

en complément

Sujets-types
épreuve anticipée
du Bac

1^{re}

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

3^e édition



**1001 EXERCICES
CORRIGÉS
DE MATHÉMATIQUES
POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ**

1^{re}

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

1^{re}

3^e édition

Konrad Renard

Enseignant au lycée français international Marguerite Duras
à Hô Chi Minh-Ville, Vietnam



Du même auteur chez le même éditeur

Retrouvez tous les livres du même auteur chez le même éditeur
sur www.editions-ellipses.fr



Je remercie Anne LE VAN RA et Antoine BOUTROIS pour leurs relectures attentives.

ISBN 9782340-114487

Dépôt légal : mars 2026

©Ellipses Édition Marketing S.A.

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Tout en préparant les élèves à la spécialité Mathématiques de l'épreuve du baccalauréat, cet ouvrage sera utile à tous ceux qui souhaitent approfondir leurs connaissances dans l'optique d'une poursuite d'études supérieures ayant une composante importante en mathématiques.

Cet ouvrage est un recueil d'exercices allant de la simple application du cours à des exercices difficiles. Il s'articule autour de 5 chapitres.

1. Equations
2. Suites numériques
3. Fonctions
4. Géométrie
5. Probabilités

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

- Des sous-chapitres composés d'un bref résumé du cours, d'exercices d'application puis d'exercices d'approfondissement.
- Des exercices pour se préparer à la poursuite des études dans cette spécialité. Ces exercices sont plus difficiles, mêlant plusieurs notions ou abordant des thèmes qui ne sont plus au programme de Première mais dont la maîtrise sera un atout pour la poursuite d'études.
- Les corrigés détaillés de tous les exercices.

Et pour la préparation à la nouvelle épreuve anticipée du Bac :

- Des exercices d'automatisme à faire sans calculatrice.
- Des exercices pour préparer l'examen de fin d'année à faire sans calculatrice.

Table des matières

1	Equations	7
1.1	Polynômes du second degré	7
1.1.1	Point de cours	7
1.1.2	Exercices d'application de cours	8
1.1.3	Exercices d'approfondissement	10
1.2	Equations du second degré	18
1.2.1	Point de cours	18
1.2.2	Exercices d'application de cours	18
1.2.3	Exercices d'approfondissement	21
1.3	Inéquations	26
1.3.1	Point de cours	26
1.3.2	Exercices d'application de cours	26
1.3.3	Exercices d'approfondissement	27
1.4	Préparer l'examen : automatismes	32
1.5	Préparer l'examen : seconde partie	40
1.6	Aller plus loin	43
2	Suites numériques	51
2.1	Suites numériques	51
2.1.1	Point de cours	51
2.1.2	Exercices d'application de cours	52
2.1.3	Exercices d'approfondissement	53
2.2	Suites arithmétiques	60
2.2.1	Point de cours	60
2.2.2	Exercices d'application de cours	60
2.2.3	Exercices d'approfondissement	63
2.3	Suites géométriques	69
2.3.1	Point de cours	69
2.3.2	Exercices d'application de cours	69
2.3.3	Exercices d'approfondissement	70
2.4	Sommes des termes d'une suite	95

2.4.1	Point de cours	95
2.4.2	Exercices d'application de cours	96
2.4.3	Exercices d'approfondissement	98
2.5	Préparer l'examen : automatismes	114
2.6	Préparer l'examen : seconde partie	121
2.7	Aller plus loin	124
3	Fonctions	143
3.1	Nombre dérivé	143
3.1.1	Point de cours	143
3.1.2	Exercices d'application de cours	143
3.1.3	Exercices d'approfondissement	149
3.2	Fonction dérivée	151
3.2.1	Point de cours	151
3.2.2	Exercices d'application de cours	152
3.2.3	Exercices d'approfondissement	154
3.3	Variations d'une fonction	160
3.3.1	Point de cours	160
3.3.2	Exercices d'application de cours	160
3.3.3	Exercices d'approfondissement	163
3.4	Fonction exponentielle	173
3.4.1	Point de cours	173
3.4.2	Exercices d'application de cours	173
3.4.3	Exercices d'approfondissement	175
3.5	Fonctions trigonométriques	194
3.5.1	Point de cours	194
3.5.2	Exercices d'application de cours	195
3.5.3	Exercices d'approfondissement	197
3.6	Préparer l'examen : automatismes	208
3.7	Préparer l'examen : seconde partie	220
3.8	Aller plus loin	224
4	Géométrie	247
4.1	Produit scalaire	247
4.1.1	Point de cours	247
4.1.2	Exercices d'application de cours	248
4.1.3	Exercices d'approfondissement	250
4.2	Trigonométrie	259
4.2.1	Point de cours	259
4.2.2	Exercices d'application de cours	260
4.2.3	Exercices d'approfondissement	263
4.3	Géométrie repérée	269

4.3.1	Point de cours	269
4.3.2	Exercices d'application de cours	269
4.3.3	Exercices d'approfondissement	273
4.4	Préparer l'examen : automatismes	279
4.5	Préparer l'examen : seconde partie	285
4.6	Aller plus loin	286
5	Probabilités	307
5.1	Probabilités conditionnelles	307
5.1.1	Point de cours	307
5.1.2	Exercices d'application de cours	308
5.1.3	Exercices d'approfondissement	311
5.2	Variables aléatoires réelles	334
5.2.1	Point de cours	334
5.2.2	Exercices d'application de cours	335
5.2.3	Exercices d'approfondissement	337
5.3	Préparer l'examen : automatismes	356
5.4	Préparer l'examen : seconde partie	364
5.5	Aller plus loin	367
6	Corrigés	395
6.1	Polynômes du second degré	395
6.2	Suites numériques	431
6.3	Fonctions	481
6.4	Géométrie	543
6.5	Probabilités	587

Chapitre 1

Equations

1.1 Polynômes du second degré

1.1.1 Point de cours

Définition 1 : une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Définition 2 : une fonction polynôme de degré n est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ et a_0 sont des réels donnés et $a_n \neq 0$.

Définition 3 : x_0 est une racine du polynôme f si et seulement si $f(x_0) = 0$.

Propriété 1 : pour toute fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on peut trouver deux réels α et β tels que, pour tout réel x : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est appelée la **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Propriété 2 : les variations de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont données par les tableaux suivants :

• Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$

• Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1

5 minutes

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes ?

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $f(x) = -\sqrt{2} + x - 3x^2$
3. $f(x) = x^2 + 3\sqrt{x} - 2$
4. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1}$
5. $f(x) = x^3 + 2x - 2019$
6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 9$
7. $f(x) = 3x^2 - 3$
8. $f(x) = \frac{x^2 + 8x - 19}{15}$

EXERCICE 2

5 minutes

Déterminer le degré de chaque fonction polynôme :

1. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 3$
2. $f(x) = 1 + 9x + 4x^8$
3. $f(x) = x^2 - 2x^4 + 6x^3$
4. $f(x) = x^3 + 2x - 2$
5. $f(x) = -6x^{201} + 4x^{102} + 8$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

EXERCICE 3

5 minutes

Sans développer les expressions, donner pour chaque polynôme son degré, le coefficient du plus haut degré et le coefficient du degré le plus bas.

1. $f(x) = (x^2 + x - 8)(x^3 - 2x^2 + x + 2)$
2. $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)(5x^5 + 3x^3 - 7x)$
3. $f(x) = (x^2 - 2x^4 + 6x^3)(2x - 9)$
4. $f(x) = (x^3 + 2x - 2)(-2x^5 + 6x^3 - 7x)$
5. $f(x) = (-6x^{201} + 4x^{102} + 8)(x^{28} + 6x^{10} - 9)$
6. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)(1 - 3x + 2x^2)$

EXERCICE 4

5 minutes

Sachant que P , Q et R sont des fonctions polynômes de degrés respectifs 2, 3 et 5. Quel sera le degré des polynômes PQ , PR , QR et PQR ?

EXERCICE 5

5 minutes

Soit P une fonction polynôme de degré n .

Exprimer, en fonction de n , le degré des polynômes suivants :

1. $(x^2 + x + 1) \times P(x)$
2. $P^3 = P \times P \times P$
3. P^k avec k un entier naturel non nul.
4. λP avec λ réel non nul.

EXERCICE 6

5 minutes

Dans chaque cas, vérifier que x_0 est une racine de la fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $x_0 = 1$
2. $f(x) = 5 + 9x + 4x^8$ et $x_0 = -1$
3. $f(x) = x^2 - 2x^4 + 6x^3$ et $x_0 = 0$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et $x_0 = 2$
5. $f(x) = -6x^{201} + 4x^{102} + 2$ et $x_0 = 1$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ et $x_0 = 1$

EXERCICE 7**5 minutes**

Déterminer les racines de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = (x-2)(x+1)$
2. $f(x) = (2x+3)(x+2)$
3. $f(x) = (2-x)(1-3x)$
4. $f(x) = (x-1)(x+1)$
5. $f(x) = (x-2)^2$
6. $f(x) = (x-2)(1-x)(2x+3)$

EXERCICE 8**10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 9$
3. $f(x) = x^2 - 6x - 1$
4. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
5. $f(x) = x^2 - 10x + 10$
6. $f(x) = x^2 + 18x + 30$

EXERCICE 9**10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$
3. $f(x) = x^2 - 9x + 9$
4. $f(x) = x^2 - 3x - 3$
5. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
6. $f(x) = x^2 + 15x + 30$

EXERCICE 10**10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$
2. $f(x) = 3x^2 - x + 9$
3. $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$
4. $f(x) = 5x^2 - 8x - 3$
5. $f(x) = -4x^2 - 10x + 2$
6. $f(x) = -5x^2 + 12x + 3$

EXERCICE 11**10 minutes**

Etablir le tableau de variations de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $f(x) = -3x^2 + 4x + 9$
3. $f(x) = 4x^2 - 6x - 1$
4. $f(x) = -5x^2 - 2x + 4$
5. $f(x) = x^2 - 10x + 10$
6. $f(x) = 3x^2 + 18x + 30$

EXERCICE 12**10 minutes**Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)(ax^2 + bx + c)$.
2. Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 13**10 minutes**Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 8$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x+2)(ax^2 + bx + c)$.
2. Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 14**5 minutes**Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + x - 2$.Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 15**5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 16**5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3 - 32x^2 - 6x + 36$.

Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+6)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 17**5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

1. Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
2. En développant l'expression avec les valeurs de a et c obtenues, déterminer le réel b .
3. En déduire une factorisation complète de f .

EXERCICE 18**5 minutes**

Dans chaque cas, rechercher une racine « évidente » de la fonction polynôme.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 + x - 2$ | 4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ |
| 2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ | 5. $f(x) = -6x^2 - 10x + 4$ |
| 3. $f(x) = x^2 - x - 2$ | 6. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ |

1.1.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 19****10 minutes**

Soit M un point du segment $[AB]$ de longueur 1. On construit deux carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$. Soit x la longueur AM et $\mathcal{A}(x)$ la somme des aires des deux carrés.

1. Déterminer $\mathcal{A}(x)$.
2. Pour quelle position du point M l'aire $\mathcal{A}(x)$ sera-t-elle minimale?

EXERCICE 20**10 minutes**

Pour surveiller la zone de baignade, un maître-nageur veut délimiter un rectangle le long de la plage, pour cela, il dispose d'un câble de bouées d'une longueur de 150 mètres.

Quelle sera l'aire maximale de la zone ainsi délimitée?

EXERCICE 21**10 minutes**

On coupe une ficelle de 1 mètre de longueur pour entourer un carré et un rectangle deux fois plus long que large.

Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des deux aires soit minimale?

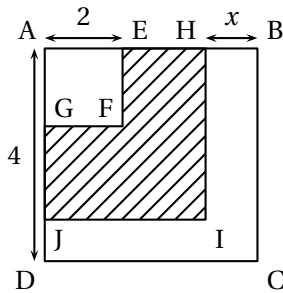
EXERCICE 22**10 minutes**

Soit $\mathcal{D}$ un disque de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$.

Soit M un point du segment $[AB]$. On construit les disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de diamètres $[AM]$ et $[MB]$.

Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire comprise entre les disques. On pose $AM = x$.

1. Dans quel intervalle I varie x ?
2. Calculer l'aire des disques $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. En déduire que $\mathcal{A}(x) = -\frac{\pi}{2}x^2 + \pi x$.
4. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$ sur l'intervalle I .
5. En déduire la position du point M pour laquelle $\mathcal{A}$ est maximale. Quelle est alors la valeur de l'aire?

EXERCICE 23**10 minutes**

1. Dans la figure ci-contre AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés. Calculer AH en fonction de x ; en déduire l'aire de AHIJ puis préciser, dans la liste ci-dessous, la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à l'aire de la partie hachurée.

$$M = (4 - x)^2 - 2^2 \quad N = (4 - x - 2)^2 \quad P = 4^2 - x^2 - 2^2$$

2. Développer et réduire l'expression $Q = (4 - x)^2 - 4$.
3. Factoriser Q .
4. Calculer Q pour $x = 2$. Que traduit ce résultat pour la figure?

EXERCICE 24**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x + 5)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
2. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1 + \sqrt{2})$ et $f\left(\frac{13}{4}\right)$.
 - b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 25**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)^2 + (x + 5)(2x - 3)$.

1. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
2. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$ et $f\left(\frac{5}{12}\right)$.
 - b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 26**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 1)$.

1. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
2. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2})$ et $f\left(-\frac{1}{12}\right)$.
 - b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 27**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 16 - x^2 - (x + 6)(x + 4)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
2. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f(-4)$, $f(3\sqrt{2})$ et $f\left(-\frac{5}{2}\right)$.
 - b. Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 28 : DÉMONSTRATION**10 minutes**

Etablir la forme canonique du trinôme de forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$.

EXERCICE 29**5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines 1 et 2.

Sachant de plus que $f(0) = 2$, déterminer la forme développée de la fonction f .

EXERCICE 30**5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -3 et 4 .

Sachant de plus que $f(0) = -2$, déterminer la forme développée de la fonction f .

EXERCICE 31**5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -2 et 2 .

Sachant de plus que $f(0) = 8$, déterminer la forme développée de la fonction f .

EXERCICE 32**20 minutes**

Démontrer que la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 5x^2 - 7x + 26$ est divisible par $x - 2$.

En déduire une factorisation de $f(x)$.

EXERCICE 33**10 minutes**

Démontrer que la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 8x^2 + 25x - 26$ est divisible par $x - 2$.

En déduire une factorisation de $f(x)$.

EXERCICE 34**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $P(x) = x^4 - 8x^3 - 50x^2 + 264x + 945$.

1. Calculer $P(-5)$, $P(-3)$, $P(7)$.
2. En déduire une factorisation de P sous forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.
3. En déduire la quatrième racine du polynôme P .

EXERCICE 35**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 21x^2 + 2x + 24$.

1. Calculer $P(-4)$, $P(-1)$, $P(2)$.
2. En déduire une factorisation de P sous forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.
3. En déduire la quatrième racine du polynôme P .

EXERCICE 36**10 minutes**

Déterminer le coefficient a pour que la fonction polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$ soit divisible par $x - 2$.

EXERCICE 37**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 9$. Montrer que l'on peut déterminer quatre entiers relatifs a , b , c et d tels que $f(x) = (x + b)(x^2 + cx + d)$.

EXERCICE 38**10 minutes**

Montrer que quels que soient les réels p et q , le polynôme $P(x) = x^3 + (p - q)x^2 + p(p - q)x - p^2q$ est divisible par $x - q$.

Factoriser le polynôme P .

EXERCICE 39**10 minutes**

1. Développer, réduire et ordonner $(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)$.
2. Le nombre $N = 10001\,000\,100010001$ est-il premier?

EXERCICE 40**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^4 + 1$.

1. La fonction f admet-elle des racines réelles?
2. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$.
3. En remarquant que $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$, grâce à deux factorisations successives retrouver la factorisation de la question précédente.

EXERCICE 41**10 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, décomposer en produit de deux facteurs de degré 2 le polynôme $P(x) = x^4 + 4$.

EXERCICE 42**15 minutes**

Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6(x-a)(x-b) + 3a(x-b) + 2b(x-a)$, avec a et b deux réels positifs distincts.

1. Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(0)$.
2. Montrer, sans développer $f(x)$, que le polynôme $f(x)$ admet deux racines et qu'elles sont toutes deux positives.

EXERCICE 43**15 minutes**

Soit $P_n(x) = x^n - 1$ avec $n \geq 2$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$.
2. Vérifier que 1 est une racine du polynôme P_n .
3. Dédire des questions précédentes une factorisation de P_n .
4. Factoriser $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

EXERCICE 44**15 minutes**

Soit $P_n(x) = x^n - 1$ avec $n \geq 2$. Soient a et b deux réels non nuls.

1. Calculer $P_n\left(\frac{a}{b}\right)$
2. En utilisant la question précédente et le résultat de l'exercice précédent, démontrer l'identité : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
3. En déduire une factorisation des expressions suivantes :
 - a. $a^2 - b^2$
 - b. $a^3 - b^3$
 - c. $a^4 - b^4$
 - d. $x^3 - 27$

EXERCICE 45**15 minutes**

Soit P une fonction polynôme de degré $n > 0$. Soit Q une fonction polynôme définie par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

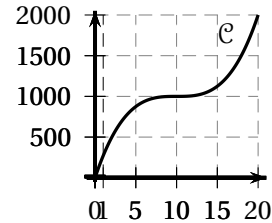
1. Expliciter Q lorsque $P(x) = x^2$.
2. Expliciter Q lorsque $P(x) = x^3$.
3. Quel est le degré de Q lorsque P est de degré n ?
4. Soit P un polynôme périodique, de période 1, en raisonnant par l'absurde sur le degré de P et en considérant Q , montrer que P est une fonction constante.

☞ Un polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ est périodique, de période T , si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+T) = P(x)$.

EXERCICE 46**20 minutes**

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit.

Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. La courbe $\mathcal{C}$ ci-jointe représente le coût de production $C(x)$, exprimé en milliers d'euros, en fonction du nombre x de tonnes produites.



1. Après une étude de marché, l'entreprise espère vendre son produit 84 milliers d'euros la tonne.
 - a. Déterminer, en fonction du nombre x de tonnes produites, la recette $R(x)$ en milliers d'euros espérée par cette entreprise.
 - b. Tracer la représentation graphique Δ de la fonction R sur le graphique ci-dessous, pour $x \in [0 ; 20]$.
Déterminer graphiquement à quel intervalle doit appartenir x pour assurer un bénéfice à l'entreprise.
 - c. Déterminer graphiquement, à une tonne près, le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximum.
2. On considère maintenant que $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$ avec $x > 0$.
Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible sans perdre d'argent.
Soit $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication.
 - a. Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x .
Établir le tableau de variations de $C_m(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 20]$.
 - b. En déduire la valeur x_m qui assure un coût moyen minimum. Quel est alors le prix d'une tonne?

EXERCICE 47**20 minutes**

1. Soit la somme $S_1 = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$

- a. Déterminer une fonction polynôme P , de degré 2, vérifiant pour tout réel x :

$$P(x+1) - P(x) = x.$$

- b. Prouver que $S_1 = P(n+1) - P(1)$.

- c. En déduire que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit la somme $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

- a. Déterminer une fonction polynôme Q , de degré 3, vérifiant pour tout réel x :

$$Q(x+1) - Q(x) = x^2.$$

- b. Prouver que $S_2 = Q(n+1) - Q(1)$.

- c. En déduire que $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Soit la somme $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

En s'inspirant des questions précédentes, montrer que $S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

EXERCICE 48

20 minutes

Soit la fonction polynôme P de degré n , définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des réels donnés avec $a_n \neq 0$ et n entier strictement positif.

1. En utilisant une identité établie dans l'exercice 44, montrer que, pour tout réel α , $P(x) - P(\alpha)$ se factorise par $(x - \alpha)$.
2. En déduire que pour tout polynôme P de degré $n \geq 1$ et tout réel α , il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha) Q(x) + P(\alpha)$.
3. Etablir la propriété : « Un polynôme de degré $n \geq 1$ peut se factoriser par $x - \alpha$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$ ».

EXERCICE 49 : ALGORITHME DE HÖRNER

30 minutes

Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Soit α un réel fixé.

1. **Coefficients de Hörner associés à α**

On pose : $h_3 = a_3$,

$$h_2 = a_2 + \alpha h_3,$$

$$h_1 = a_1 + \alpha h_2,$$

$$h_0 = a_0 + \alpha h_1,$$

- a. Calculer les coefficients de Hörner avec $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 9$ et $\alpha = 3$.
- b. Programmer en Python, une fonction `coeffHorner(a3, a2, a1, a0, alpha)` qui comme son nom l'indique va calculer les coefficients de Hörner pour un polynôme donné.

2. **Calcul de $P(\alpha)$**

- a. Vérifier que $P(x) = \left[(a_3 x + a_2) x + a_1 \right] x + a_0$.
- b. En déduire que $P(\alpha) = h_0$.
- c. Comparer le nombre de multiplications et d'additions nécessaires pour le calcul de $P(\alpha)$:
 - avec l'écriture initiale de $P(x)$;
 - avec l'algorithme de Hörner.

3. **Factorisation par $(x - \alpha)$**

D'après l'exercice précédent, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha) Q(x) + P(\alpha)$.

L'objectif, ici, est de trouver rapidement une expression de $Q(x)$.

- a. Prouver que $P(x) = (x - \alpha)(h_3x^2 + h_2x + h_1) + h_0$.
- b. Conclure.
- c. Programmer en Python, une fonction donnant les coefficients du polynôme $Q(x)$.

4. Applications

- a. Soit la fonction polynôme P , définie sur $\mathbb{R}$, par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 9$.
Calculer $P(3)$ puis factoriser P par $(x - 3)$.
- b. Soit la fonction polynôme P , définie sur $\mathbb{R}$, par $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x - 4$.
Calculer $P(1)$ puis factoriser P par $(x - 1)$.

Remarques : Le calcul des coefficients et les résultats obtenus se généralisent à un degré quelconque.

Les liens entre les coefficients h_i et la factorisation ont été étudiés par Hörner (1786-1837), mais le calcul de $P(\alpha)$ était déjà utilisé par Newton.

EXERCICE 50 : POLYNÔMES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

30 minutes

1. Soit a, b et c trois réels deux à deux distincts, α, β et γ trois réels donnés.
Montrer qu'il ne peut pas exister deux polynômes P et Q distincts, de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :
 $P(a) = Q(a) = \alpha, P(b) = Q(b) = \beta, P(c) = Q(c) = \gamma$.
 2. On considère les trois polynômes :
 $L_1(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, L_2(x) = \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \text{ et } L_3(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$
 - a. Calculer $L_1(a), L_2(a), L_3(a), L_1(b), L_2(b), L_3(b), L_1(c), L_2(c)$ et $L_3(c)$.
 - b. On pose $P(x) = \alpha L_1(x) + \beta L_2(x) + \gamma L_3(x)$.
Calculer $P(a), P(b)$ et $P(c)$.
Vérifier que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
 3. Enoncer un résultat général établi dans les questions précédentes.
- Remarque :** Le polynôme P est le polynôme de Lagrange associé aux réels a, b et c . La méthode se généralise à plus de trois coefficients.

4. Applications :

- a. Déterminer le polynôme P , de degré inférieur ou égal à 2, vérifiant : $P(0) = 2, P(-1) = 3$ et $P(2) = 5$.
- b. Déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, qui prend les mêmes valeurs que la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ aux points $-3, -2$ et 1 .
On dit que P réalise une interpolation de degré 2 de f .
- c. Quel est le nombre maximal de régions que déterminent n droites du plan ($n \geq 1$) ?
☞ On admettra que ce nombre s'écrit $P(n)$, P étant un polynôme de degré 2. On commencera par calculer $P(1), P(2)$ et $P(3)$.

1.2 Equations du second degré

1.2.1 Point de cours

Définition 1 : Une **équation du second degré**, d'inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont trois réels données (a étant non nul).

Définition 2 : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 1 : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution unique : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Propriété 2 : Lorsque le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme S et leur produit P sont donnés par les relations : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Propriété 3 : Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

1.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 51

10 minutes

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^2 + x + 1 = 0$ | 4. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 9 = 0$ |
| 2. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ | 5. $x^2 + x - 6 = 0$ |
| 3. $-x^2 + 3x + 9 = 0$ | 6. $x^2 - 2 = 0$ |

EXERCICE 52

10 minutes

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $x^2 + 5x - 6 = 0$ | 4. $-5x^2 - 3x + 2 = 0$ |
| 2. $x^2 + x - 2 = 0$ | 5. $4x^2 + 12x + 4 = 0$ |
| 3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$ | 6. $-3x^2 - 4x = 0$ |

EXERCICE 53

15 minutes

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

- | | |
|------------------------|---|
| 1. $x^2 + 9x + 20 = 0$ | 4. $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$ |
| 2. $-3x^2 + 2 = 0$ | 5. $2x^2 + \frac{1}{3}x + 5 = 0$ |
| 3. $-5x^2 + x = 0$ | 6. $3x^2 + 2x\sqrt{6} + 2 = 0$ |

EXERCICE 54**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en factorisant :

1. $(x+1)^2 - (2x+3)^2 = 0$
2. $x^2 + 2x + 1 + (2x-3)(x+1) = 0$
3. $x^2 - 16 + (x+4)(x-6) = 0$
4. $81 - (x^2 + 6x + 9) = 0$
5. $(3x-1)(2x+5) - (1-x)(2x+5) = 0$
6. $(2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 = 0$

EXERCICE 55**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la forme canonique :

1. $x^2 + 4x + 1 = 0$
2. $x^2 - 3x + 4 = 0$
3. $2x^2 + x - 2 = 0$
4. $\frac{1}{2}x^2 + 8x - 25 = 0$
5. $\frac{1}{2}x^2 + x + 2 = 0$
6. $-5x^2 - 3x + 2 = 0$

EXERCICE 56**5 minutes**Soit l'équation $x^2 + 14x - 15 = 0$.

1. Donner une solution évidente.
2. En utilisant la propriété 2, déterminer la seconde solution.

EXERCICE 57**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode de l'exercice précédent :

1. $x^2 + x - 2 = 0$
2. $x^2 - x - 2 = 0$
3. $2x^2 - x - 1 = 0$
4. $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$
5. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$
6. $x^2 - x - 20 = 0$

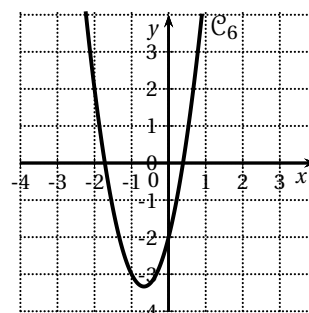
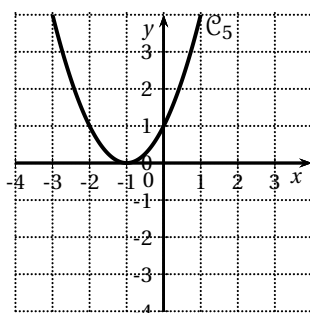
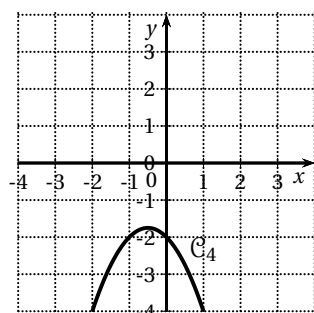
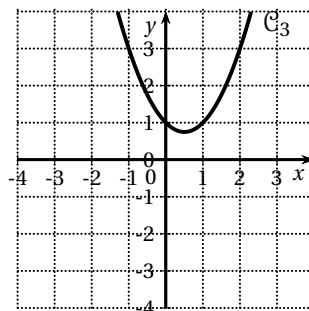
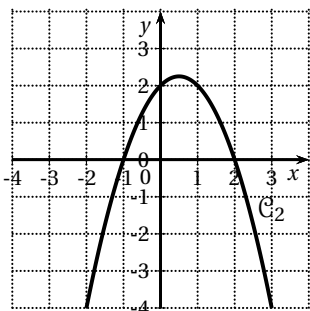
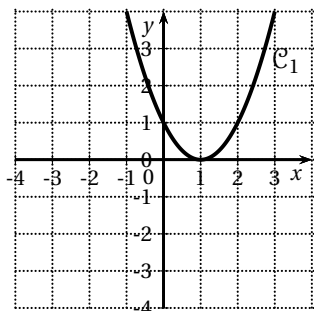
EXERCICE 58**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode la plus adaptée :

1. $9x^2 + x = 0$
2. $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$
3. $x^2 + 4x + 4 = 0$
4. $5 - x^2 = 0$
5. $(x+2)(3x-4) = x+2$
6. $5x^2 - 9x + 12 = 0$

EXERCICE 59**15 minutes**Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Dans chaque cas, déterminer graphiquement les signes des réels a et c , ainsi que le signe du discriminant.
2. Dans chaque cas, déterminer le signe de b .

**EXERCICE 60****5 minutes**Ecrire une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ dont les solutions sont :

1. 3 et 7
2. 2 et -6
3. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{5}$
4. $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.

EXERCICE 61**10 minutes**Déterminer, s'ils existent, deux réels x et y connaissant leur somme S et leur produit P , en supposant $x \leq y$:

1. $S = 1$ et $P = -1$
2. $S = 12$ et $P = 36$
3. $S = 2\sqrt{5}$ et $P = 1$
4. $S = -7$ et $P = -44$

EXERCICE 62**10 minutes**Déterminer, s'ils existent, deux réels x et y connaissant leur somme S et leur produit P , en supposant $x \leq y$:

1. $S = 0$ et $P = 3$
2. $S = 1 + \pi$ et $P = \pi$
3. $S = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$ et $P = \sqrt{10}$
4. $S = 2019$ et $P = 2019$

EXERCICE 63**10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 36 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10 \end{cases}$

EXERCICE 64**10 minutes**Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 126 cm^2 et de périmètre 50 cm.**EXERCICE 65****10 minutes**Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 3569 m^2 et de périmètre 252 m.**1.2.3 Exercices d'approfondissement****EXERCICE 66****5 minutes**Soit l'équation (E) : $(m+2)x^2 + 2(3m-1)x + (m+2) = 0$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle une solution double?
2. Calculer cette solution.

EXERCICE 67**10 minutes**Soit l'équation (E) : $x^2 + 6mx + (6m+1) = 0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation admet-elle une des solutions égale à 2?
2. En déduire l'autre solution.

EXERCICE 68**5 minutes**Soit l'équation (E) : $x^2 + 2(3m-1)x + (m+2) = 0$.

1. Pour quelle valeur de m l'équation admet-elle une des solutions égale à -1?
2. En déduire l'autre solution.

EXERCICE 69**15 minutes**

Démontrer la propriété 1.

EXERCICE 70**15 minutes**

1. Démontrer la propriété 2.
2. Démontrer la propriété 3.

EXERCICE 71**15 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + y = -\frac{1}{12} \\ xy = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y = \frac{5\sqrt{5}-3}{4} \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

☞ Pour le dernier système, on pourra poser $Y = -y$.

EXERCICE 72**10 minutes**

On considère l'équation (E) : $2x^2 + (2\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$.

1. Résoudre (E).
2. Montrer que $(2\sqrt{3} + 1)^2 = 13 + 4\sqrt{3}$.
3. En déduire une expression simplifiée des solutions de l'équation (E).

EXERCICE 73**10 minutes**

Résoudre les équations suivantes en posant $X = x^2$:

1. $x^4 - 84x^2 + 243 = 0$
2. $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$
3. $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$
4. $-x^4 + x^2 + 2 = 0$

EXERCICE 74**20 minutes**

Résoudre les équations suivantes en utilisant un changement d'inconnue :

1. $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$
2. $2(\cos x)^2 - 3\cos x + 1 = 0$
3. $x + \sqrt{x} - 2 = 0$
4. $2(\sin x)^2 - 7\sin x + 3 = 0$
5. $\frac{6}{(x-7)^2} - \frac{11}{x-7} - 7 = 0$
6. $(2x-5) - 3\sqrt{2x-5} + 2 = 0$

EXERCICE 75**10 minutes**

1. soit P un polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

- a. Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.
- b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions des équations suivantes :

- a. $x^6 - x^4 - 14x + 24 = 0$
- b. $\frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^2} - \frac{28}{x} + 24 = 0$.

EXERCICE 76**10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $5 - x = 2\sqrt{2x-2}$
2. $2 + x = \sqrt{2x+3}$

EXERCICE 77**15 minutes**

Résoudre les équations suivantes :

1. $x + \frac{1}{x} = 4$
2. $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+3} = 2$
3. $\frac{x}{3x+4} = \frac{x-1}{4x}$
4. $\frac{2x+m}{x} - \frac{3x}{x+m} = 2$ avec m un réel donné.

EXERCICE 78**15 minutes**

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{x + 4}{x + 1}$

2. $\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{5}{x + 2} = 3$

3. $\frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x^2} = 0$

4. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x - 3}.$

EXERCICE 79 : LOGIQUE**15 minutes**Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.On considère la proposition P_1 : « Si $ac < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes ».

1. La proposition P_1 est-elle vraie? Justifier.
2. a. Enoncer la réciproque de P_1 , on la notera P_2 .
b. La proposition P_2 est-elle vraie? Justifier.
3. a. Enoncer la contraposée de P_1 , on la notera P_3 .
b. La proposition P_3 est-elle vraie? Justifier.

EXERCICE 80**10 minutes**

Alfred possède deux terrains rectangulaires de même aire. Le grand côté du premier terrain mesure 130 mètres de plus que son plus petit côté. Le grand côté du second terrain mesure 150 mètres de plus que le grand côté du premier terrain et son petit côté mesure 154 mètres.

Quelles sont les dimensions des deux terrains d'Alfred?

EXERCICE 81**10 minutes**

La largeur d'un rectangle mesure 4 dm de moins que sa longueur. Sachant que son aire est égale à $8,25 \text{ dm}^2$, quelles sont les dimensions de ce rectangle?

EXERCICE 82**10 minutes**

En multipliant par 2 puis en ajoutant 1 cm à chaque côté d'un triangle équilatéral, son aire augmente de $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Quelle est la longueur du côté du triangle d'origine?

EXERCICE 83**10 minutes**

En multipliant par $\sqrt{3}$ puis en enlevant 1 m à chaque côté d'un triangle équilatéral, son aire diminue de $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ m}^2$. Quelle est la longueur du côté du triangle d'origine?

EXERCICE 84 : UN PROBLÈME DE NEWTON**10 minutes**

L'aire d'un rectangle est 540 m^2 et les diagonales mesurent 39 mètres. Quel est le périmètre de ce rectangle?

EXERCICE 85**10 minutes**

Un triangle de dimensions 5, 6 et 8 n'est pas rectangle. Peut-on, en ajoutant ou en retranchant une même longueur sur les trois côtés, obtenir un triangle rectangle?

EXERCICE 86**15 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 5$ cm. Soit M un point de $[AB]$, N un point de $[BC]$, P un point de $[CD]$ et Q un point de $[DA]$ tels $AM = BN = CP = DQ = x$.

1. Sur quel intervalle varie x ?
2. Déterminer l'aire du quadrilatère $MNPQ$ que l'on notera $\mathcal{A}(x)$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle minimale?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle égale à 22 cm^2 ?

EXERCICE 87**15 minutes**

Un train se dirige vers un tunnel à vitesse constante. Une vache, située à 5 mètres du milieu du tunnel, entend le train lorsque celui-ci se situe à 3 km de l'entrée du tunnel.

Quelle que soit sa direction, la vache arrive au bout du tunnel au même instant que le train. Quelle est la longueur du tunnel?

EXERCICE 88**20 minutes**

1. Factoriser les expressions $x^2 + 2x - 8$ et $3x^2 - 7x + 2$.
2. Résoudre l'équation $\frac{3}{x^2 + 2x - 8} + \frac{x}{3x^2 - 7x + 2} = 0$.

EXERCICE 89**15 minutes**

1. Factoriser les expressions $x^2 + x - 2$ et $2x^2 + x - 6$.
2. Résoudre l'équation $\frac{2x}{x^2 + x - 2} - \frac{3x}{2x^2 + x - 6} = 0$.

EXERCICE 90**20 minutes**

1. Déterminer le format d'un rectangle de longueur 8 et de largeur 5, c'est-à-dire le rapport :

$$f = \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}.$$

2. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur $AB = x$ et de largeur $AD = 1$ avec $1 < x < 2$. Soit E le point de $[AB]$ et F le point de $[DC]$ tels que $AEFD$ soit un carré.
 - a. Exprimer les formats des rectangles $ABCD$ et $BEFC$ en fonction de x .
 - b. Le rectangle $ABCD$ est dit « **rectangle d'or** » s'il a le même format que le rectangle $BEFC$. Quelle valeur doit-on donner à x pour que $ABCD$ soit un rectangle d'or. On note Φ cette valeur.
 - c. Déterminer les valeurs exactes de $\Phi - 1$ et de $\Phi(\Phi - 1)$.
 - d. Montrer que l'inverse de Φ est $\Phi - 1$.

EXERCICE 91**15 minutes**

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$.
 - a. Calculer $P(1)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a. $x^6 - 2x^4 - 19x^2 + 20 = 0$

b. $\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{19}{x} + 20 = 0$.

EXERCICE 92

15 minutes

Soit l'équation $(E) : x^3 - x^2 - 50x - 48$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 2x - 48 = 0$.
2. Vérifier que -1 est solution de (E) .
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $x^3 - x^2 - 50x - 48 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) .

EXERCICE 93

15 minutes

Soit l'équation $(E) : 3x^3 - 8x^2 - x + 10$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$.
2. Déterminer une solution « évidente » de (E) , on la notera x_0 .
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $3x^3 - 8x^2 - x + 10 = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) .

EXERCICE 94

15 minutes

Soit l'équation $(E) : x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 5x - 10 = 0$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 5x - 5 = 0$.
2. Déterminer deux solutions « évidentes » de (E) , on les notera x_3 et x_4 .
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 5x - 10 = (x - x_1)(x - x_2)(ax^2 + bx + c)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) .

EXERCICE 95

25 minutes

Un triplet pythagoricien est un triplet $(x; y; z)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. Existe-t-il des triplets pythagoriciens constitués d'entiers consécutifs?
2. Ecrire une fonction, en langage Python, qui affiche les triplets pythagoriciens pour x et y inférieurs ou égaux à 100 et $x \leq y$.

EXERCICE 96

25 minutes

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont trois réels et $a \neq 0$.

Dans un repère orthonormal (O, I, J) , on considère les points $A(a; 0)$, $B(a; b)$ et $C(a - c; b)$.

Soit P le point de coordonnées $(-1; \alpha)$, avec α un réel quelconque et M le point d'intersection des droites (OP) et (AB) .

1. Déterminer les coordonnées du point M .

2. Démontrer que le triangle OMC est rectangle en M si et seulement si α vérifie l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Donner une construction géométrique permettant de résoudre graphiquement l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Appliquer cette méthode aux équations suivantes :
 - a. $x^2 + 6x - 8 = 0$
 - b. $x^2 + x + 1 = 0$
 - c. $4x^2 - 5x + 6 = 0$
 - d. $9x^2 + 6x + 1 = 0$
5. A quelle condition géométrique existe-t-il des solutions?

EXERCICE 97**20 minutes**

Alors qu'une colonne de l'armée de ℓ km de long, avance à vitesse constante, un messenger part de l'arrière-garde, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière-garde. Il arrive à l'arrière-garde exactement au moment où la colonne a parcouru ℓ kilomètres. Quelle est la distance totale parcourue par le messenger?

☞ Non, il n'a pas parcouru 2ℓ kilomètres!

1.3 Inéquations**1.3.1 Point de cours**

Propriété : Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$).

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Signe de $P(x)$	signe de a 0 signe de $-a$ 0 signe de a			

- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double x_0 .

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $P(x)$	signe de a 0 signe de a		

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe du réel a .

1.3.2 Exercices d'application de cours**EXERCICE 98****20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = x^2 + x + 1$
2. $P(x) = -3x^2 + x + 10$
3. $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$
4. $P(x) = 2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3$

EXERCICE 99**20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = 3 - 2x\sqrt{3} + x^2$

3. $P(x) = x^2 - 2x - 15$

2. $P(x) = -x^2 + 4x - 8$

4. $P(x) = \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{6}$

EXERCICE 100**20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = -6x^2 - 5x + 6$

3. $P(x) = -x^2 - 4x + 4$

2. $P(x) = -6x^2 - x - 1$

4. $P(x) = x^2 + x + 3$

EXERCICE 101**20 minutes**

En choisissant la méthode la plus adaptée, établir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = (3x - 2)(2x + 3)$

3. $P(x) = (x + 2)^2 - 9(x - 1)^2$

2. $P(x) = (3x + 1)(x - 2) - (9x^2 + 3x)$

4. $P(x) = -2 - (2x - 9)^2$

EXERCICE 102**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + x + 1 < 0$

3. $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$

2. $-3x^2 + x + 10 \leq 0$

4. $2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3 > 0$

EXERCICE 103**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-6x^2 - 5x + 6 \leq 0$

3. $-x^2 - 4x + 4 \geq 0$

2. $-6x^2 - x - 1 \leq 0$

4. $x^2 + x + 3 \geq 0$

EXERCICE 104**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3 - 2x\sqrt{3} + x^2 \geq 0$

3. $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

2. $-x^2 + 4x - 8 < 0$

4. $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{6} < 0$

1.3.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 105****10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x + 2)^2 \leq (3x - 5)^2$

2. $x^2 + 6x - 4 \leq 2x^2 - 9x - 8$

EXERCICE 106**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-x^2 + 4x + 5 \geq -2x^2 + 3x + 4$

2. $3x^2 - 2x + 3 \geq x^2 - 2x + 7$

EXERCICE 107**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 5 \leq x^2 - x + 9$

2. $(3x - 2)^2 \geq (x + 3)^2$

EXERCICE 108**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^3 + 3x + 2 \leq x^3 - 2x^2 - 4x - 3$
2. $(2x + 1)^2 \geq (3x - 1)^2$
3. $-5x^2 + x + 2 \leq 3x^2 + 7x - 7$

EXERCICE 109**10 minutes**Soit une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x - 4$ et une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2x^2 + 3x - 4$.

1. Résoudre l'équation $2x^2 + 3x - 4 = -x - 4$.
2. En déduire les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
3. Résoudre l'inéquation $2x^2 + 3x - 4 \leq -x - 4$.
4. En déduire les positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

EXERCICE 110**10 minutes**En utilisant la méthode de l'exercice **109**, étudier les positions relatives de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x + 2$ et de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 3x^2 - 8x - 2$.**EXERCICE 111****10 minutes**En s'inspirant de la méthode de l'exercice **109**, étudier les positions relatives des paraboles $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = -x^2 + 6x - 9$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = x^2 - 5x + 3$.**EXERCICE 112****10 minutes**

Etablir le tableau de signe des polynômes suivants :

1. $P(x) = (x + 2)(6x^2 - 5x - 6)$
2. $P(x) = (3 - 2x)(x^2 - 3x + 2)$

EXERCICE 113**10 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = (-x^2 - 4x + 4)(6 - 2x)$
2. $P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6)$

EXERCICE 114**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x + 2)(6x^2 - 5x - 6) \leq 0$
2. $(3 - 2x)(x^2 - 3x + 2) \geq 0$

EXERCICE 115**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(-x^2 - 4x + 4)(6 - 2x) \leq 0$
2. $(x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6) > 0$

EXERCICE 116 : DÉMONSTRATION**10 minutes**

Démontrer la propriété des tableaux de signes des trinômes du second degré.

EXERCICE 117 : LOGIQUE**15 minutes**Soit $f(x)$ une fonction polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.Soit la propriété P_1 : « S'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$ alors $\Delta > 0$.

1.
 - a. Énoncer la réciproque de la propriété P_1 , nous la noterons P_2 .
 - b. La propriété P_2 est-elle vraie? Justifier.
2.
 - a. Énoncer la contraposée de la propriété P_1 , nous la noterons P_3 .
 - b. La propriété P_3 est-elle vraie? Justifier.
 - c. La propriété P_1 est-elle vraie? Justifier.

EXERCICE 118**15 minutes**

Soit $P(x) = 6x^4 - 41x^3 + 69x^2 + 6x - 40$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x-1)(x-4)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

EXERCICE 119**15 minutes**

Soit $P(x) = -6x^4 + 13x^3 + 96x^2 - 13x - 210$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x-5)(x+2)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

EXERCICE 120**15 minutes**

Soit $P(x) = -8x^4 + 14x^3 + 47x^2 - 41x - 30$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x+2)(x-3)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

EXERCICE 121**15 minutes**

Soit $P(x) = -x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2)x^3 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 5)x^2 + (2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2})x - 5\sqrt{6}$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3})Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

EXERCICE 122**15 minutes**

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions réelles de l'équation $2x^2 + (1-m)x + 2(m-3) = 0$.

EXERCICE 123**15 minutes**

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + mx + (2m-3) = 0$.

EXERCICE 124**15 minutes**

Sur route sèche, la distance de freinage d'une voiture est donnée par la formule $d = \frac{1}{150}v^2 + \frac{1}{5}v$, où d est exprimée en mètres et v en km/h.

Quelles sont les vitesses permettant de s'arrêter en moins de 10 mètres? En moins de 30 mètres?

EXERCICE 125**15 minutes**

Résoudre l'inéquation suivante : $\frac{(3x^2 + 2x - 1)(x^2 + x + 2)}{(3 - x^2)(x^2 - x - 6)} \geq 0$.

EXERCICE 126**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{3x^2 + 1}{x + 4} \geq 2x$.

2. $\frac{x - 2}{x + 1} + \frac{2x - 5}{x - 2} \leq 2$.

EXERCICE 127**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{4}{2 - x} + \frac{3}{x + 2} \geq \frac{3x^2}{4 - x^2}$.

2. $\frac{x}{2x + 3} \leq \frac{2x + 3}{x}$.

EXERCICE 128**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{(6x - 3)(x - 4) - (2x - 1)(5x - 3)}{x^2 + 2x + 1} \geq 0$.

2. $\frac{4 - 2x - 3x^2 - (x + 4)(2x + 2)}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$.

EXERCICE 129**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{7x + 3}{3x + 2} \geq \frac{2 - 3x}{3x^2 + 5x + 2}$.

2. $\frac{-3x^2 - 7x + 6}{2x^2 - 13x + 20} \leq \frac{8x - 3}{5 - 2x}$.

EXERCICE 130**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{5x - 2}{x - 2} > \frac{4 - 3x}{x + 2}$.

2. $\frac{x - 3}{x^2 - 2x - 15} \leq \frac{2 - 3x}{5 - x}$.

EXERCICE 131**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{3 - 2x}{x + 2} \geq \frac{12 - 4x}{2x + 1}$.

2. $\frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 1} \leq \frac{2x - 3}{x - 1}$.

EXERCICE 132**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 3x - 4} < \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 1}$.

2. $-2 \leq \frac{x^2 - x - 30}{8 + 2x - x^2} \leq 2$.

EXERCICE 133**15 minutes**

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} \geq x.$$

EXERCICE 134**20 minutes**

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + ax + 9$ où a est un nombre réel.

1. Discuter le nombre de racines de P en fonction des valeurs de a .
2. Déterminer les valeurs de a telles que pour tout réel x , $P(x) > -3$.

EXERCICE 135**20 minutes**

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

1. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de P .
2. En déduire l'extremum de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$. Quelle est la nature de cet extremum?
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.
4. Déterminer les valeurs de x telles que $-1 < P(x) < 1$.

EXERCICE 136**15 minutes**

On considère la fonction $Q(x)$ définie par $Q(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Q .
2. Montrer que pour tout réel x , $-6 < Q(x) < 5$.

EXERCICE 137**25 minutes**

On considère la fonction Q définie par $Q(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2x + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Q .
2. Montrer que pour tout réel x , $-2 \leq Q(x) \leq 4$.
3. Calculer $Q\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$. Montrer que le maximum de Q est $1 + \sqrt{5}$.
4. Calculer $Q\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Montrer que le minimum de Q est $1 - \sqrt{5}$.

EXERCICE 138**25 minutes**

On considère la fonction Q définie par $Q(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Q .
2. Montrer que pour tout réel x , $0 \leq Q(x) \leq 6$.
3. Calculer $Q(\sqrt{2})$. Montrer que le maximum de Q est $2 + \sqrt{2}$.
4. Calculer $Q(-\sqrt{2})$. Montrer que le minimum de Q est $2 - \sqrt{2}$.

EXERCICE 139**25 minutes**

On considère les fonctions polynômes P et Q définies sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 4x^3 + 4x^2 - 9x + 1$, de courbes représentations respectives $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_Q$.

1. **a.** Donner la forme canonique de $P(x)$.
b. En déduire l'extremum de la fonction $P(x)$.

- c. Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_P$ avec l'axe des abscisses.
2. a. Donner une racine évidente de $Q(x)$, on la notera α .
 b. En déduire un polynôme $R(x)$ tel que pour tout réel x : $Q(x) = (x - \alpha)R(x)$.
 c. Déterminer les racines de $Q(x)$.
 d. Dresser le tableau de signes de $Q(x)$.
3. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_Q$.

1.4 Préparer l'examen : automatismes

Les exercices d'automatismes sont des questionnaires à choix multiple (QCM) comportant dix questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

EXERCICE 140

15 minutes

Question 1

L'inverse du tiers du quart de 18 est égal à

- a. $\frac{2}{3}$ b. $-\frac{2}{3}$ c. 3 d. $\frac{3}{2}$

Question 2

Si $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -3$ et $d = -\frac{2}{5}$, l'expression $A = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ est égale à

- a. $-\frac{3}{2}$ b. 0 c. -5 d. $-\frac{1}{5}$

Question 3

Le nombre $N = \frac{10^{12}}{5^8 \times 2^{11}}$ est égale à

- a. 10 b. 5000 c. 1250 d. 8×10^4

Question 4

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 8$. On a

- a. $\mathcal{S} = \{-4; 4\}$ b. $\mathcal{S} = \emptyset$ c. $\mathcal{S} = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$ d. $\mathcal{S} = \{-8; 8\}$

Question 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 8$.

Le tableau de variations de la fonction f est :

a.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
f			

c.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f			

b.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
f			

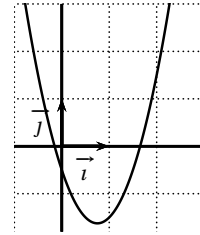
d.

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f			

Question 6

Soit a , b et c trois réels, $a \neq 0$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Soit Δ son discriminant. On peut affirmer que :



- a. $a < 0$ et $\Delta < 0$ c. $a < 0$ et $\Delta > 0$
b. $a > 0$ et $\Delta < 0$ d. $a > 0$ et $\Delta > 0$

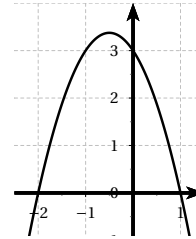
Question 7

L'inéquation $x^2 + 2x + 8 \geq 0$

- a. n'a pas de solution c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-4 ; 2]$
b. a une unique solution d. a pour solution l'ensemble des réels

Question 8

Soit f une fonction polynôme de degré 2 dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Par lecture graphique, on peut affirmer qu'une forme factorisée de f est :



- a. $1,5(x+2)(x-1)$ b. $1,5(x-2)(x+1)$
c. $-1,5(x+2)(x-1)$ d. $-1,5(x-2)(x+1)$

Question 9

On considère, dans un repère du plan, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 + 10x + 25$.

- a. $\mathcal{P}$ n'admet aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses
b. $\mathcal{P}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses
c. $\mathcal{P}$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses
d. $\mathcal{P}$ admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses

Question 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 8$.

Le tableau de variations de la fonction f est :

a.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
f			

c.

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f			

b.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
f			

d.

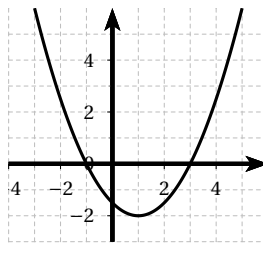
x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f			

EXERCICE 141**15 minutes****Question 1**

L'inverse de l'opposé du cinquième de 3 est égal à

- a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{5}{3}$ c. $-\frac{3}{5}$ d. $-\frac{5}{3}$

Pour les quatre questions suivantes, on se place dans un repère orthonormé du plan, on a tracé la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels, $a \neq 0$.

**Question 2**

L'équation $g(x) = 0$ a pour solution(s) :

- a. -1,5 b. 0 c. -1 et 3 d. 3

Question 3

L'équation $g(x) = -3$ admet :

- a. aucune solution c. deux solutions
b. une unique solution d. trois solutions

Question 4

L'inéquation $g(x) < 0$

- a. a pour solution l'ensemble des nombres réels
b. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 ; 3]$
c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $] -1 ; 3[$
d. n'a pas de solution

Question 5

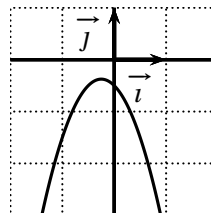
Soit Δ le discriminant de g . On peut affirmer que :

- a. $a > 0$ et $\Delta > 0$ c. $a < 0$ et $\Delta > 0$
b. $a > 0$ et $\Delta < 0$ d. $a < 0$ et $\Delta < 0$

Question 6

Soit a, b et c trois réels, $a \neq 0$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$. La représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Soit Δ son discriminant. On peut affirmer que :

- a. $a < 0$ et $\Delta < 0$ c. $a < 0$ et $\Delta > 0$
b. $a > 0$ et $\Delta < 0$ d. $a > 0$ et $\Delta > 0$



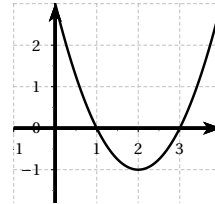
Question 7L'inéquation $x^2 + x - 2 \leq 0$

- a. n'a pas de solution c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-2 ; 1]$
 b. a une unique solution d. a pour solution l'ensemble des réels

Question 8

Soit f une fonction polynôme de degré 2 dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Par lecture graphique, on peut affirmer qu'une forme factorisée de f est :

- a. $(x + 1)(x + 3)$ c. $(x - 1)(x - 3)$
 b. $-(x + 1)(x + 3)$ d. $-(x - 1)(x - 3)$

**Question 9**On considère, dans un repère du plan, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -x^2 + 2x - 3$.

- a. $\mathcal{P}$ n'admet aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses
 b. $\mathcal{P}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses
 c. $\mathcal{P}$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses
 d. $\mathcal{P}$ admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses

Question 10L'équation $-2x^2 + x + 4 = 0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont :

- a. $S = 1$ et $P = -4$ b. $S = -\frac{1}{2}$ et $P = -2$ c. $S = \frac{1}{2}$ et $P = -2$ d. $S = -1$ et $P = -4$

EXERCICE 142**15 minutes****Question 1**Le triple de l'opposé de l'inverse du carré de l'inverse de -9 est égal à

- a. -27 b. 27 c. $\frac{1}{27}$ d. $-\frac{1}{27}$

Question 2Si $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = 3$ et $d = -\frac{2}{5}$, l'expression $A = \frac{a+b}{c-d}$ est égale à

- a. $-\frac{3}{2}$ b. 0 c. -5 d. $\frac{5}{102}$

Question 3On considère, dans un repère du plan, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 5x + 8$.

- a. $\mathcal{P}$ n'admet aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses
 b. $\mathcal{P}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses
 c. $\mathcal{P}$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses
 d. $\mathcal{P}$ admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses

Question 4

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + 18 = 0$. On a

- a.** $\mathcal{S} = \{-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\}$ **b.** $\mathcal{S} = \emptyset$ **c.** $\mathcal{S} = \{-18; 18\}$ **d.** $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$

Question 5

Le volume d'un cône de rayon R et de hauteur h est donné par la formule $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. On a

- a.** $h = 3\pi R^2 h$ **b.** $h = \frac{3V}{\pi R^2}$ **c.** $h = \frac{\pi R^2}{3V}$ **d.** $h = \sqrt{\frac{3V}{\pi R^2}}$

Question 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)(x^2 + x + 1)$. La fonction f :

- a.** n'a pas de racine réelle **c.** a exactement deux racines réelles
b. a exactement une racine réelle **d.** a exactement trois racines réelles

Question 7

L'inéquation $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ a pour ensemble de solutions :

- a.** $\mathcal{S} = \emptyset$ **c.** $\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cap [4; +\infty[$
b. $\mathcal{S} = [-1; 4]$ **d.** $\mathcal{S} = \{-1; 4\}$

Question 8

Soit f une fonction polynôme du second degré dont le tableau de signes est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Une expression de $f(x)$ peut être :

- a.** $-x^2 - x + 6$ **c.** $9 - x^2$
b. $x^2 + x - 6$ **d.** $-x^2 + x + 6$

Question 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$.

Le tableau de variations de la fonction f est :

a.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

c.

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

b.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

d.

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

Question 10

L'équation $3x^2 + x - 10 = 0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont :

- a.** $S = 1$ et $P = -10$ **c.** $S = \frac{1}{3}$ et $P = -\frac{10}{3}$
b. $S = -\frac{1}{3}$ et $P = -\frac{10}{3}$ **d.** $S = -1$ et $P = -10$

EXERCICE 143**15 minutes****Question 1**

L'opposé du sextuple de l'inverse de 12 est égal à

- a. 2 b. -2 c. $\frac{1}{2}$ d. $-\frac{1}{2}$

Question 2Si $a = 2$, $b = -3$, $c = -\frac{2}{3}$ et $d = \frac{4}{5}$ alors $A = \frac{\frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b}}{c - d}$ est égal à

- a. $-\frac{35}{33}$ b. $\frac{33}{35}$ c. $-\frac{2}{3}$ d. $-\frac{3}{2}$

Question 3Soit $P(x) = 2x^2 + 12x + 3$, la forme canonique de $P(x)$ est

- a. $(2x+3)^2 - 15$ b. $(2x+3)(x-5)$ c. $2(x+3)^2 - 15$ d. $(2x+3)^2 - 6$

Question 4La forme factorisée de $P(x) = (x+3)^2 - 3(2x^2 + x - 15)$ est

- a. $(x+3)(18-5x)$ b. $-5x^2 + 3x + 54$ c. $(x+3)(15-6x)$ d. $(x+3)(3x-5)$

Question 5Si $a = \frac{b^2}{c}$ avec b et c deux réels strictement positifs alors b est égal à

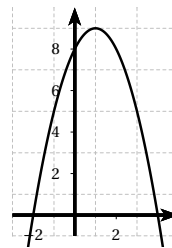
- a. ac b. $\sqrt{ac}$ c. $\frac{a}{c}$ d. a^2c

Question 6Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte?

- a. $f(x) = (3x+3)(3x-6)$ c. $f(x) = 3(x-1)(x+2)$
b. $f(x) = 3(x+1)(x-2)$ d. $f(x) = (3x-3)(3x+6)$

Pour les quatre questions suivantes, on se place dans un repère orthonormé du plan, on a tracé la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois réels, $a \neq 0$.

**Question 7**L'équation $g(x) = 0$ a pour solution(s) :

- a. 8 b. 0 c. -2 et 4 d. 4

Question 8L'équation $g(x) = 9$ admet :

- a. aucune solution c. deux solutions
b. une unique solution d. trois solutions

Question 9 :

L'inéquation $g(x) > 5$

- a. a pour solution l'ensemble des nombres réels
- b. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 ; 3]$
- c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $] -1 ; 3[$
- d. n'a pas de solution

Question 10 :

Soit Δ le discriminant de g . On peut affirmer que :

- a. $a > 0$ et $\Delta > 0$
- b. $a > 0$ et $\Delta < 0$
- c. $a < 0$ et $\Delta > 0$
- d. $a < 0$ et $\Delta < 0$

EXERCICE 144**15 minutes****Question 1**

L'inverse du carré du produit de 6 et -2 est égal à

- a. -144
- b. 144
- c. $\frac{1}{144}$
- d. $-\frac{1}{144}$

Question 2

L'équation $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ admet

- a. 0 solution
- b. 1 solution
- c. 2 solutions
- d. 3 solutions

Question 3

L'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ admet

- a. 0 solution
- b. 1 solution
- c. 2 solutions
- d. 3 solutions

Question 4

La forme développée de $P(x) = (2x - 0,5)^2$ est

- a. $2x^2 - 2x - 0,25$
- b. $2x^2 - 2x + 0,25$
- c. $4x^2 - 0,25$
- d. $4x^2 - 2x + 0,25$

Question 5

Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 8$?

- a. $0,5x^2 - 2x - 6$
- b. $0,5(x + 10)(x - 6)$
- c. $0,5(x - 6)(x + 2)$
- d. $0,5(x - 10)(x + 6)$

Question 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$. L'abscisse du minimum de f est

- a. $-\frac{3}{2}$
- b. $\frac{2}{3}$
- c. $\frac{3}{2}$
- d. 1

Question 7

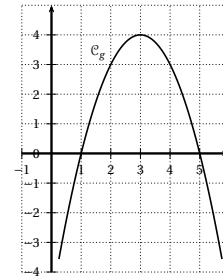
Soit a , b et c trois réels tels que $a \neq 0$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Soit Δ son discriminant.

La représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.

Alors on peut affirmer que :

- a.** $a > 0$ et $\Delta > 0$ **b.** $a > 0$ et $\Delta < 0$
c. $a < 0$ et $\Delta > 0$ **d.** $a < 0$ et $\Delta < 0$

**Question 8**

On considère la fonction f dont la fonction dérivée est la fonction g considérée dans la question précédente.

Le tableau des variations de f est :

a.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f			

c.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
Variations de f				

b.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f			

d.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
Variations de f				

Question 9

L'ensemble S de l'inéquation $x^2 + x + 2 > 0$ est

- a.** $S = \emptyset$ **b.** $S = \{1\}$ **c.** $S = [1; 2]$ **d.** $S = \mathbb{R}$

Question 10

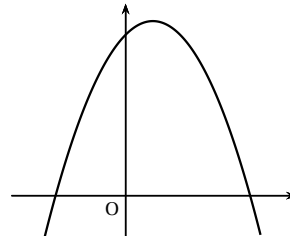
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels.

On considère dans un repère la courbe représentative de f tracée ci-contre.

On appelle Δ son discriminant.

On peut affirmer que :

- a.** $a > 0$ ou $c < 0$ **c.** $a < 0$ et $c < 0$
b. c et Δ sont du même signe **d.** $a < 0$ et $\Delta < 0$



1.5 Préparer l'examen : seconde partie

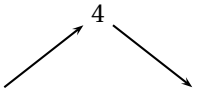
EXERCICE 145 : VRAI/FAUX

15 minutes

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$.

Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse devra être justifiée.

1. La forme développée de f est $f(x) = -2x^2 + 2$.
2. Le tableau de variations de la fonction f est :

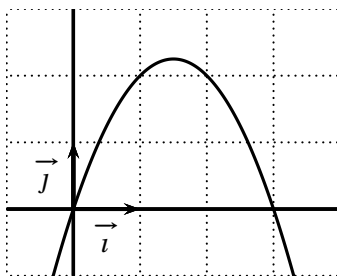
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f			

3. La courbe représentative de la fonction f admet un sommet de coordonnées $(4; -1)$.
4. La fonction f admet un maximum en $(-1; 4)$.
5. Le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

La courbe représentative de f , dans un repère orthonormé est tracée ci-dessous :



7. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont trois réels, $a \neq 0$.
Si a et c sont de signes contraires alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes.
8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = 5x - 4$ est $S = \{1\}$.
9. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + 2x + 3 > 0$, où x est un réel, est $S =]-1; 3[$.
10. Les courbes représentatives des fonction $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = 4x^2 + 2x + 1$ ont deux points d'intersection.

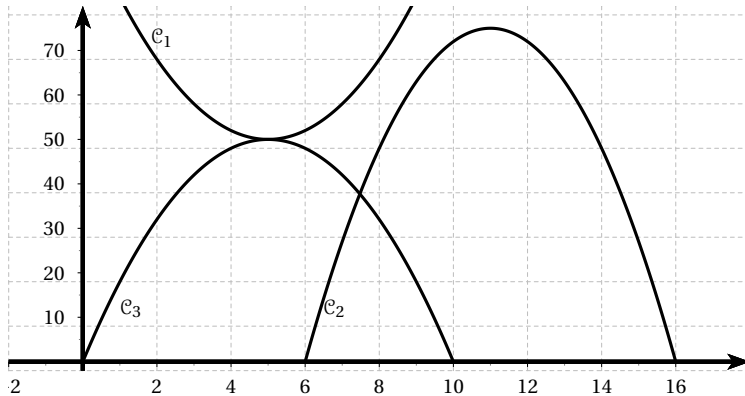
EXERCICE 146**20 minutes**

Un maître nageur veut délimiter la zone de baignade surveillée. Il souhaite réaliser une zone rectangulaire dont un côté est matérialisé par la plage et les trois autres par un cordon flottant amarré à la limite sable - eau. Il dispose de 200 mètres de cordon. Il souhaite délimiter une zone d'aire maximale.

Soit x la longueur, en dizaine de mètres, du côté de la zone perpendiculaire à la plage.

On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire de baignade.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Vérifier que $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 20x$.
3. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $-2(x - 5)^2 + 50$.
4. Parmi les courbes suivantes, identifier celle qui représente la fonction $\mathcal{A}$.



5. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
6. Pour quelle valeur de x l'aire de la zone de baignade est-elle maximale? Quelle est alors la valeur de cette aire?

EXERCICE 147**20 minutes**

Un agriculteur veut délimiter un parc pour ses poules et un autre pour ses chèvres. Il souhaite réaliser deux zones carrées indépendantes (il n'y a pas de côté commun aux deux parcs). Il dispose pour cela de 100 mètres de grillages.

Soit x la longueur, en mètres, du côté du parc des poules.

On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire de totale des deux parcs.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Vérifier que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 50x + 625$.
3. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $2(x - 12,5)^2 + 312,5$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
5. Pour quelle valeur de x l'aire totale est-elle minimale? Quelle est alors la valeur de cette aire?

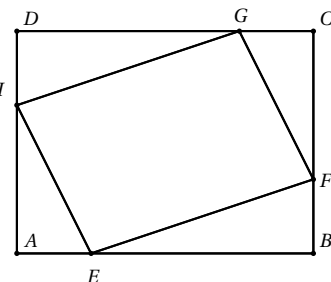
EXERCICE 148**20 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ cm et $BC = 3$ cm.

Sur les côtés de ce rectangle, on place les points E , F , G et H comme sur la figure ci-contre tels que : $AE = BF = CG = DH$.

On pose $AE = x$ cm.

On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire du quadrilatère $EFGH$.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Vérifier que la somme des aires des quatre triangles AEH , BEF , CFG et DGH est égale à $7x - 2x^2$.
3. En déduire que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 7x + 12$.
4. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{8}$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
6. Existe-t-il une position de E pour laquelle $\mathcal{A}$ est minimale? Si oui, quelle est sa valeur?
7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^2 - 7x + 5 = 0$.
8. Existe-il une position du point E pour laquelle $\mathcal{A}$ est égale à 7 cm²?

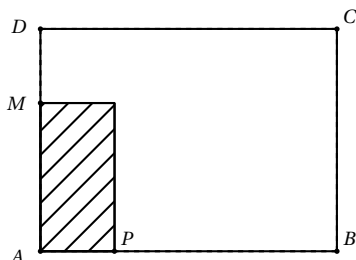
EXERCICE 149**20 minutes**

Dans son champ, Bob possède un poulailler de forme rectangulaire, de dimensions 6 m et 3 m. Il souhaite laisser plus d'espace à ses poules, pour cela il veut construire un enclos comme l'indique la figure ci-contre.

Bob dispose de 21 m de clôture.

Le poulailler est représenté par le rectangle hachuré, la partie en blanc représente la partie extérieure pour les poules.

On pose $AB = x$. On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ correspondant à l'aire extérieure.



1. Démontrer que $AD = 15 - x$.
2. Démontrer que $\mathcal{A} = -x^2 + 15x - 18$.
3. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $-\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{153}{4}$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
5. Pour quelle valeur de x l'aire $\mathcal{A}$ est-elle maximale? Quelle est alors la valeur de cette aire?

1.6 Aller plus loin

EXERCICE 150

15 minutes

Pour un réel x , l'unique nombre dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.

☞ On a donc pour tous réels x et y , $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ et $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$.

Soit $t = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

1. Montrer que $t^3 + 3t - 4 = 0$.
2. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $\forall t \in \mathbb{R} : t^3 + 3t - 4 = (t-1)(at^2 + bt + c)$.
3. En déduire que t est un nombre entier.

EXERCICE 151

10 minutes

Deux points M_1 et M_2 sont mobiles sur un même axe $x'Ox$. Leurs mouvements commencent à l'instant de date $t = 0$. L'équation horaire du mouvement de M_1 est $x_1 = -t^2 + 10t$, celle du mouvement de M_2 , $x_2 = -\frac{6}{5}t^2 + 7t + 20$, x_1 et x_2 désignant les abscisses des points M_1 et M_2 à l'instant t .

1. Montrer que les mobiles M_1 et M_2 se rencontrent une fois et une seule au cours du mouvement. Dire à quel instant et en quel point.
2. Calculer les vitesses instantanées des deux mobiles à l'instant de leur rencontre.
☞ Si un point A se déplace selon une trajectoire d'équation $x = f(t)$, sa vitesse à l'instant t_0 sera $v_0 = f'(t_0)$.

EXERCICE 152

15 minutes

Lors d'une course hippique, les chevaux sont numérotés de 1 à n . Un des chevaux, blessé, ne prend pas le départ, la somme des numéros des partants est 260.

Combien y a-t-il eu de partants et quel est le numéro du cheval non partant?

EXERCICE 153

15 minutes

Des enfants se partagent un sachet de bonbons. Le premier enfant en prend un et le sixième de ce qui reste, le 2^e en prend 2 et le sixième de ce qui reste, le 3^e en prend 3 et le sixième de ce qui reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui lui prend tout ce qui reste.

Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de bonbons, sachant que tous les enfants ont eu le même nombre de bonbons?

EXERCICE 154

10 minutes

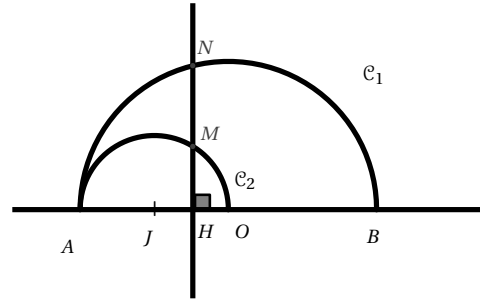
Existe-t-il des valeurs $n \in \mathbb{N}$, telles que les deux racines du polynôme $P(x) = x^2 + nx + 1$ soient rationnelles?

EXERCICE 155**20 minutes**

Soit $[AB]$ un segment de longueur 2, $\mathcal{C}_1$ le demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, $\mathcal{C}_2$ le demi-cercle de centre J et de diamètre $[AO]$.

Soit H un point du segment $[AO]$. La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe $\mathcal{C}_1$ en N et $\mathcal{C}_2$ en M .

Où placer le point H de sorte que $MN = \frac{1}{2}$?

**EXERCICE 156****10 minutes**

Comment choisir les constantes réelles a , b et c pour que la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie l'équation $xP'(x) - 2P(x) = 0$?

EXERCICE 157**20 minutes**

1. Déterminer les entiers relatifs a , b , c et d tels que, pour tout réel x , on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + 8 = (x + b)(x^2 + cx + d).$$

Attention, il y a plusieurs solutions.

2. Soit p un nombre premier donné, supérieur à 2, déterminer, en fonction de p , les entiers relatifs a , b , c et d tels que, pour tout réel x , on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + p = (x + b)(x^2 + cx + d).$$

EXERCICE 158**20 minutes**

1. Décomposer le polynôme $x^4 + 4$ en produit de deux facteurs du second degré.
2. En déduire que 5 est le seul nombre premier de la forme $N^4 + 4$, avec N entier naturel.
3. Montrer que si N n'est pas un multiple de 5, $N^4 + 4$ est un multiple de 5.

EXERCICE 159**20 minutes**

Dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable x , on considère les cinq polynômes A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 définis par

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 1, & A_1(x) &= x - 1, & A_2(x) &= (x - 1)(x - 2), \\ A_3(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3), & A_4(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4). \end{aligned}$$

1. Montrer que tout polynôme P qui possède un degré inférieur ou égal à 4 admet une expression, et une seule, de la forme

$$P = a_0 A_0 + a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 \text{ où } a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ et } a_4 \text{ sont des constantes réelles.}$$

2. On choisit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^4$.

Calculer les coefficients correspondants à ce polynôme.

EXERCICE 160**20 minutes**

Déterminer le réel a pour que l'équation $x^2 - 5x + a = 0$ admette deux solutions réelles distinctes comprises entre 1 et 9.

EXERCICE 161**15 minutes**

- Démontrer que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$.
 ☞ Pour tout réel $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$.
- On suppose que $\tan a$ et $\tan b$ sont les solutions de l'équation $x^2 + px + q = 0$.
 Déterminer la relation entre p et q pour que $a + b = \frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 162**15 minutes**

- Sachant que l'équation $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$ admet deux solutions réelles opposées, déterminer ces deux solutions.
- En déduire une factorisation du polynôme $P(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.
- Montrer que l'équation n'admet que deux solutions réelles.

EXERCICE 163**15 minutes**

On considère l'ensemble (E) des équations de degré 4, à coefficients réels, de la forme

$$(1) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

- Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (1).
- Après avoir divisé l'équation par x^2 et posé $u = x + \frac{1}{x}$, montrer que la nouvelle inconnue u est solution de l'équation : (2) $u^2 + au + b - 2 = 0$.
- En déduire les solutions de l'équation $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

EXERCICE 164 : MÉTHODE DE DEL FERRO**30 minutes**

Le but de l'exercice est d'établir une formule permettant de résoudre les équations de degré 3.

- En posant $x = t - \frac{b}{3a}$, montrer que toute équation de degré 3, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut se ramener à une équation de la forme $t^3 + pt + q = 0$.
- En développant $(u+v)^3$, montrer que $t = u+v$ est solution de l'équation $t^3 + pt + q = 0$ si

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$
- En posant $X = u^3$ et $Y = v^3$, montrer que X vérifie l'équation $(E) \quad U^2 + qU - \frac{p^3}{27} = 0$.
- Résoudre l'équation (E) .
- En déduire les valeurs de u et v en fonction de p et q .
- En déduire une solution exacte de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, en fonction de a , b , c et d .
- Déterminer une solution exacte de chaque équation :