Franck Luthon

Mathématiques pour l'électronique

Transformées intégrales et séries de Fourier avec exercices corrigés



ellipses

Références sciences

Mathématiques pour l'électronique

Transformées intégrales et séries de Fourier avec exercices corrigés

Franck Luthon

ellipses

Collection Références sciences

dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

Retrouvez tous les livres de la collection et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-101487
Dépôt légal : avril 2025

©Ellipses Édition Marketing S.A., 2025
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris

DANGER LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Le traitement du signal est la discipline à l'interface entre la mathématique et la physique. Les ingénieurs électroniciens ou les techniciens de maintenance sont confrontés en permanence à cette interface : en effet, tout système industriel comporte des capteurs et des actionneurs qui sont le siège de signaux qu'il faut savoir traiter, analyser, filtrer et transmettre, en vue d'agir sur les processus, contrôler et réguler les machines, interpréter les informations et prendre les décisions adéquates pour un fonctionnement optimal des installations.

La disponibilité de langages de programmation avec des bibliothèques riches et faciles d'usage telles que Matlab, Scilab, Python ou LabVIEW, qui fournissent des algorithmes standard très répandus et performants, comme la Fast Fourier Transform (FFT), permet désormais à des non-spécialistes de tester ou simuler aisément leurs applications.

Ce livre se veut une boîte à outils à l'usage de l'électronicien : on présente l'essentiel des formules mathématiques utiles à l'ingénieur, mais on y trouve peu de démonstrations. Cet ouvrage sera aussi utile à tout enseignant universitaire qui recherche un manuel contenant des sujets d'exercices et de programmation avec les solutions, qu'il pourra proposer à ses étudiants pour les entraîner ou les évaluer.

Le livre comporte une première partie de cours portant sur les outils mathématiques pour les sciences de l'ingénieur, et une seconde partie applicative avec une centaine d'exercices et problèmes corrigés, et des sujets de travaux pratiques portant sur la programmation de calculs et de traitements simples. Ce manuel de mathématique du signal pour l'ingénieur se veut équilibré, en terme de répartition entre ces deux parties, chacune occupant une moitié du volume.

Le choix éditorial du contenu de l'ouvrage s'articule comme suit : le premier outil présenté est la série de Fourier (avec comme chapitres préliminaires les suites et les séries), le deuxième outil est la transformée de Laplace (avec comme chapitres préliminaires les équations différentielles et l'intégration des fonctions de la variable complexe), le troisième outil est la transformée de Fourier (qui trouve son application essentielle en traitement de signal analogique), enfin le

dernier outil est la transformée en Z (qui trouve son application non seulement en traitement de signal numérique, mais aussi en automatique discrète).

Signalons que le chapitre 5 peut sans dommage être sauté par un lecteur qui s'intéresse avant tout aux applications des transformées intégrales. La présence de ce chapitre dans l'ouvrage répond d'abord au plaisir personnel de l'auteur de présenter le théorème des résidus, théorème qui l'a particulièrement séduit durant ses études scientifiques universitaires.

Les liens entre le cours et les exercices sont matérialisés par un numéro de paragraphe encadré en gras afin de faciliter les renvois pour le lecteur (par exemple **§13.100** renvoie au dernier exercice du chapitre 13). Chaque exercice requiert environ trente minutes pour sa résolution ; les problèmes complets plus longs vers la fin du chapitre sont quant à eux calibrés pour des séances d'une heure et demie. Pour les sujets qui sont repris ou adaptés d'autres ouvrages, la source en est citée.

Un complément électronique de l'ouvrage est disponible en ligne sur le site des éditions Ellipses. Il comporte les fichiers correspondant aux programmes présentés dans les divers chapitres, et aux simulations des exercices.

Remerciements

J'adresse avant tout mes remerciements aux trois professeurs de mathématique qui m'ont le plus marqué en tant qu'étudiant, que ce soit par leur personnalité, par la qualité de leur enseignement, ou par la profondeur de leur savoir mathématique : (i) mon professeur de math sup, Jean-Pierre Grivaux, qui, tel un Lucky Luke, écrivait au tableau plus vite que son ombre toutes les démonstrations mathématiques, sans jamais faire une seule erreur ; (ii) François Zadworny qui m'a fait découvrir toute la puissance et la beauté des transformées intégrales pendant ses cours d'amphi en école d'ingénieurs à l'INPG Grenoble, avec en point d'orgue le fameux théorème des résidus ; (iii) enfin Jean-Baptiste Nugeyre, collègue mathématicien profondément humaniste et cultivé, avec qui j'ai eu le plaisir de modestement collaborer, en menant en binôme avec lui des séances de travaux dirigés en école d'ingénieurs, et qui semblait vivre parmi les objets mathématiques et les connaître, comme le commun des mortels vit au milieu et connaît les objets du quotidien. Je ne sais ce qu'ils sont devenus après que nos chemins se sont croisés, mais je respecte à jamais leur savoir et leur mémoire.

J'ai aussi une pensée pour mes deux professeures de math de collège et de lycée, qui ont semé la graine, sans que j'en prenne conscience sur le moment : madame Yvette Thieffry-Rollet, ma professeure principale en classe de troisième, à la fois puissante et bienveillante, puis madame Danièle Dufour en première et terminale, un peu trop « maman » à mon goût d'adolescent révolté des années 1980, mais sincèrement communiste défenseuse d'un bien commun précieux : le service public de l'éducation nationale.

Par ailleurs, je remercie mes deux collègues de l'IUT de Bayonne, Katell Rousseau et Sophie Voisin-Laplace, professeures agrégées, qui m'ont fourni quelques-uns des cents exercices présentés dans cet ouvrage. J'adresse de même mes remerciements à Alain Chollet, professeur agrégé retraité de l'IUT de Tours, qui m'a autorisé à insérer ou adapter des exercices extraits de son ouvrage destiné à un public en formation technologique et industrielle [12].

Encore un grand merci à ma sœur Martine pour sa relecture méticuleuse du manuscrit, après sa contribution de relectrice à mon premier ouvrage sur

le traitement d'images [35] paru en 2021 aux mêmes éditions Ellipses, éditeur que je remercie d'avoir accepté de publier ma prose pour la deuxième fois [1].

Enfin, merci à mon fidèle ami Jean-Louis Besse, camarade de classe depuis la 6e à Rambouillet jusqu'en math sup au lycée Chaptal à Paris, et grâce à qui j'ai pu retrouver les prénoms de mes anciens professeurs. Je lui souhaite une retraite sereine dans le Béarn au pied des Pyrénées, où nous partagerons sûrement encore pour quelque temps le plaisir sportif et contemplatif de la randonnée en montagne, rivalisant avec le bienfait des bains vivifiants dans l'océan atlantique sur la côte basque.

1. Le logiciel libre LaTeX [45] a servi pour produire ces livres.

Table des matières

1 Suite numérique **27**
- 1.1 Définition . . . 27
- 1.2 Limite . . . 28
- 1.3 Critères de convergence . . . 28
  - 1.3.1 Théorème . . . 28
  - 1.3.2 Suites adjacentes . . . 28
  - 1.3.3 Critère de Cauchy . . . 28
- 1.4 Exemple fondamental . . . 29
- 1.5 Suite récurrente . . . 29
  - 1.5.1 Définition . . . 29
  - 1.5.2 Suite arithmétique . . . 29
  - 1.5.3 Suite géométrique . . . 30
- 1.6 Raisonnement par récurrence . . . 30

2 Série numérique **31**
- 2.1 Définition - Propriété de convergence . . . 31
  - 2.1.1 Série géométrique . . . 32
  - 2.1.2 Condition nécessaire de convergence . . . 32
  - 2.1.3 Condition de Cauchy . . . 32
  - 2.1.4 Série absolument convergente . . . 33
- 2.2 Série à termes positifs . . . 33
  - 2.2.1 CNS de convergence . . . 33
  - 2.2.2 Comparaison entre séries . . . 33
    - 2.2.2.1 Exemples de convergence . . . 33
    - 2.2.2.2 Critère de convergence . . . 34
  - 2.2.3 Comparaison de nature de série et d'intégrale généralisée 34
  - 2.2.4 Critère de Riemann : règle $n^{\alpha}u_n$ . . . 34
  - 2.2.5 Comparaison entre série positive et série géométrique . . . 35
    - 2.2.5.1 Théorème . . . 35
    - 2.2.5.2 Critère de Cauchy . . . 35
    - 2.2.5.3 Critère de d'Alembert . . . 35

2.2.5.4 Exemples de convergence 35
2.3 Série alternée 36
2.3.1 Définition 36
2.3.2 Théorème 36
2.3.2.1 Preuve 36
2.3.2.2 Exemple : série harmonique alternée 36
2.3.3 Règle d'Abel 36
2.4 Résumé des méthodes 37
2.5 Série entière 37
2.5.1 Définition 37
2.5.2 Rayon de convergence 37
2.5.2.1 Lemme d'Abel 37
2.5.2.2 Définition du rayon de convergence 38
2.5.3 Détermination du rayon de convergence 38
2.5.3.1 Critère de Cauchy 38
2.5.3.2 Règle de Cauchy 38
2.5.3.3 Critère de d'Alembert 38
2.5.3.4 Règle de d'Alembert 38

3 Développement en série de Fourier 39
3.1 Série trigonométrique 40
3.2 Théorème de Fourier 40
3.3 Condition de validité 40
3.4 Point de discontinuité (phénomène de Gibbs) 41
3.5 Fonction définie dans un intervalle quelconque 41
3.6 Terminologie 42
3.7 Propriétés de symétrie 42
3.7.1 Fonction paire 42
3.7.2 Fonction impaire 43
3.8 Formule de Bessel-Parseval 43
3.9 Définition de la valeur efficace 43
3.10 Intégration et dérivation 44
3.10.1 Intégration 44
3.10.2 Dérivation 45
3.11 Développement exponentiel complexe 46

4 Équation différentielle 47
4.1 Généralités 47
4.1.1 Définition 47
4.1.2 Théorème 48
4.2 Équation différentielle du 1er ordre 48

4.2.1 Équation différentielle à variables séparables 48
4.2.2 Équation différentielle homogène 48
4.2.2.1 Définition 48
4.2.2.2 Intégration par changement de fonction 48
4.2.2.3 Changement de variable en coordonnées polaires 49
4.2.3 Différentielle totale exacte 49
4.2.3.1 Forme générale 49
4.2.3.2 Intégration 50
4.2.4 Équation différentielle linéaire 50
4.2.4.1 Définition 50
4.2.4.2 Méthode d'intégration 50
4.2.4.3 Théorème 51
4.3 Équation différentielle linéaire d'ordre n 51
4.3.1 Définition 51
4.3.2 Équation sans second membre 51
4.3.2.1 Théorème 1 51
4.3.2.2 Wronskien 52
4.3.2.3 Théorème 2 52
4.3.2.4 Connaissance d'intégrales particulières 52
4.3.2.5 Exemple 52
4.3.3 Équation avec second membre 53
4.3.3.1 Théorème 53
4.3.3.2 Solution particulière : variation de la constante 53
4.4 EDL à coefficients constants 54
4.4.1 Solution générale sans 2nd membre 54
4.4.2 Solution particulière avec 2nd membre 55
4.4.3 Solution globale 55

5 Fonction de la variable complexe 57
5.1 Nombre complexe 57
5.1.1 Définition 57
5.1.2 Somme 58
5.1.3 Produit 58
5.1.4 Quotient 58
5.1.5 Complexe conjugué 59
5.1.6 Racines n-ièmes 59
5.2 Fonction de la variable complexe 59
5.2.1 Continuité 59
5.2.2 Dérivabilité 60
5.2.2.1 Exemple 60
5.2.2.2 Contre-exemple 60

5.2.3 Relations de Cauchy . . . 60
5.2.4 Réciproque . . . 60
5.2.5 Holomorphie et analyticité . . . 61
5.2.5.1 Définitions . . . 61
5.2.5.2 Propriétés . . . 61
5.2.5.3 Exemples de fonctions holomorphes . . . 61
5.2.5.4 Remarque . . . 62
5.2.6 Harmonicité . . . 62
5.2.7 Réciproque . . . 62
5.2.8 Point singulier . . . 62
5.2.8.1 Définition . . . 62
5.2.8.2 Singularité artificielle . . . 63
5.2.8.3 Pôle d'ordre p . . . 63
5.2.8.3.1 Exemple : . . . 63
5.2.8.3.2 Définition : . . . 63
5.2.8.4 Point singulier essentiel . . . 63
5.2.8.5 Cas du point à l'infini . . . 63
5.2.9 Fonctions uniformes et multiformes . . . 64
5.2.10 Notion de point critique . . . 64
5.2.11 Exemple de la fonction racine . . . 64
5.2.12 Notion de coupure et choix d'une détermination . . . 65
5.2.12.1 Exemple 1 : $f(z) = \sqrt{z}$ . . . 66
5.2.12.2 Exemple 2 : $Z = f(z) = z^{1/n}$ . . . 67
5.2.12.3 Exemple 3 : $Z = \log z$ . . . 67
5.2.13 Définition générale de la notion de point critique . . . 68
5.2.13.1 Points critiques des fonctions élémentaires . . . 68
5.2.13.2 Généralisation aux autres fonctions multiformes 68
5.2.13.3 Cas du point à l'infini . . . 68
5.2.13.4 Cas des pôles et des zéros . . . 68
5.2.13.5 Exemple 1 . . . 68
5.2.13.6 Exemple 2 . . . 69
5.3 Fonction définie par une série entière . . . 69
5.3.1 Série de la variable complexe . . . 69
5.3.2 Convergence absolue . . . 69
5.3.3 Rappel sur la convergence des séries . . . 69
5.3.3.1 Condition nécessaire de convergence . . . 70
5.3.3.2 Théorème de Cauchy . . . 70
5.3.3.3 Critère de Cauchy . . . 70
5.3.3.4 Critère de d'Alembert . . . 70
5.3.3.5 Comparaison avec une intégrale . . . 70
5.3.3.6 Série de Riemann . . . 71

5.3.4 Convergence uniforme . . . 71
5.3.4.1 Théorème de Cauchy . . . 71
5.3.4.2 Règle de Weierstrass . . . 71
5.3.4.3 Convergence absolue ⇒ Convergence uniforme 71
5.3.4.4 Critère d'Abel . . . 71
5.3.4.5 Intégration d'une série CU . . . 72
5.3.5 Série entière de la variable complexe . . . 72
5.3.5.1 Définition . . . 72
5.3.5.2 Convergence . . . 72
5.3.5.3 Théorème . . . 72
5.3.5.4 Cas particulier . . . 73
5.3.5.5 Généralisation . . . 73
5.3.6 Développement en série de Taylor . . . 73
5.3.6.1 Développement de Mac-Laurin . . . 73
5.3.6.2 Fonction analytique . . . 73
5.3.7 Fonctions entières . . . 74
5.3.7.1 Fonction exponentielle $f(z) = \mathrm{e}^z$ . . . 74
5.3.7.2 Fonctions trigonométriques . . . 74
5.3.7.3 Fonctions hyperboliques . . . 74
5.3.7.3.1 Remarque . . . 75
5.3.7.3.2 Possibilité d'avoir $\cos z > 1$ . . . 75
5.3.8 Série géométrique et fonction $\log(1+z)$ . . . 75
5.3.9 Convention . . . 75
5.4 Intégration de fonctions de la variable complexe . . . 75
5.4.1 Intégrale de Cauchy . . . 75
5.4.1.1 Définition . . . 75
5.4.1.2 Intégration des séries . . . 76
5.4.2 Théorème de Cauchy . . . 77
5.4.3 Notion de primitive . . . 77
5.4.3.1 Théorème . . . 78
5.4.3.2 Preuve . . . 78
5.4.4 Formule de Cauchy . . . 79
5.4.5 Développement de $f(z)$ holomorphe en série entière . . . 80
5.4.5.1 Développement en série entière sur un contour 80
5.4.5.2 Existence des dérivées . . . 82
5.5 Théorème des résidus . . . 82
5.5.1 Développement en série de Laurent en un point singulier 82
5.5.2 Preuve . . . 83
5.5.3 Cas d'un pôle d'ordre p . . . 84
5.5.4 Théorème des résidus . . . 84
5.5.4.1 Résidu d'une fonction uniforme . . . 84

5.5.4.2 Théorème des résidus 84
5.5.4.3 Calcul de résidus 85
5.5.4.3.1 Cas d'un pôle simple 85
5.5.4.3.2 Pôle multiple : 86
5.5.4.3.3 Cas d'un point singulier essentiel : . . 86
5.5.4.3.4 Résidu au voisinage de l'infini : 86
5.5.4.4 Extension du théorème des résidus 87
5.5.4.4.1 Cas d'un nombre fini de singularités . 87
5.5.4.4.2 Cas d'une fraction rationnelle : 88
5.6 Application au calcul d'intégrales finies 88
5.6.1 Théorème 1 88
5.6.2 Théorème 2 89
5.6.3 Lemme 1 de Jordan 89
5.6.4 Lemme 2 de Jordan 89
5.6.5 Calcul d'intégrales définies (fonctions uniformes) 89
5.6.5.1 Fraction rationnelle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ 89
5.6.5.2 Intégrale de fonction trigonométrique 90
5.6.5.3 Intégrale renfermant une exponentielle complexe 90
5.6.5.4 Fonction exponentielle $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{imx} g(\mathrm{e}^{kx}) dx$. 91
5.6.6 Intégrales de fonctions multiformes 92
5.6.6.1 Précaution et conseil 92
5.6.6.2 Fonction racine $I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ 92
5.6.6.3 Racine et puissance non entière 93
5.6.6.4 Fonction logarithme 94

6 Transformée de Laplace **95**
6.1 Intégrale de Laplace 95
6.1.1 Définition 95
6.1.2 Abscisse de convergence 96
6.1.3 Quelques cas particuliers 97
6.1.3.1 Fonction unité de Heaviside $\mathcal{U}(t)$ et $\mathcal{U}(t-t_0)$ 97
6.1.3.2 Impulsion 97
6.1.3.3 Impulsion de Dirac 98
6.1.3.4 Fonction puissance $f(t) = t^\nu$ 98
6.1.3.5 Fonction exponentielle $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ et $f(t) = t^n \mathrm{e}^{at}$ 99
6.2 Règles de Heaviside 99
6.2.1 Linéarité 99
6.2.2 Première règle de Heaviside 99
6.2.3 Deuxième règle de Heaviside 100
6.2.4 Applications 100
6.2.4.1 Recherche de transformées 100

6.2.4.2 Recherche d'originaux . . . 100
6.3 Inversion de la transformée de Laplace . . . 101
6.3.1 Définition de $\mathcal{U}(t)$ par une intégrale de Bromwich-Wagner 101
6.3.2 Intégrale de Mellin-Fourier . . . 102
6.3.3 Calcul de l'intégrale de Mellin-Fourier . . . 102
6.3.3.1 Contour de Bromwich . . . 102
6.3.3.2 Intégrale de Bromwich-Wagner . . . 102
6.3.3.3 Lemme de Jordan généralisé . . . 102
6.3.3.4 Contour équivalent . . . 103
6.3.3.5 Principe de calcul . . . 103
6.3.3.6 Exemple d'une fonction uniforme . . . 104
6.4 Règles opératoires du calcul symbolique . . . 104
6.4.1 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre . . . 104
6.4.2 Changement d'échelle . . . 105
6.4.3 Translation de la variable concrète t et symbolique p . . . 105
6.4.4 Théorème du produit de Borel (convolution) . . . 105
6.4.5 Dérivation et intégration par rapport à t . . . 106
6.4.6 Théorèmes de la valeur initiale et finale . . . 106
6.4.7 Dérivation et intégration par rapport à la variable p . . . 106
6.5 Application de la TL : fonction de transfert . . . 107
6.5.1 Système linéaire SLIT . . . 107
6.5.2 Réponse impulsionnelle et convolution . . . 107
6.5.3 Distribution de Dirac . . . 108
6.5.4 Intérêt pour l'étude des systèmes . . . 108
6.5.5 Réponse harmonique . . . 109
6.6 EDL à coefficients constants . . . 109
6.6.1 Méthode classique . . . 110
6.6.2 Méthode symbolique . . . 110

7 Transformée de Fourier 111
7.1 Définition . . . 111
7.2 Règles opératoires . . . 112
7.2.1 Linéarité . . . 112
7.2.2 Transposition . . . 112
7.2.3 Conjugaison et hermiticité . . . 112
7.2.4 Changement d'échelle . . . 113
7.2.5 Translation de la variable concrète t (règle du retard) . . . 113
7.2.6 Translation de la variable symbolique : règle de modulation 113
7.2.7 Dérivation et intégration par rapport à t . . . 114
7.2.7.1 Généralisation . . . 114
7.2.7.2 Intégration . . . 114

7.2.8 Dérivation par rapport à ν . . . 114
7.2.9 Théorème de convolution . . . 114
7.2.10 Formule de Parseval-Plancherel . . . 115
7.2.11 Égalité fondamentale et moyen mnémotechnique . . . 115
7.3 Relation entre TF et TL . . . 116
7.3.1 Cas où l'on suppose que $f(t) = f(t).\mathcal{U}(t)$ . . . 116
7.3.2 Transformée inverse . . . 116
7.3.3 Cas où $f(t) \neq 0$ pour $t < 0$ . . . 116
7.4 TF de quelques fonctions et distributions . . . 117
7.4.1 TF de $\delta(t-a)$ . . . 117
7.4.2 TF de $f(t) = 1$ au sens des distributions . . . 117
7.4.3 TF de $\exp(\mathrm{i}2\pi at)$ . . . 118
7.4.4 TF des sinusoïdes $\cos(2\pi at)$ et $\sin(2\pi at)$ . . . 118
7.4.5 Fonctions propres de la TF . . . 118
7.4.5.1 Peigne $p(t)$ . . . 118
7.4.5.2 Loi de Laplace-Gauss . . . 118

8 Transformée de Fourier discrète 119
8.1 Introduction . . . 119
8.2 Conversion analogique-numérique . . . 120
8.2.1 Échantillonnage et quantification . . . 120
8.2.2 Échantillonnage temporel . . . 120
8.3 Transformée de Fourier discrète . . . 123
8.3.1 TFDT d'un signal causal . . . 123
8.3.2 Troncature temporelle . . . 123
8.3.3 Pondération temporelle . . . 124
8.3.4 Échantillonnage fréquentiel - TFD . . . 126

9 Transformée en Z 131
9.1 Introduction sur l'échantillonnage . . . 131
9.2 Rappel sur les distributions . . . 132
9.2.1 Fonction d'échantillonnage (peigne de Dirac) . . . 132
9.2.2 Fonction échantillonnée . . . 132
9.3 TL d'une fonction échantillonnée . . . 132
9.4 TZ des puissances de t . . . 133
9.5 TZ de $f(t)\exp(-at)$ . . . 133
9.6 Théorème . . . 134
9.7 Translation temporelle . . . 134
9.7.1 Retard . . . 134
9.7.2 Avance . . . 134
9.8 Théorème de la valeur initiale . . . 135

9.9 Théorème de la valeur finale . . . 135
9.10 Formule d'inversion . . . 136
9.11 Propriété périodique de $\phi^*(p)$ et relation avec $\phi(p)$ . . . 137
9.12 Expression de $\phi^*(p)$ à l'aide des résidus . . . 138
9.13 Dérivation et intégration par rapport à un paramètre . . . 138
9.14 Théorème de Parseval . . . 139
9.15 Théorème de convolution discrète . . . 139
9.16 Conclusion générale sur les transformées . . . 140

10 Traitement de signal analogique 141
10.1 Introduction . . . 141
10.1.1 Définition . . . 141
10.1.2 Système analogique . . . 141
10.2 Signal analogique . . . 143
10.2.1 Typologie . . . 143
10.2.2 Énergie et puissance . . . 143
10.2.3 Corrélation . . . 144
10.2.3.1 Autocorrélation . . . 144
10.2.3.2 Corrélateur analogique . . . 144
10.2.3.3 Intercorrélation . . . 145
10.2.4 Dualité temps-fréquence . . . 145
10.2.4.1 Durée utile - Support borné . . . 145
10.2.4.2 Spectre utile - Spectre borné . . . 146
10.2.4.3 Principe d'incertitude . . . 146
10.2.5 Signal à bande étroite . . . 146
10.2.5.1 Définition . . . 146
10.2.5.2 Signal analytique . . . 147
10.3 Filtre analogique . . . 147
10.3.1 Convolution . . . 147
10.3.1.1 Calcul de la sortie d'un filtre . . . 147
10.3.1.2 Chaînage de filtres . . . 148
10.3.2 Réponse impulsionnelle et fonction de transfert . . . 148
10.3.2.1 Filtre réalisable . . . 148
10.3.2.2 Filtre stable . . . 149
10.3.2.3 Filtres idéaux . . . 149
10.3.3 Relations fondamentales des filtres . . . 150
10.3.4 Filtre à bande étroite . . . 150
10.3.4.1 Définition . . . 150
10.3.4.2 Principe du changement de fréquence . . . 151
10.3.4.3 Amplificateur sélectif accordable . . . 151
10.3.4.4 Multiplexage en fréquence . . . 152

10.4 Applications . . . 152
10.4.1 Filtrage . . . 152
10.4.1.1 Passe-bas (intégrateur) . . . 152
10.4.1.2 Passe-haut (dérivateur) . . . 153
10.4.1.3 Passe-bande . . . 153
10.4.2 Modulation . . . 153
10.4.2.1 Modulation d'amplitude . . . 153
10.4.2.2 Démodulation . . . 154
10.4.2.3 Modulation de fréquence . . . 154
10.4.2.3.1 Fréquence instantanée : . . . 154
10.4.2.3.2 Spectre : . . . 154
10.4.2.3.3 Réalisation : . . . 155
10.4.2.3.4 Démodulation : . . . 155
10.4.2.4 Comparaison des modulations . . . 155
10.4.3 Analyse spectrale . . . 155
10.4.3.1 But . . . 155
10.4.3.2 Principe . . . 157
10.4.3.3 Mise en œuvre . . . 157
10.4.3.4 Résolution fréquentielle . . . 157
10.4.3.4.1 Pouvoir de résolution : . . . 157
10.4.3.4.2 Troncature temporelle : . . . 157
10.4.3.4.3 Exemple des audio-fréquences : . . . 158
10.5 Extensions . . . 158

11 Traitement de signal numérique 159
11.1 Introduction . . . 159
11.1.1 Généralités . . . 159
11.1.2 Outils mathématiques . . . 159
11.1.2.1 Transformée de Fourier discrète dans le temps 159
11.1.2.2 TFD et transformée en Z . . . 160
11.1.3 Systèmes numériques . . . 160
11.1.3.1 Équation aux différences . . . 160
11.1.3.2 Produit de convolution discret . . . 161
11.1.3.3 Fonction de transfert . . . 161
11.2 Signaux numériques . . . 161
11.2.1 Les 4 opérations de base . . . 161
11.2.2 Signaux élémentaires et typologie . . . 161
11.2.3 Corrélation . . . 162
11.2.4 Échantillonnage . . . 162
11.2.4.1 Théorème de Shannon . . . 162
11.2.4.2 Échantillonnage naturel . . . 162

11.2.4.3 Échantillonneur-bloqueur 163
11.2.5 Quantification 163
11.3 Filtres numériques 164
11.3.1 Causalité et stabilité 164
11.3.2 Système SLIT 164
11.3.3 Synthèse d'un filtre RIF 165
11.3.4 Synthèse d'un filtre RII 166
11.4 Filtrage 167
11.4.1 Linéaire 167
11.4.2 Non-linéaire 167
11.5 Analyse spectrale 167
11.5.1 Autocorrélation 167
11.5.2 Méthode non-paramétrique 168
11.5.3 Méthode paramétrique 168

12 Vade-mecum mathématique 171
12.1 Trigonométrie 171
12.2 Développements limités au voisinage de zéro 174
12.3 Décomposition des fractions rationnelles 175
12.4 Fonctions hyperboliques directes 176
12.5 Fonctions hyperboliques réciproques 177
12.6 Coniques 178
12.7 Rappels élémentaires 179
12.7.1 Rappel sur les complexes 179
12.7.2 Dérivation 180
12.7.3 Intégration 181
12.8 Unités exprimées en décibels 182
12.8.1 Unité de mesure de tension : le dBv 182
12.8.2 Unité de mesure de puissance : le dBm 182
12.8.3 Unité de gain (en tension ou courant) : le dB 182
12.8.4 Remarque 182
12.9 Distributions 183
12.9.1 Définition 183
12.9.2 Distribution de Dirac 183
12.10 Développement en série de Fourier 184
12.11 Tableau récapitulatif de la TL 185
12.12 Tableau récapitulatif de la TF 185
12.13 Tableau récapitulatif de la TZ 185
12.14 Tableau synthétique des transformées 185
12.15 Vade-mecum du calcul symbolique 190
12.16 Vade-mecum pour la transformée de Fourier 191

12.17 Vade-mecum sur la transformée en Z 192

13 Exercices **193**
13.1 Trigonométrie 193
13.2 Nombre complexe 193
13.3 Dérivation 194
13.4 Intégration trigonométrique 195
13.5 Équation différentielle 196
13.6 Décomposition de fraction rationnelle 196
13.7 Intégration 196
13.8 Somme de Riemann 197
13.9 Nature d'une suite par comparaison 198
13.10 Suite associée 198
13.11 Somme de cosinus et sinus d'arcs en progression arithmétique 198
13.12 Paradoxes grecs 199
13.13 Suite définie implicitement 199
13.14 Suite de Fibonacci 199
13.15 Convergence d'une suite 200
13.16 Suite récurrente 200
13.17 Raisonnement assassin par récurrence 200
13.18 Nature d'une série 201
13.19 Série alternée 201
13.20 Comparaison avec une intégrale 202
13.21 Calcul de somme de série numérique 202
13.22 Calcul de somme et de reste de série 202
13.23 Rayon de convergence de série entière 202
13.24 Convergence de série à termes positifs 203
13.25 Série à termes positifs et négatifs 203
13.26 Développement d'un signal carré 203
13.27 Signal rectangulaire 203
13.28 Signal triangulaire pair 204
13.29 Redressement double alternance 204
13.30 Signal en dents de scie 204
13.31 Développement d'un signal triangulaire 205
13.32 Signal d'un onduleur 205
13.33 Série de Fourier et calcul de somme 206
13.34 Démonstration de la formule de Wallis 207
13.35 EDL du 1er ordre : circuit RL série 207
13.36 EDL du second ordre 208
13.37 Circuit RLC parallèle 208
13.38 Régime apériodique 208

13.39 Propagation d'un virus . . . 209
13.40 Calcul de transformée de Laplace . . . 209
13.41 Résolution d'une équation différentielle . . . 210
13.42 Calcul d'un original . . . 210
13.43 Application électrique : circuit RC . . . 211
13.44 Circuit RLC série . . . 211
13.45 Généralisation de la notion d'impédance . . . 211
13.46 Étude de circuit . . . 211
13.47 Peigne de Dirac, convolution, échantillonnage . . . 212
13.48 Résolution d'équation différentielle . . . 212
13.49 Bode-Nyquist de fonctions élémentaires . . . 212
13.50 Fonction de transfert composée . . . 213
13.51 Amplificateur à résistance compensée . . . 213
13.52 Filtre correcteur à avance de phase . . . 213
13.53 Correcteur mécanique à avance de phase . . . 214
13.54 Calculs de transformée de Fourier . . . 215
13.55 Modulation d'amplitude et analyse spectrale . . . 216
13.56 Équation de diffusion de la chaleur . . . 216
13.57 Filtrage numérique . . . 217
13.58 Transformation en Z directe et inverse . . . 217
13.59 Échantillonnage . . . 218
13.60 Résolution d'équation de récurrence par la TZ . . . 218
13.61 Transformée de Laplace . . . 218
13.62 Transformée de Fourier . . . 219
13.63 Transformée en Z . . . 221
13.64 Transformée de Laplace . . . 221
13.65 Transformée en Z . . . 222
13.66 Calcul de transformées de Laplace . . . 222
13.67 Calcul d'un original . . . 223
13.68 Étude d'une fonction périodique . . . 223
13.69 Transformée de Fourier . . . 224
13.70 Série entière . . . 224
13.71 Décomposition en série de Fourier . . . 225
13.72 Transformée de Laplace : équation différentielle . . . 225
13.73 Transformée de Fourier : signal triangle . . . 226
13.74 DSF alternance positive . . . 226
13.75 Reconstitution d'un signal échantillonné : TFD . . . 226
13.76 TL : circuit RL série excité par une rampe . . . 228
13.77 Développement en série de Fourier . . . 229
13.78 Application de la transformée de Laplace . . . 230
13.79 Calcul d'une transformée de Fourier . . . 230

13.80 Échelons de Heaviside . . . 231
13.81 Originaux de Laplace . . . 232
13.82 Images de Laplace . . . 233
13.83 Différentielles par Laplace . . . 233
13.84 Transformée de Fourier d'une sinusoïde amortie . . . 233
13.85 Développement en série de Fourier . . . 233
13.86 Transformée de Laplace . . . 234
13.87 Transformée de Laplace : équation différentielle . . . 234
13.88 Développement en série de Fourier . . . 235
13.89 Transformée de Fourier : signal triangulaire . . . 235
13.90 Transformée de Fourier . . . 236
13.91 Série de Fourier : application en analyse spectrale . . . 236
13.92 Calcul de la somme d'une série numérique . . . 237
13.93 Étude d'un système du 1er ordre par TL . . . 238
13.94 Série de Fourier : étude de pompe à pistons . . . 239
13.95 Transformée de Laplace : étude de cuve de mélange . . . 241
13.96 Oscillateur excité par un signal carré : DSF . . . 243
13.97 Signal radar . . . 244
13.98 Corrélateur analogique . . . 245
13.99 Synthèse d'un filtre RII . . . 245
13.100 Calcul de filtre réjecteur électronique . . . 247

14 Travaux pratiques **249**
14.1 Introduction à Matlab . . . 249
14.1.1 Principales caractéristiques . . . 249
14.1.2 Environnement de travail . . . 250
14.1.2.1 Session Matlab . . . 250
14.1.2.2 Contrôle de session . . . 251
14.1.3 Langage de programmation . . . 252
14.1.3.1 Principe de la syntaxe . . . 252
14.1.3.2 Exemples d'instructions . . . 252
14.1.3.3 Opérateurs et constantes . . . 253
14.1.3.4 Contrôle de flux de données . . . 253
14.1.3.5 Création d'une fonction externe . . . 253
14.1.4 Bibliothèque de fonctions . . . 254
14.1.4.1 Fonctions graphiques . . . 254
14.1.4.2 Interaction utilisateur . . . 254
14.1.4.3 Interaction avec fichiers externes . . . 255
14.1.4.4 Manipulation de matrices . . . 255
14.1.4.5 Fonctions mathématiques . . . 255
14.1.4.6 Signaux de base . . . 255

14.2 Séance d'initiation . . . 256
14.2.1 Manipulation de matrices . . . 256
14.2.2 Manipulation de polynômes . . . 256
14.2.3 Représentation graphique d'un signal temporel . . . 257
14.2.4 Visualisation 3D et affichage d'image . . . 257
14.3 Calcul et affichage du DSF d'une fonction . . . 257
14.4 Équations différentielles . . . 258
14.4.1 Toolbox Symbolic Math . . . 258
14.4.2 ED Linéaire du 1er ordre . . . 258
14.4.3 ED Linéaire du 2e ordre . . . 258
14.4.4 Circuit RLC parallèle . . . 261
14.5 Transformée de Laplace . . . 261
14.5.1 Rappels et définition . . . 261
14.5.2 Calculs de quelques TL usuelles . . . 261
14.5.3 Résolution d'équation différentielle linéaire . . . 262
14.6 Fonction de transfert . . . 262
14.6.1 Rappels . . . 262
14.6.2 Amplificateur à résistance compensée . . . 262
14.7 Transformée de Fourier . . . 263
14.7.1 Rappels . . . 263
14.7.2 TF continue : fonctions usuelles . . . 264
14.7.3 TF discrète : analyse spectrale . . . 264
14.7.3.1 Étude du théorème de Shannon . . . 264
14.7.3.2 Influence de la troncature temporelle . . . 265
14.7.3.3 Étude de l'écrêtage . . . 265
14.7.4 Annexes . . . 265
14.7.4.1 Signaux tests . . . 265
14.7.4.2 Fonctions internes . . . 266
14.7.4.3 Fonctions externes . . . 266
14.8 Transformée en Z . . . 267
14.8.1 Rappel sommaire . . . 267
14.8.2 Fonctions usuelles . . . 267
14.8.3 Filtre numérique RII . . . 267
14.8.3.1 Conception de filtre numérique par TZ . . . 268
14.8.3.2 Addendum théorique . . . 269
14.9 Filtrage de signaux . . . 270
14.9.1 Filtrage par moyennage . . . 270
14.9.2 Filtrage par troncature du spectre . . . 270
14.9.3 Simulations . . . 271
14.10 Programmation alternative avec Scilab . . . 272
14.11 Simulateur des exercices . . . 272

14.12 Simulateur complémentaire 272

15 Solution des exercices **273**
15.1 Corrigé du 13.1 Trigonométrie 273
15.2 Corrigé du 13.2 Complexe 273
15.3 Corrigé du 13.3 Dérivation 274
15.4 Corrigé du 13.4 Intégration 275
15.5 Corrigé du 13.5 EDL 276
15.6 Corrigé du 13.6 Fraction rationnelle 276
15.7 Corrigé du 13.7 Intégrale 277
15.8 Corrigé du 13.8 Riemann 278
15.9 Corrigé du 13.9 Suite 279
15.10 Corrigé du 13.10 Suite associée 280
15.11 Corrigé du 13.11 Somme de sinusoïdes 280
15.12 Corrigé du 13.12 Grecs 281
15.13 Corrigé du 13.13 Suite homographique 282
15.14 Corrigé du 13.14 Fibonacci 283
15.15 Corrigé du 13.15 Convergence 284
15.16 Corrigé du 13.16 Suite récurrente 285
15.17 Corrigé du 13.17 Assassin 285
15.18 Corrigé du 13.18 Convergence de série 286
15.19 Corrigé du 13.19 Série alternée 288
15.20 Corrigé du 13.20 Série comparée 288
15.21 Corrigé du 13.21 Somme 289
15.22 Corrigé du 13.22 Reste 289
15.23 Corrigé du 13.23 Rayon 290
15.24 Corrigé du 13.24 Cauchy-Alembert 291
15.25 Corrigé du 13.25 Converge de série 292
15.26 Corrigé du 13.26 Carré 292
15.27 Corrigé du 13.27 Rectangle 292
15.28 Corrigé du 13.28 Triangle pair 294
15.29 Corrigé du 13.29 Double alternance 294
15.30 Corrigé du 13.30 Scie 295
15.31 Corrigé du 13.31 Triangle 295
15.32 Corrigé du 13.32 Onduleur 296
15.33 Corrigé du 13.33 Créneaux 297
15.34 Corrigé du 13.34 Wallis 300
15.35 Corrigé du 13.35 Circuit RL série 301
15.36 Corrigé du 13.36 EDL du 2nd ordre 302
15.37 Corrigé du 13.37 Circuit RLC parallèle 303
15.38 Corrigé du 13.38 Mode apériodique 303

15.39 Corrigé du 13.39 Virus 304
15.40 Corrigé du 13.40 Calcul de TL 305
15.41 Corrigé du 13.41 EDL du 2nd ordre 305
15.42 Corrigé du 13.42 Calcul d'un original 305
15.43 Corrigé du 13.43 Circuit RC par TL 305
15.44 Corrigé du 13.44 Circuit RLC par TL 306
15.45 Corrigé du 13.45 Impédance 307
15.46 Corrigé du 13.46 Circuit 308
15.47 Corrigé du 13.47 Peigne 309
15.48 Corrigé du 13.48 TL pour EDLCC 310
15.49 Corrigé du 13.49 Bode Nyquist simple 310
15.50 Corrigé du 13.50 Bode composé 311
15.51 Corrigé du 13.51 Amplificateur 312
15.52 Corrigé du 13.52 Avance 313
15.53 Corrigé du 13.53 Piston 313
15.54 Corrigé du 13.54 Porte 315
15.55 Corrigé du 13.55 Modulation 316
15.56 Corrigé du 13.56 Chaleur 317
15.57 Corrigé du 13.57 Filtre numérique 319
15.58 Corrigé du 13.58 TZ 321
15.59 Corrigé du 13.59 Échantillonnage 322
15.60 Corrigé du 13.60 TZ 323
15.61 Corrigé du 13.61 Transformée de Laplace 324
15.62 Corrigé du 13.62 Transformée de Fourier 325
15.63 Corrigé du 13.63 Transformée en Z 326
15.64 Corrigé du 13.64 Filtre du 2e ordre 326
15.65 Corrigé du 13.65 TZ 327
15.66 Corrigé du 13.66 TL 328
15.67 Corrigé du 13.67 Original 328
15.68 Corrigé du 13.68 Périodique 328
15.69 Corrigé du 13.69 Passe-bas 329
15.70 Corrigé du 13.70 Série entière 330
15.71 Corrigé du 13.71 DSF 330
15.72 Corrigé du 13.72 EDLCC d'ordre 2 331
15.73 Corrigé du 13.73 TF d'un triangle 331
15.74 Corrigé du 13.74 Alternance positive 332
15.75 Corrigé du 13.75 Reconstitution par TFD 332
15.76 Corrigé du 13.76 Circuit RL 333
15.77 Corrigé du 13.77 Alternance négative 333
15.78 Corrigé du 13.78 TL pour RL série 335
15.79 Corrigé du 13.79 Exponentielle décroissante 335

15.80 Corrigé du 13.80 Heaviside . . . 336
15.81 Corrigé du 13.81 Original . . . 337
15.82 Corrigé du 13.82 Image . . . 337
15.83 Corrigé du 13.83 Différentielle . . . 338
15.84 Corrigé du 13.84 Amorti . . . 338
15.85 Corrigé du 13.85 Alternance négative . . . 339
15.86 Corrigé du 13.86 TL système 1er ordre . . . 339
15.87 Corrigé du 13.87 TL pour EDLCC . . . 340
15.88 Corrigé du 13.88 Scie impaire . . . 340
15.89 Corrigé du 13.89 Triangle . . . 340
15.90 Corrigé du 13.90 Transformée du triangle . . . 341
15.91 Corrigé du 13.91 Analyse spectrale par DSF . . . 341
15.92 Corrigé du 13.92 TL de fonction périodique . . . 341
15.93 Corrigé du 13.93 Circuit RC . . . 342
15.94 Corrigé du 13.94 Pompe . . . 343
15.95 Corrigé du 13.95 Lavinas . . . 345
15.96 Corrigé du 13.96 Vibration . . . 346
15.97 Corrigé du 13.97 Radar . . . 348
15.98 Corrigé du 13.98 Corrélateur . . . 350
15.99 Corrigé du 13.99 Filtre récursif . . . 353
15.100 Corrigé du 13.100 Filtre réjecteur . . . 356

16 Solution des TP **359**
16.1 Délivrables attendus et critères d'évaluation . . . 359
16.2 Solution TP 14.2 Initiation . . . 360
16.3 Solution TP 14.3 DSF . . . 361
16.3.1 Programme Matlab . . . 361
16.3.2 Résultats . . . 363
16.4 Solution TP 14.4 Equations différentielles . . . 364
16.4.1 Programme Matlab . . . 364
16.4.2 Résultats graphiques . . . 365
16.5 Solution TP 14.5 TL . . . 365
16.5.1 Programme Matlab . . . 365
16.5.2 Solution de l'exercice de TP 14.5.3 . . . 366
16.6 Solution TP 14.6 Fonction de transfert . . . 366
16.6.1 Programme Matlab . . . 366
16.6.2 Résultats graphiques . . . 368
16.7 Solution TP 14.7 TF . . . 368
16.7.1 Programme Matlab . . . 368
16.7.2 Résultats graphiques . . . 369
16.7.3 Programme simulateur d'écrêtage . . . 369

16.7.4 Fonctions appelées 370
16.8 Solution TP 14.8 TZ 372
16.8.1 Programme et résultat 372
16.8.2 Programme synthétiseur de filtre numérique 374
16.9 Solution TP 14.9 Filtrage 375
16.9.1 Programme Matlab 375
16.9.2 Résultats graphiques 376
16.9.3 Fonctions appelées 376
16.10 Solution du 14.10 Alternative Scilab 377
16.10.1 Programme de transformée de Fourier 377
16.10.2 Programme Scilab pour DSF 378
16.11 Solution du 14.11 Simulateur d'exercices 381
16.12 Solution du 14.12 Complément de programmes 387
16.12.1 Analyse spectrale 387
16.12.2 Apodisation 388
16.12.3 Modulation 390

Conclusion **391**

Bibliographie **393**

Glossaire **397**

Index **399**

Chapitre 1

Suite numérique

Préambule

Les suites numériques sont des objets mathématiques qui revêtent une importance grandissante avec l'avènement technologique de l'informatique et des ordinateurs, dont l'usage généralisé conduit à la numérisation des informations et des signaux de notre vie quotidienne, qui deviennent alors des séquences de nombres, après échantillonnage et quantification.

On aborde dans ce chapitre les notions de base dont les mots-clés sont les suivants : terme général d'une suite, limite, convergence, divergence, suite majorée, minorée, suite récurrente, suite arithmétique, suite géométrique, raison d'une suite, somme partielle d'une suite [37, 31, 39].

1.1 Définition

On appelle suite à valeurs dans un ensemble E, la donnée d'une partie finie I de $\mathbb{N}$ et d'une application f :

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I \longrightarrow E \\ & n \longrightarrow u_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

u_n est appelé le terme général de la suite. Souvent on a : $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$.

Notation : la suite est notée $(u_n)_{n\in I}$.

Définitions :

— suite croissante : $\forall n \in I, u_{n+1} > u_n$

— suite décroissante : $\forall n \in I, u_{n+1} < u_n$

— suite majorée : $\exists\, M \in E \mid \forall n \in I, u_n < M$, ($M$ est appelé le majorant)

— suite minorée : $\exists\, m \in E \mid \forall n \in I, u_n > m$, ($m$ est alors le minorant).

1.2 Limite

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in I, (n \geq n_0) \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

Propriété : il y a unicité de la limite (la preuve résulte du fait que $\mathbb{R}$ est séparé).

Définition de la convergence : si la suite $(u_n)_{n\in I}$ admet pour limite ℓ, avec $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ converge vers ℓ. On note :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

Dans tous les autres cas, on dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ diverge. §13.15

1.3 Critères de convergence

1.3.1 Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) ; alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. §13.16

1.3.2 Suites adjacentes

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ croît} \\ (v_n) \text{ décroit} \\ \lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Théorème : deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

1.3.3 Critère de Cauchy

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère de Cauchy [32] si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq n_0, p \geq n_0) \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon$$

Théorème : on a l'équivalence (la preuve résulte du fait que $\mathbb{R}$ est complet) : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

1.4 Exemple fondamental

Soit $\alpha > 0$. On pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Alors :

$$\begin{array}{lll} \text{si :} & \alpha > 1, & (u_n) \text{ converge} \\ \text{si :} & 0 < \alpha \leq 1, & (u_n) \text{ diverge} \end{array}$$

Preuve : elle s'établit en quatre étapes §13.8.

1. u_n croît car : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$
2. cas $\alpha > 1$: on majore la somme par une intégrale convergente,
3. cas $0 < \alpha \leq 1$: on minore la somme par une intégrale divergente,
4. cas $\alpha = 1$: d'après 3, $u_n \geq \log(n+1)$ donc u_n ne peut être borné.

§13.9

1.5 Suite récurrente

1.5.1 Définition

Une suite récurrente est définie par la donnée d'une valeur initiale a et d'une équation itérative :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Théorème : si f est continue et si (u_n) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

— récurrence affine :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r.u_n + a \end{cases}$$

— récurrence homographique : $u_{n+1} = \frac{a.u_n+b}{c.u_n+d}$ avec $c \neq 0$ §13.13

— récurrence linéaire à deux termes : $u_{n+1} = a.u_n + b.u_{n-1}$ §13.14.

1.5.2 Suite arithmétique

C'est un cas particulier de suite récurrente où l'on ajoute, à chaque itération, une quantité identique r, appelée la raison de la suite [3] :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad u_n = n.r + a$$

Formule fondamentale : la somme partielle d'une suite arithmétique vaut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} u_n = (N+1)\left(a + \frac{Nr}{2}\right)} \tag{1.3}$$

Moyen mnémotechnique : On constate que c'est la moyenne des 2 termes extrêmes, multipliée par le nombre de termes de la somme partielle.

1.5.3 Suite géométrique

C'est un cas particulier de suite récurrente où l'on multiplie, à chaque itération, par une quantité identique r, appelée là aussi la raison :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ donné} \\ u_n = r.u_{n-1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad u_n = r^n.a$$

Formule fondamentale [1] : la somme partielle d'une suite géométrique vaut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} u_n = a\frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}} \tag{1.4}$$

§13.10 §13.11

1.6 Raisonnement par récurrence

La technique de démonstration par récurrence d'une formule mathématique portant sur un indice entier n est fréquemment utilisée, notamment pour les propriétés des suites numériques. Le raisonnement par récurrence consiste en trois étapes pour démontrer la vérité d'une propriété P, qui est fonction de l'indice n :

1. On montre que la propriété P est vraie pour un indice initial n_0 (typ. $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$) : P_{n_0} vraie.
2. Supposant la propriété P vraie au rang n, on démontre que cela implique qu'elle est aussi vraie au rang $n + 1$: $P_n \Rightarrow P_n + 1$
3. On en conclut alors qu'elle est vraie $\forall n > n_0$.

§13.3 §13.17

1. Mon prof de math sup, M. Grivaux, affirmait que cette formule mathématique est la découverte scientifique la plus importante depuis l'invention de la roue, et je ne suis pas loin de partager son avis.

Chapitre 2

Série numérique

Préambule

Une série numérique est une suite de sommes partielles ; c'est donc l'équivalent, en numérique, de la notion d'intégrale d'une fonction en analogique. En effet, une intégrale s'approxime numériquement comme la somme de petits rectangles élémentaires (cf. définition de l'intégrale de Riemann comme limite sur de petits intervalles de l'aire sous la courbe d'une fonction). Les séries de Fourier seront le point d'orgue de ce concept, trouvant application principalement pour l'analyse harmonique d'un signal électrique ou mécanique (distorsion du courant électrique, analyse vibratoire de machine tournante etc.)

Les mots-clés de ce chapitre sont : série de Riemann, somme d'une série, convergence, divergence, série alternée, série à termes positifs, série harmonique, série géométrique, convergence absolue, somme partielle, série entière, rayon de convergence, Cauchy, critère de d'Alembert, règle d'Abel [22].

2.1 Définition - Propriété de convergence

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On lui associe la suite des sommes partielles :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, alors on dit que la série (u_n) converge.
§13.21

2.1.1 Série géométrique

Soit $a \in \mathbb{C}^*, r \in \mathbb{C}$. La $\boxed{\text{série } (a.r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow |r| < 1}$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a.r^n = \frac{a}{1-r} \tag{2.1}$$

r est appelée la raison géométrique. **§13.12**

A contrario, toute série géométrique de raison $r \geq 1$ diverge.

2.1.2 Condition nécessaire de convergence

Une condition nécessaire (CN) est que :
la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (CV) $\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

N.B. : Ce n'est pas une condition suffisante, mais une simple implication.

Preuve : elle vient du fait que $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Exemple : soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{k}{4k-3}$$

On a : $|S_n - S_{n-1}| = |u_n| = \frac{n}{4n-3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ la série diverge.

Contre-exemple : considérons la série harmonique $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. On a bien : $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mais on ne peut pas conclure pour autant que la série converge.

2.1.3 Condition de Cauchy

On a l'équivalence (CNS) : la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Leftrightarrow$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV.
Donc le critère du § 1.3.3 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall q > p > n_0, ||S_q - S_p|| < \varepsilon$.
Or : $S_q - S_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q$,
d'où la condition de Cauchy sur les séries : la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
$\Leftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid (q > p > n_0) \Rightarrow |u_{p+1} + \ldots + u_q| < \varepsilon}$

Preuve : elle résulte du fait que l'ensemble $E = \mathbb{R}$ est un EVN complet.

Contre-exemple : série harmonique

On a : $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.
La condition n'est pas respectée dans ce cas : donc la série diverge.

2.1.4 Série absolument convergente

On a l'implication : la série $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Car, selon l'inégalité fondamentale Eq.(5.2), p. 58 :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \tag{2.2}$$

N.B. : Si $\sum(u_n)$ converge alors que $\sum|u_n|$ diverge, on parle de **semi-convergence**. C'est le cas de la série harmonique alternée.

2.2 Série à termes positifs $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

2.2.1 CNS de convergence

Considérons la somme partielle : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante. Pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée, c'est-à-dire que :
$\exists A \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq A$.
D'où la CNS : $\boxed{\text{série } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow \text{suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ majorée}}$

2.2.2 Comparaison entre séries

Soient deux séries (u_n) et (v_n).

— si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \neq 0$, alors (u_n) et (v_n) sont de même nature.

— si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et si la série $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

— si : $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n$, alors on a les implications :
série (v_n) converge $\Rightarrow$ série (u_n) converge (CV),
série (u_n) diverge $\Rightarrow$ série (v_n) diverge (DIV).

2.2.2.1 Exemples de convergence

1) $u_n = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} < v_n = \mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e}^n}$

2) $u_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{2^n} < v_n = \frac{1}{2^n}$

2.2.2.2 Critère de convergence

Hypothèse :
$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0, u_n > 0$ et $v_n > 0$ et $\exists n_1 \geq n_0 \mid \forall n > n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$
Conclusion : alors on a les implications
série $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Rightarrow$ série (u_n) CV
série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ DIV $\Rightarrow$ série (v_n) DIV

2.2.3 Comparaison de nature de série et d'intégrale généralisée

Hypothèses : soit une fonction f

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & & x \quad \longrightarrow f(x) > 0 \end{array} \tag{2.3}$$

— f décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a > 0$,

— f localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

— On définit : $u_n = f(n) \geq 0$.

Alors : la série $\sum(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.
§13.8 §13.20

Preuve : On a l'encadrement (illustré par la Fig. 15.2 p. 279) :

$$u_1 + \cdots + u_{n+1} \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq u_0 + \cdots + u_n \tag{2.4}$$

2.2.4 Critère de Riemann : règle $n^\alpha u_n$

La série de Riemann est définie par : $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, avec$\alpha > 0$.
On a vu en section 1.4 que : série $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$ §13.12
D'où l'énoncé de la règle : soit une série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On forme $v_n = n^\alpha u_n$. On cherche un α tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = \ell$, $\ell \geq 0$.
Alors : $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$ donc : $\begin{cases} \text{si } \alpha > 1, (u_n) \text{ CV} \\ \text{si } \alpha \leq 1, (u_n) \text{ DIV} \end{cases}$

Exemple

$$u_n = \left(\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \alpha > 0$$

On montre (à l'aide des DL) qu'elle ne converge que si : $\alpha > 1/3$.

2.2.5 Comparaison entre série positive et série géométrique

2.2.5.1 Théorème

Soit $u_n \geq 0$.
Si : $\exists\, r \in \mathbb{R}, 0 < r < 1 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq r^n$, alors on a l'implication :
Série $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Rightarrow$ série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV.

2.2.5.2 Critère de Cauchy

On forme la limite de la racine n-ième : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell}$. Alors :

— Si $\ell < 1$, la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV. §13.24
— Si $\ell > 1$, la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ DIV.
— Si $\ell = 1$, le cas est douteux.

Preuve : $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad u_n < (\ell + \varepsilon)^n$

2.2.5.3 Critère de d'Alembert

On forme la limite du rapport :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell}$$

— Si $\ell < 1$, la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV. §13.25
— Si $\ell > 1$, la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ DIV.
— Si $\ell = 1$, c'est un cas douteux.

2.2.5.4 Exemples de convergence

En fonction de l'expression de u_n, on choisit le critère le plus pratique :
1) Cauchy pour $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$; 2) D'Alembert pour $u_n = \frac{n!}{n^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
§13.18

2.3 Série alternée

2.3.1 Définition

Une série $(u_n)_{n\in I}$ est dite alternée si elle présente une alternance de signe d'un terme au suivant :

$$\begin{cases} u_{2n} \geq 0 \\ u_{2n+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_n \geq 0, & v_n = |u_n| \\ u_n = (-1)^n v_n \end{cases}$$

2.3.2 Théorème

Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
alors la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
§13.19

2.3.2.1 Preuve

On calcule le reste de la série : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, où S_n est la somme partielle et $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est la limite.

On a toujours : $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

2.3.2.2 Exemple : série harmonique alternée

C'est une série convergente puisqu'elle vérifie le théorème 2.3.2.

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \tag{2.5}$$

2.3.3 Règle d'Abel

Soit une série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$, avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_n \in \mathbb{R}_+^* \\ \lim_{+\infty} \varepsilon_n = 0 \\ \text{suite } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroît} \end{cases}$$

On suppose que : $\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, |v_0 + v_1 + \ldots + v_n| \leq M$

Alors : la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

N.B. : ce théorème contient le précédent : $u_n = (-1)^n |u_n| = v_n \varepsilon_n$.

2.4 Résumé des méthodes

Voici un récapitulatif des méthodes d'étude des sommes S_n : **§13.22**

1. Comparaison à une autre série.
2. Comparaison à une intégrale définie.
3. Critères de Cauchy ou de d'Alembert ; règle $n^\alpha u_n$.
4. Réduction de S_n si le terme général s'écrit comme une différence : $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1) \Rightarrow S_n = \varphi(n) - \varphi(0)$
5. Emploi de la formule de Mac-Laurin ou de Taylor : il s'agit de Développement en Série Entière (DSE) comme exposé à la section 2.5.

Exemple

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

2.5 Série entière

2.5.1 Définition

C'est une série de terme général dépendant d'une variable $x \in \mathbb{R}$:
$u_n = u_n(x) = a_n x^n$. On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Cette expression de $f(x)$ est ce qu'on appelle le DSE de la fonction.
Quant à $f(x)$, elle correspond à la valeur de la somme de la série.

2.5.2 Rayon de convergence

2.5.2.1 Lemme d'Abel

On suppose que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n {x_0}^n)$ est bornée.
Alors $\forall |x| < |x_0|$, la série $(a_n x^n)$ est absolument convergente.

Preuve : en notant M un majorant, on écrit

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| . \left| \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

or une série géométrique de raison $r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ converge, CQFD.

2.5.2.2 Définition du rayon de convergence

Notons R le rayon de convergence d'une série entière. Alors par définition :

— si $|x| < R$, la série $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente.

— si $|x| > R$, la série $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2.5.3 Détermination du rayon de convergence

On applique les critères de convergence de Cauchy ou d'Alembert à la série $u_n = a_n x^n$. §13.23

2.5.3.1 Critère de Cauchy

Si l'on pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$; alors le critère de Cauchy donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.|x| = \ell.|x| \Rightarrow \text{ série } \begin{cases} \text{CV} & \text{si} \quad \ell.|x| < 1 \\ \text{DIV} & \text{si} \quad \ell.|x| > 1 \end{cases}$$

2.5.3.2 Règle de Cauchy

Elle permet d'obtenir la valeur du rayon de convergence.

Si l'on note : $\boxed{\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, alors : $\boxed{R = \frac{1}{\ell}.}$

Preuve : En effet : $\lim\limits_{\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\ell} \longrightarrow$ série CV.

2.5.3.3 Critère de d'Alembert

De même, si l'on pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, alors l'application du critère de d'Alembert donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} |x|.\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell.|x| \Rightarrow \text{ série } \begin{cases} \text{CV} & \text{si} \quad \ell.|x| < 1 \\ \text{DIV} & \text{si} \quad \ell.|x| > 1 \end{cases}$$

2.5.3.4 Règle de d'Alembert

Elle fournit aussi la valeur du rayon de convergence.

$\boxed{\text{Si : } \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \text{ alors : } R = \frac{1}{\ell}.}$

N.B. : Le DSE d'une fonction $f(x)$ est valable uniquement à l'intérieur du cercle de convergence.

§13.70

Chapitre 3

Développement en série de Fourier

Préambule

Les séries de Fourier sont un outil mathématique très utilisé dans les sciences de l'ingénieur, que ce soit en mécanique ou en électricité [11]. Le Développement en Série de Fourier (DSF) d'un signal permet en effet de connaître sa fréquence fondamentale et ses harmoniques (qui sont les multiples de sa fréquence fondamentale).

En mécanique, l'analyse vibratoire repose sur la détermination des fréquences auxquelles un système est sensible : le DSF permet de déterminer les harmoniques présents dus à des forces d'excitation, et de se prémunir des vibrations gênantes au regard de la fréquence propre du système (notamment dans les machines tournantes, mais aussi dans les ouvrages du génie civil par rapport à la résistance des structures). **§13.96**

En électricité, l'analyse des harmoniques présents dans le courant électrique repose aussi sur le DSF. On peut ainsi mesurer la distorsion harmonique et éliminer les harmoniques indésirables (généralement, ce sont les harmoniques impairs de rang 3 et 5 qui sont les plus gênants, car d'amplitude non négligeable). Ces harmoniques (souvent dus à des composants non-linéaires, des équipements informatiques ou des lampes) créent des perturbations dans les réseaux électriques : effet Joule, diminution du facteur de puissance, vieillissement, endommagement. On parle alors de pollution harmonique. **§13.32**

Les mots-clés de ce chapitre sont : série trigonométrique, fonction périodique, fondamental, harmonique, valeur moyenne, valeur efficace, composante continue, fréquence, pulsation, déphasage, discontinuité [2, 44, 30].