktion zu den Axiomen.	Teilbarkeitsregeln 1. $a \mid b$ und $b \mid c \rightarrow a \mid c$ 2. $a \mid b$ und $a \mid c \rightarrow a \mid (b + c)$ 3. $a \mid b \rightarrow a \mid b \cdot c$ 4. $a \mid b_1, \dots, a \mid b_n \rightarrow a \mid (b_1 + \dots + b_n)$ 5. $a \cdot b = a \cdot c \rightarrow b = c$ Teilbarkeit • Teilbarkeit einer Zahl a durch eine Zahl b ist dann gegeben, wenn die Zahl a ohne Rest durch die Zahl b teilbar ist. • $b \mid a$: a ist teilbar durch b. b ist der Teiler von a.																				
Zahlmengen • N: Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$ • In der DIN 5473 (92-07) aus dem Jahr 1992 wurde festgelegt, dass auch die Null zur Menge $\mathbb{N}$ gehört. • Z: Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots\}$ • Q: Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ • R: Menge reelle Zahlen; $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ • C: Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \mathbb{C}$ $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + i \cdot y$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$  • Die Elemente der Primzahlmenge ($\mathbb{P}$) sind natürliche Zahlen. • Mengenbeziehungen: $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	Größter gemeinsamer Teiler (ggT) • d ist gemeinsamer Teiler von a und b, wenn gilt: $d \mid a$ und $d \mid b$ • $\text{ggT}(a, b) = 1 \rightarrow a$ und b sind teilerfremd Teilbarkeit mit Rest $a = q \cdot b + r \quad (a \neq 0; b \neq 0) \rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$ Teilbarkeit mit Rest $a = q \cdot b + r \quad (a \neq 0; b \neq 0) \rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$ Kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) • $a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; a \neq 0; b \neq 0$ • $\text{kgV}(a, b)$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b • $\text{kgV}(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot \text{kgV}(a, b)$ • ggT und kgV: $\text{ggT}(a , b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$ Rechenregeln 1. $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a)$ 2. $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(-a, b)$ 3. $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a - b, b)$ 4. $d = \text{ggT}(a, b) \rightarrow \text{ggT}(a/d, b/d) = 1$ 5. $\text{ggT}(a, b) \rightarrow \text{ggT}(a \bmod b, b)$																				
Reelle Zahlen - Einteilungen 1. Rationale Zahl $\rightarrow$ algebraische Zahl 2. Irrationale Zahl $\rightarrow$ algebraische bzw. transzendente Zahl Irrationale Zahlen: Keine Periodik in der Dezimalbruchentwicklung; unendliche Kettenbruchentwicklung Algebraische Zahl: Lösung für $\sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i = 0$ $\sqrt{2}$ ist irrational; π und e sind transzendent; Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar. Menge der reellen Zahlen ist nichtabzählbar. Mächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen gleich $\aleph_0$ (Aleph-Null). Mächtigkeit der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) gleich $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Es gilt gemäß Cichon-Diagramm: $\aleph_0 < \aleph_1 \leq \text{add}(\mathbb{L}) \leq \text{cov}(\mathbb{L}) \leq \text{non}(\mathbb{B}) \leq \text{cof}(\mathbb{B}) \leq \text{non}(\mathbb{L}) \leq \text{cof}(\mathbb{L}) \leq c = 2^{\aleph_0}$.	Teilbarkeitsregeln <table border="1"> <thead> <tr> <th>Teiler</th><th>Regel</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>Jede Zahl ist durch 1 teilbar.</td></tr> <tr> <td>2</td><td>Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.</td></tr> <tr> <td>3</td><td>Die Quersumme der Zahl muss durch 3 teilbar sein. 9234 $\rightarrow 18 \rightarrow 9$: teilbar durch 3</td></tr> <tr> <td>4</td><td>Die Zahl aus den beiden kleinsten Zahlstellen (10^1 und 10^0) muss durch 4 teilbar sein. 38924 $\rightarrow 24$ ist durch 4 teilbar: 38924 ist teilbar.</td></tr> <tr> <td>5</td><td>Die letzte Zahl ist eine 0 oder 5.</td></tr> <tr> <td>6</td><td>Die Quersumme muss durch 3 teilbar sein. Und die Zahl muss gerade sein. 379752 $\rightarrow$ Quersumme: 33 $\rightarrow$ ist durch 3 teilbar; da die Zahl gerade ist, ist sie durch 6 teilbar.</td></tr> <tr> <td>7</td><td>Wenn das Doppelte der letzten Ziffer einer Zahl, subtrahiert vom Rest der Zahl, einen durch 7 teilbaren Wert ergibt, dann ist die ursprüngliche Zahl durch 7 teilbar. Diese Prozedur kann wiederholt zur Anwendung gebracht werden. $\rightarrow 9240 \rightarrow 924 - 0 = 924 \rightarrow 92 - 8 = 84; 84 = 7 \cdot 12$ Weiterhin gilt: Die Summe der alternierenden 3er-Blöcke muss durch 7 teilbar sein. $9240 \rightarrow 009 - 240 = -231; -231 = -33 \cdot 7$</td></tr> <tr> <td>8</td><td>Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten 3 Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist. 123456 $\rightarrow 456$ ist durch 8 teilbar.</td></tr> <tr> <td>9</td><td>Die Quersumme der Zahl muss durch 9 teilbar sein.</td></tr> </tbody> </table>	Teiler	Regel	1	Jede Zahl ist durch 1 teilbar.	2	Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.	3	Die Quersumme der Zahl muss durch 3 teilbar sein. 9234 $\rightarrow 18 \rightarrow 9$: teilbar durch 3	4	Die Zahl aus den beiden kleinsten Zahlstellen (10^1 und 10^0) muss durch 4 teilbar sein. 38924 $\rightarrow 24$ ist durch 4 teilbar: 38924 ist teilbar.	5	Die letzte Zahl ist eine 0 oder 5.	6	Die Quersumme muss durch 3 teilbar sein. Und die Zahl muss gerade sein. 379752 $\rightarrow$ Quersumme: 33 $\rightarrow$ ist durch 3 teilbar; da die Zahl gerade ist, ist sie durch 6 teilbar.	7	Wenn das Doppelte der letzten Ziffer einer Zahl, subtrahiert vom Rest der Zahl, einen durch 7 teilbaren Wert ergibt, dann ist die ursprüngliche Zahl durch 7 teilbar. Diese Prozedur kann wiederholt zur Anwendung gebracht werden. $\rightarrow 9240 \rightarrow 924 - 0 = 924 \rightarrow 92 - 8 = 84; 84 = 7 \cdot 12$ Weiterhin gilt: Die Summe der alternierenden 3er-Blöcke muss durch 7 teilbar sein. $9240 \rightarrow 009 - 240 = -231; -231 = -33 \cdot 7$	8	Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten 3 Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist. 123456 $\rightarrow 456$ ist durch 8 teilbar.	9	Die Quersumme der Zahl muss durch 9 teilbar sein.
Teiler	Regel																				
1	Jede Zahl ist durch 1 teilbar.																				
2	Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.																				
3	Die Quersumme der Zahl muss durch 3 teilbar sein. 9234 $\rightarrow 18 \rightarrow 9$: teilbar durch 3																				
4	Die Zahl aus den beiden kleinsten Zahlstellen (10^1 und 10^0) muss durch 4 teilbar sein. 38924 $\rightarrow 24$ ist durch 4 teilbar: 38924 ist teilbar.																				
5	Die letzte Zahl ist eine 0 oder 5.																				
6	Die Quersumme muss durch 3 teilbar sein. Und die Zahl muss gerade sein. 379752 $\rightarrow$ Quersumme: 33 $\rightarrow$ ist durch 3 teilbar; da die Zahl gerade ist, ist sie durch 6 teilbar.																				
7	Wenn das Doppelte der letzten Ziffer einer Zahl, subtrahiert vom Rest der Zahl, einen durch 7 teilbaren Wert ergibt, dann ist die ursprüngliche Zahl durch 7 teilbar. Diese Prozedur kann wiederholt zur Anwendung gebracht werden. $\rightarrow 9240 \rightarrow 924 - 0 = 924 \rightarrow 92 - 8 = 84; 84 = 7 \cdot 12$ Weiterhin gilt: Die Summe der alternierenden 3er-Blöcke muss durch 7 teilbar sein. $9240 \rightarrow 009 - 240 = -231; -231 = -33 \cdot 7$																				
8	Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten 3 Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist. 123456 $\rightarrow 456$ ist durch 8 teilbar.																				
9	Die Quersumme der Zahl muss durch 9 teilbar sein.																				
Komplexe Zahlen: Basisdefinitionen • Kartesische Form: für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z = x + i \cdot y$ mit $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$, also $\sqrt{-1} = \pm i$ z - komplexe Zahl x - Realteil von z: $x = \text{Re}\{z\}$; y - Imaginärteil von z: $y = \text{Im}\{z\}$ • $\bar{z}$ - konjugiert komplexe Zahl zu z $\bar{z} = x - i \cdot y$ zu $z = x + i \cdot y$ • Betrag („Länge“) von z: $z = (x^2 + y^2)^{0.5}$ $z = r$: Abstand vom Nullpunkt • Trigonometrische Form: $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot \exp(i \cdot \varphi)$ $\varphi = \arg(z); z = \sqrt{a^2 + b^2} = r; \cos(\varphi) = a/r; \sin(\varphi) = b/r$ • Eulersche Formel: $\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ Quersumme Die einzelnen Zahlziffern werden addiert. Die Summe der Ziffern ist die Quersumme. Division • a teilt b: $a \mid b$ (Somit gilt: $a \cdot x = b$ mit $a, b, x \in \mathbb{Z}$) • a teilt nicht b: $a \nmid b$	Euklidischer Algorithmus zur ggT-Bestimmung Eingabe: a und b ($a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$) (1) $x = a$ und $y = b$ (2) $y = 0$, dann ist das Ergebnis: $\text{ggT}(a, b) = x$ (3) $y \neq 0$, dann sei $r = x \bmod y; x = y; y = r$; Rückkehr zur Position (2). [$\rightarrow$ Basis für die Bestimmung von Kettenbrüchen.] Erweiterter Euklidischer Algorithmus $a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; a \neq 0; b \neq 0; \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$																				

Zahlen

Primzahlen

- Definition: Eine ganze Zahl, die nur durch sich selbst und durch eins ohne Rest teilbar ist, ist eine Primzahl (p).
 $|P|$: Menge der Primzahlen; $p \in |P|$
 - Alle natürlichen Zahlen besitzen eine eindeutige Primfaktorzerlegung:
 $n = \prod_{p \in |P|} p^{VT(n;p)}$, wobei VT angibt, wie oft p Teiler von n ist.
 - Z. B.: $72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3$; $74 = 2 \cdot 37$; $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009

Primteiler

$n \in \mathbb{Z}$, p ist eine Primzahl. Es sei: $p \mid n$. Dann ist p ein Primteiler von n .

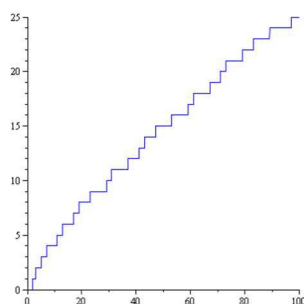
Zahl – Primzahlpotenzdarstellung

Zahl	Prim-Potenz	Zahl	Prim-Potenz
$4 = 2^2$	2	$14 = 2^1 \cdot 7^1$	2
$5 = 5^1$	1	$15 = 3^1 \cdot 5^1$	2
$6 = 2^1 \cdot 3^1$	2	$16 = 2^4$	4
$7 = 7^1$	1	$17 = 17^1$	1
$8 = 2^3$	3	$8 = 2^1 \cdot 3^2$	3
$9 = 3^2$	2	$19 = 19^1$	1
$10 = 2^1 \cdot 5^1$	2	$20 = 2^2 \cdot 5^1$	3
$11 = 11^1$	1	$21 = 3^1 \cdot 7^1$	2
$12 = 2^2 \cdot 3^1$	3	$22 = 2^1 \cdot 11^1$	2
$13 = 13^1$	1	$23 = 23^1$	1

Primzahlen - Kurvenverlauf

Primzahlen bis 100:

2, 3, 5, 7,
11, 13, 17, 19,
23, 29,
31, 37,
41, 43, 47,
53, 59,
61, 67,
71, 73, 79,
83,
91, 97



Primzahlbeziehungen

- Wenn $2^n - 1$ prim ist, dann ist n prim.
- $p \equiv 1 \pmod{4} \rightarrow (p - 1)/2$ ist gerade
- $p \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow (p - 1)/2$ ist ungerade

Postulat von Joseph Bertrand

Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$

Siebe

- Vorgehensweisen verstanden, durch die systematisch Zahlen als Nicht-Primzahlen erkannt werden können. Von Bedeutung sind nur Zahlen mit ungeraden Endungen.
- Auch sind Zahlen mit den Endungen 0, 2, 4, 5, 6, 8 keine Primzahl. Dabei sind 2 und 5 aber prim.
- Vielfache von Primzahlen – wie $n \cdot 3$ (3; 6; 9; 12; ...) oder $n \cdot 13$ (= 13; 26; 39; 52; 65; ...) sind ebenfalls nicht prim.

Sieb des Eratosthenes

Idee: Alle Primzahlen und echten Vielfachen der Primzahlen werden gestrichen. Es bleiben die unbekannten Primzahlen erhalten.

Algorithmus (Sei $n \in \mathbb{N}$):

- $P = \{2; 3; \dots; n\}$
 $i = 1$ (p_i ist das i -te Element von P)
- p_i existiert nicht. Oder aber $p_i > n^{0.5}$: gehe zu Pos (4.)
- Entferne alle Vielfache von p_i aus P .
(Entferne: $k \cdot p_i$ aus P ; $k \in \mathbb{N}$ und $2 \leq k \leq n / p_i$.
Setze: $i = i + 1$. - Gehe zu 2.
- Ausgabe von P und Abschluss.

Primzahlzwillinge; Primzahltrillinge

- p : Primzahl
- $(p, p + 2)$ ist ein Primzahlzwilling, wenn $p + 2$ auch prim ist.
- $(p, p + 2, p + 4)$ ist ein Primzahltrilling, $p + 2$ und $p + 4$ auch Primzahlen sind.
- Es gibt mit (3, 5, 7) nur einen Primzahltrilling

Zusammengesetzte Zahl

- Jede Zahl $n > 1$, die nicht prim ist, ist zusammengesetzt.
- 1 ist dabei keine Primzahl.
- Jede zusammengesetzte Zahl n hat zumindest einen Primteiler p mit $1 < p \leq n^{0.5}$

Primfaktorzerlegung

- Jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist ein Produkt von Primzahlen.
- Die Primzahlen sind eindeutig bestimmt.

Mersenne'sche Primzahlen

- $M_n = 2^n - 1$; bekannt sind (Jahr 2010) 47 Zahlen.
- Vermutlich gibt es unendlich viele Mersenne'sche Primzahlen.
- Z. B.: 3 ($p=2$); 7 ($p=3$); 31 ($p=5$); 127 ($p=7$); 8191 ($p=13$); 131071 ($p=17$); 524287 ($p=19$); 2147483647 ($p=31$); ...
 $2^{136279841} - 1$ (entdeckt im Oktober 2024)
- Eine vollkommene Zahl korrespondiert jeweils mit M_n .

Teiler einer Primzahl

Teiler von p : 1 und p ; $\tau(p) = 2$
Teiler von p^n : 1, p , p^2 , p^3 , ..., p^n ; $\tau(p^n) = n + 1$

Kanonische Primfaktorzerlegung

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \notin \{-1, 0, 1\}$ gilt:
 $n = \pm p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ ($\rightarrow$ kanonische Primfaktorzerlegung)
 $p_1, p_2, \dots, p_r$: Primzahlen
 $e_1, e_2, \dots, e_r$: Exponenten (ganzzahlig mit $e_i \geq 1$)

Größte bekannte Primzahlen

Dies verändert sich durch Computeranalysen immer wieder:

$2^{521} - 1$; $2^{607} - 1$; $2^{2281} - 1$; $2^{1257787} - 1$; $2^{6972593} - 1$;
 $2^{13466917} - 1$; $2^{24036583} - 1$; $2^{25964951} - 1$; $2^{136279841} - 1$

Zahlen

Teilerfremde Zahlen

- Zahlen, die keine gemeinsamen Teiler haben, sind teilerfremd.
Beispiele: $\varphi(6) = 2$ (teilerfremde Zahlen zur 6 sind: 1; 5)
 $\varphi(8) = 4$ (teilerfremd zur 8 sind: 1; 3; 5; 7)
- Primzahlen haben nur teilerfremde Zahlen; $\varphi(p) = p - 1$.
- Teilerfremde Zahlen:** Für die Anzahl $\varphi(n)$ der teilerfremden Zahlen zur Zahl n gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\varphi(n)$	4	10	4	12	6	8	8	16	6

Teiler einer Zahl

- p, q sind Primzahlen. $n \in \mathbb{N}$. $d \mid n$ mit $d > 0$.
 $\tau(n)$: Teileranzahlfunktion
 $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $\tau(n) = \sum 1$ (1 jeweils für $d \mid n$)
 $\tau(1) = 1$ (und dies ist auch nur bei $n = 1$ gegeben.)
 $\tau(n) = 2$ (dies ist nur für Primzahlen ($n = p$) gegeben.)

n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$	n	$\tau(n)$
1	1	6	4	11	2
2	2	7	2	12	6
3	2	8	4	13	2
4	3	9	3	14	4
5	2	10	4	15	4

Kongruenzen

- $a, b \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$; $m > 1$
 a ist kongruent zu b modulo m , wenn $m \mid (a - b)$
 $m \mid (a - b) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$; $m \nmid (a - b) \Leftrightarrow a \not\equiv b \pmod{m}$

Mod-Einsichten

- $\forall p > 5$ gilt: $p \equiv 1 \pmod{6}$ oder aber $p \equiv 5 \pmod{6}$
 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \bmod m = b \bmod m$

Rechenregeln (modulo)

- $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$
- $(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$
 - $(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$
 - $a \equiv a \pmod{m}$
 - Ist $a \equiv (b \bmod m)$ und $b \equiv c \pmod{m}$, dann gilt: $a \equiv c \pmod{m}$
 - $a \equiv b \pmod{m}$, so gilt: $a + c \equiv b + c \pmod{m}$
 - $a \equiv b \pmod{m}$, so gilt $ac \equiv bc \pmod{m}$
 - $ac \equiv bc \pmod{m}$ und gilt $\text{ggT}(c, m) = 1$, so folgt: $a \equiv b \pmod{m}$
 - $ac \equiv bc \pmod{m}$ und gilt $\text{ggT}(c, m) = d$, so folgt: $a \equiv b \pmod{m/d}$
 - $a \equiv b \pmod{m}$, so gilt $a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lineare Diophantische Gleichungen

- $a \cdot X + b \cdot Y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$
- Lösungen** (Es sei $d = \text{ggT}(a, b)$)
1. $d \mid c \rightarrow$ es existiert eine Lsg.; 2. $d \nmid c \rightarrow$ es existiert keine Lsg.

Reduzierte lineare Diophantische Gleichungen

- Es sei mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 $a \cdot X + b \cdot Y = c$ eine lineare Diophantische Gleichung
Nun sei: $d = \text{ggT}(a, b)$; $a^* = a/d$; $b^* = b/d$; $c^* = c/d$
Dann gilt: $a^* \cdot X + b^* \cdot Y = c^*$ ist die zu $a \cdot X + b \cdot Y = c$ reduzierte lineare Diophantische Gleichung.

Lineare Kongruenz

- $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$; $aX \equiv b \pmod{m}$
Es gilt hierfür:
 $ax \equiv b \pmod{m}$ für ein $x \in \mathbb{Z}$, so folgt: $a(x \bmod m) \equiv b \pmod{m}$
 $ax \equiv b \pmod{m}$ für ein $x \in \mathbb{Z}$, so folgt:
 $a(x + km) \equiv b \pmod{m} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Chinesischer Restsatz

- $m_1, m_2, \dots, m_r$ sind natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$), die paarweise teilerfremd sind. Weiterhin sind $a_1, a_2, \dots, a_r$ ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$).

Es sei $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$

Nun gibt es ein $x_{\text{Ergebnis}} \in \mathbb{Z}$, mit dem sich ergibt:

- $x_{\text{Ergebnis}} \equiv a_1 \pmod{m_1}$
- $x_{\text{Ergebnis}} \equiv a_2 \pmod{m_2}$
- $x_{\text{Ergebnis}} \equiv a_3 \pmod{m_3}$

etc.

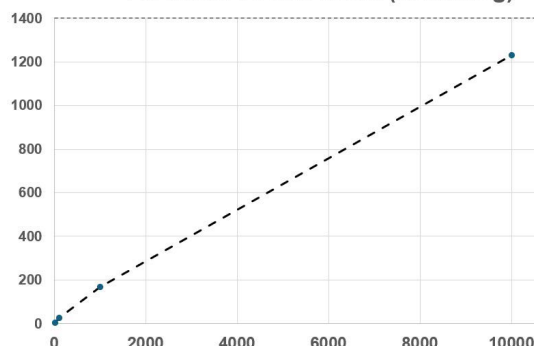
Algorithmus (zur Lösung simultaner linearer Kongruenzen)

- Eingabe: r lineare Kongruenzen
 $X \equiv a_i \pmod{m_i}; 1 \leq i \leq r$
- $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$
- Bestimmung von $M_i = M / m_i \quad \forall i$ mit $1 \leq i \leq r$
- Bestimmung von x_i für jedes M_i bezüglich $M_i \cdot X \equiv 1 \pmod{m_i}$ unter Nutzung des erweiterten Euklidischen Algorithmus
- $x_{\text{Ergebnis}} = a_1 \cdot M_1 \cdot x_1 + \dots + a_r \cdot M_r \cdot x_r \pmod{M}$

Primzahl-Anzahl

n	$\pi(n)$
10	4
100	25
1.000	168
10.000	1229
100.000	9592
1.000.000	78498
10.000.000	664579
100.000.000	5761455
1.000.000.000	50847534
10.000.000.000	455052511
100.000.000.000	4118054813
1.000.000.000.000	37607912018

Anzahl der Primzahlen (Näherung)

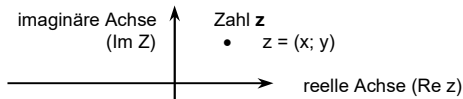


Komplexe Zahlen

Geschichte

- Erste Darstellung zu komplexen Zahlen durch Cardano (1501 - 1576) um 1545
- 1572 erste Angabe zu imaginären Zahlen mit $(-1)^{0.5}$; $(-1)^{0.5} = -1$ bei Bombelli (1526 - 1573)
- Descartes (1596-1650) erkannte komplexe Nullstellen
- Giraud (1595-1632) beschrieb imaginäre Nullstellen
- Euler (1707-1783): korrekte Berechnung komplexer Zahlen

Zahlenebene



Basisdefinitionen

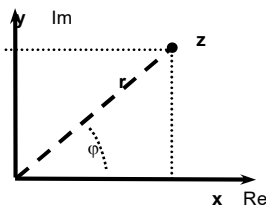
- **Kartesische Form:** für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z = x + i \cdot y$
mit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$, also $\sqrt{-1} = \pm i$
 $\sqrt{-1} = i \cdot (-1)^n$ mit $n \in \{0, 1\}$
- z - komplexe Zahl
- x - Realteil von z : $x = \operatorname{Re}\{z\}$
- y - Imaginärteil von z : $y = \operatorname{Im}\{z\}$
- $\bar{z}$ - konjugiert komplexe Zahl zu z
 $\bar{z} = x - i \cdot y$ zu $z = x + i \cdot y$
- Betrag („Länge“) von z : $|z| = (x^2 + y^2)^{0.5}$
 $|z| = r$: Abstand vom Nullpunkt
- **Trigonometrische Form:** $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot \exp(i \cdot \varphi)$
 $\varphi = \arg(z)$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$; $\cos(\varphi) = a/r$; $\sin(\varphi) = b/r$
- **Eulersche Formel:** $\exp(i \cdot \varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Rechenregeln

- $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$; $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$
- $z_1 + z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 + x_2 + i \cdot (y_1 + y_2)$
- $\operatorname{Re}\{z_1 + z_2\} = x_1 + x_2$; $\operatorname{Im}\{z_1 + z_2\} = y_1 + y_2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$
- $z_1/z_2 = (r_1/r_2) \cdot \exp(i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2))$

Dreiecksungleichung

- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{\bar{z}}$



- $x = r \cdot \cos(\varphi)$; $y = r \cdot \sin(\varphi)$; $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi))$
- φ - Argument von z : $\arg(z) = \varphi$; $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$
- φ ist der Winkel zwischen der x_+ -Achse und der gedachten Verbindungslinie vom Nullpunkt zu z ; $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$

Verwendbarkeiten

$$\cos(3x) = \operatorname{Re}(\exp(i3x)) = \operatorname{Re}(\exp(ix)^3) = \operatorname{Re}(\cos(3x) + i \cdot \sin(3x))^3$$

$$= (\cos(3x))^3 - 3 \cdot \cos(3x) \cdot (\sin(3x))^2 = 4 \cdot (\cos(3x))^4 - 3 \cdot \cos(3x)$$

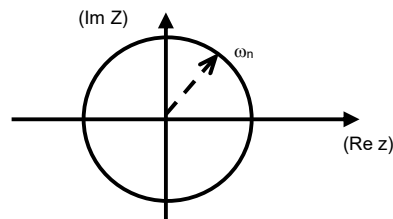
Hinweis

$$\sqrt{-1} = 1 \cdot (-1)^n \text{ mit } n \in \{0, 1\}$$

Moirvesche Formeln

- $\cos(x) = 0,5 \cdot (e^{+ix} + e^{-ix})$
- $\sin(x) = (1/(2 \cdot i)) \cdot (e^{+ix} - e^{-ix})$
- $\log(i) = (i \cdot \pi)/2$
- $z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$ da gilt:
 $(r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)))^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$
- $z^n = w = |w| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$
- Für w können n Lösungswerte ermittelt werden.
- Jede Wurzel ist eine Lösung:
 $z_k = (|w|)^{1/n} \cdot (\cos(\alpha/n + (2 \cdot k \cdot \pi)/n) + i \cdot \sin(\alpha/n + (2 \cdot k \cdot \pi)/n))$
mit $k = 0; 1; 2; \dots; n-1$
- Die z_k -Werte liegen auf einem Kreis in gleichmäßiger Anordnung.
Der Radius beträgt $(|w|)^{1/n}$.

Nullstellenlage: $\omega_n = \exp(2 \cdot \pi \cdot i/n)$



Logarithmen

- $w = \log z$ mit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
→ $\exp(w) = \exp(\log z)$
→ $e^w = e^{\log z} = z$
- $w = \ln |z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi)$; mit $k \in \mathbb{Z}$

Exponentialfunktion (→ exp)

- $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ mit $z \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$
- $\exp(z + i2\pi) = \exp(z)$
- $(\exp(z))' = \exp(z)$
- $\exp(0) = \exp(i2\pi) = 1$
- $\exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(i \cdot y) = \exp(x) \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$
- $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}\{z\})$
- $\arg(\exp(z)) = \operatorname{Im}\{z\}$
- $\exp(z) = \sinh(z) + \cosh(z)$
- $\sin(z) = -i/2 (\exp(iz) - \exp(-iz))$
- $\cos(z) = 1/2 (\exp(iz) + \exp(-iz))$
- $\sinh(z) = 1/2 (\exp(z) - \exp(-z))$
- $\cosh(z) = 1/2 (\exp(z) + \exp(-z))$
- **Matrix-Exponentialfunktion ($\mathbf{A}$: Matrix; $\mathbf{A} \rightarrow \exp(\mathbf{A})$)**
 $\exp(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}} := \lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_{m=0}^k \frac{\mathbf{A}^m}{m!} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!})$
 $\exp(i \cdot 0) = 1$ $\exp(\pm \pi/2) = \pm i$
 $\exp(i \cdot \pi) = -1$ $\exp(\pm i \cdot \pi/4) = 0,5 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 \pm i)$

Möbius-Transformation

$$\alpha(z) = w = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \frac{a}{c} - \frac{a \cdot d - b \cdot c}{c \cdot (c \cdot z + d)}$$

$$\text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a \cdot d - b \cdot c) \neq 0$$

Die Transformation überführt Kreise u. Geraden in Kreise u. Geraden.

Gerade durch Null ↔ Gerade durch Null.

Gerade nicht durch Null ↔ Kreis durch Null.

Kreis nicht durch Null ↔ Kreis nicht durch Null.

Reelle Achse ↔ reelle Achse.

Imaginäre Achse ↔ imaginäre Achse.

Obere Halbebene ↔ untere Halbebene.

Rechte Halbebene ↔ rechte Halbebene.

Linke Halbebene ↔ linke Halbebene.

Einheitsperipherie ↔ Einheitsperipherie.

Zahlen: Quaternionen etc.

Quaternionen

- Erste Annäherung durch Euler um 1748 und Bezüge zu Quaternionen durch Gauss um 1819
- Entdeckung durch Hamilton um 1830 (Veröffentlichung 1843)
- Begriffsdeutung - Quaternionen: „Menge der Vier“
- Definition durch Hamilton: $q = a + bi + cj + dk$
mit: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
- |H: Menge der geordneten Quadrupel reeller Zahlen
- Quadrupel: $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$; x_0, x_1, x_2, x_3 : Koordinaten von x
Rechenregeln: x und y seien Quadrupel, dann gilt
 $x + y := (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
 $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \lambda \cdot x_3)$
Es gilt: $e_0 = (1, 0, 0, 0)$; $e_1 = (0, 1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 0, 1)$
Mit e_0 Einselement der Multiplikation; weiterhin gilt:
 $e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2 \cdot \delta_{ij}$, mit $i, j = 1, 2, 3$ und δ : Kronekersymbol
Es gilt $e_1 \cdot e_2 = e_3$; $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$; $e_i e_j = -e_j e_i$ mit $i \neq j$;
 $e_{i+1} e_{i+2} = e_{i+2}$ ($i = 0; 1; 2$)
Neutrales Element: $(0, 0, 0, 0)$
- |H und |C werden als Vektorräume verstanden
- $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$
Skalarteil (Sc(x)): x_0 ; Vektorteil (Vec(x)): $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$
 $\rightarrow x = x_0 + \mathbf{x}$
 $\rightarrow \text{Sc}(|H) = \mathbb{R}$ und $\rightarrow \text{Vec}(|H) = \mathbb{R}^3$

- **Cayley-Tafel** zur Beschreibung der Quaternionen-Multiplikationen

	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Regeln

$\text{Sc}(x) = (x + \bar{x})/2$	$\text{Vec}(x) = (x - \bar{x})/2$
$x\bar{x} = \bar{x}x = x ^2$	$\bar{\bar{x}} = x$
$\bar{x}y = \overline{yx}$	$ x \cdot y = x \cdot y $
$ x \cdot y = x \cdot y $	$ x = \bar{x} $
$\bar{\bar{x}} = x$	$x^{-1} = \bar{x} / (x ^2)$

Bernoulli-Zahlen

- Symbol: B_n (rekursive Definition mit $B_0 = 1$): $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$; $n \geq 2$
- $n = 2$: $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = \sum_{k=0}^1 \binom{2}{k} B_k = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0$
mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ folgt: $B_0 + 2 \cdot B_1 = 0 \rightarrow 1 + 2 \cdot B_1 = 0 \rightarrow B_1 = -1/2$
- $B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = \dots = 0$

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14
B_n	1	-1/2	1/6	-1/30	1/42	-1/30	5/66	-691/2730	7/6
- Hinweise: Die Indizierung erfolgt in der Literatur unterschiedlich.
Eine direkte Definition kann mit einer erzeugenden Funktion $G(z)$ vorgenommen werden. Z. B.: $G(z) = z/2 \cdot \coth(z/2) - z/2$
Weiterhin gilt (siehe DIN 13 301): $\frac{x}{\exp(x) - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} B_k$
Bernoulli-Zahlen sind bedeutsam u. a. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kombinatorik).
- **Bernoullische Polynome** $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \cdot x^{n-k}$
- Clifford hat die Quaternionen um 1876 auf $\mathbb{R}^n$ erweitert. Dies führte zur Entdeckung der **Clifford-Zahlen**. Für diese Zahlen gilt z. B.: $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$ für $i \neq j$ und $i, j = 1, 2, \dots, n$. Es gilt dabei: $e_i^2 = e_j^2 = 1$ etc.

Stirling-Zahlen

- 0. Art: $(z) = \sum_{j=1}^n s(l, j) \cdot z^j = \sum_{j=0}^{\infty} s(l, j) \cdot z^j$ mit (untere Faktorielle als erzeugende Funktion): $(z)_k = z(z-1)(z-2) \dots (z-k+1)$
- 2. Art: $(z) = \sum_{j=1}^n S(l, j) \cdot z^j = \sum_{j=0}^{\infty} S(l, j) \cdot z^j$ mit (obere Faktorielle als erzeugende Funktion): $(z)^k = z(z+1)(z+2) \dots (z+k-1)$
- **Stirling-Inversionsformel**
 $\sum_{j=k}^l s(l, j) \cdot S(j, k) = \sum_{j=0}^l s(l, j) \cdot S(j, k)$
Es gilt auch: $S_{n, k} = S_{n-1, k-1} + k \cdot S_{n-1, k}$ mit $n, k > 0$
mit $S_{0,0} = 1$; $S_{0,k} = 0$ für $k > 0$, $S_{n,0} = 0$ für $n > 0$
- Formel von Stirling
 $\log(n!) = \log(2) + \log(3) + \dots + \log(n) = \sum_{k=2}^n \log(k)$

Abfolge der Primzahlen

- Endungen der Primzahlen: ungerade, keine 5, z. B.: 11, 13, 17, 19
- Empirisch zeigt sich, dass auf eine Primzahl mit einer Endung „1“ in etwa 19 % der Fälle wieder eine „1“, in etwa 30 % der Fälle eine „3“ oder eine „7“ und in etwa 22 % der Fälle eine „9“ folgt.
- Insofern liegt keine Normalverteilung vor.

Großer Satz von Fermat

- $x^n + y^n = z^n$
 $n = 1$: immer erfüllt, z. B.: $3 + 6 = 9$
 $n = 2$: erfüllt z. B. für $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$
Für $n > 2$ gibt es keine Lösung, was Fermat vermutet hat – und nach eigener Bekundung auch bewiesen hat. (Er konnte wohl, so wird heutzutage vermutet, für $n \in \{3, 4\}$ einen Beweis finden.)
- Der allgemeine Beweis dafür wurde dann erst nach langen Vorarbeiten von Wiles 1994 erbracht.
- Mit dem Satz von Fermat verbinden sich Überlegungen zu elliptischen Kurve und zu Modulformen.
(Jede elliptische Kurve besitzt eine Modulform.)
- Der Satz von Fermat ist ein Spezialfall der ABC-Vermutung.
- Mit der verallgemeinerten ABC-Vermutung kann eine konstruktive Lösungsannäherung mit Blick auf das großen Satz von Fermat gefunden werden.

ABC-Vermutung der Zahlentheorie

- Sie wurde 1985 von Joseph Oesterlé und David Masser entdeckt.
- ABC sei ein Tripel von natürlichen Zahlen (n) (größer Null), wobei A und B teilerfremd sind. C ist die Summe von A und B.
C ist teilerfremd zu A und zu B.
- Ein Radikal $\text{rad}(n)$ ist ein Produkt der Primfaktoren der Zahl n , wobei jeder Primfaktor nur einmal auftritt.
[Z. B.: $\text{rad}(2^3 \cdot 13^2) = \text{rad}(1352) = 2 \cdot 13 = 26$]
- Ein ABC-Treffer liegt vor, wenn $\text{rad}(ABC) \leq C$ gilt.
- Beispiele
Bspl. 1: $A = 5^1$; $B = 27 = 3^3$; $C = A + B = C = 32 = 2^5$
 $\rightarrow \text{rad}(ABC) = \text{rad}(5 \cdot 27 \cdot 32) = \text{rad}(4320) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$
 $\rightarrow \text{rad}(ABC) = 30 < C = 32$
 $\rightarrow$ Es liegt ein **ABC-Treffer** vor.
Bspl 2: $A = 3^4 \cdot 5^1 = 405$; $B = 2^4 \cdot 7^1 = 112$;
 $A + B = C = 517 = 11 \cdot 47$
 $\rightarrow \text{rad}(3^4 \cdot 5^1) = 15$; $\text{rad}(2^4 \cdot 7^1) = 14$; $\text{rad}(11 \cdot 47) = 517$
 $\rightarrow \text{rad}(A \cdot B \cdot C) = \text{rad}(405 \cdot 81 \cdot 517) = 15 \cdot 14 \cdot 517 = 108570$
 $\rightarrow \text{rad}(ABC) > C$
 $\rightarrow$ Es liegt **kein ABC-Treffer** vor.
Die Frage ist, wieviel Treffer es insgesamt gibt.
Vermutet wird, dass es nur eine endliche Anzahl gibt.
- Verallgemeinert gilt für drei teilerfremde Zahlen ($A, B, C = A + B$):
 $\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\varepsilon) \left(\prod_{p|ABC} p \right)^{1+\varepsilon}$. A, B, C sollen prim sein.
[] wird über das Produkt aller p bestimmt, die Primteiler von ABC sind. Wobei jeder Primteiler nur einmal eingesetzt wird. Der Exponent $1 + \varepsilon$ soll größer als 1 sein und gegen 1 konvergieren.
Ein allgemein anerkannter Beweis für die Vermutung liegt bisher nicht vor. Ein Beweis (Inter-universal Teichmüller theory: IUT-Theorie) wurde im Jahr 2012 von Shinichi Mochizuki vorgelegt, der von Peter Scholze (Fields-Preisträger) und Jakob Stix bestritten wird.

Stirling-Zahlen erster Ordnung

$j = i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	-1	2	-6	24	-120	720	-5040
2	0	0	1	-3	11	-50	274	-1764	13068
3	0	0	0	1	-6	35	-225	1624	-13132
4	0	0	0	0	1	-10	85	-735	6769
5	0	0	0	0	0	1	-15	175	-1960
6	0	0	0	0	0	0	1	-21	322
7	0	0	0	0	0	0	0	1	-28
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1